matyce językiem tajemnym, niezgodnym z językiem innych dyscyplin naukowych i technicznych i niezgodnym z językiem potocznym.

3.5. Aby znaleźć miejsce w programie na definicję mnogościową, trzeba było usunąć z niego wiele własności, które rozbudzały inteligencję uczniów i miały zastosowania. Liczne ubogie struktury, które składają się na nowe nauczanie średnie matematyki, a o użyteczności których uczeń musi wątpić, mają rację bytu tylko dzięki temu, że pozwalają zbudować struktury bogate, lecz bardzo specjalne. Te bogactwa nie powinny być przywilejem nauczania wyższego. Jest rzeczą niezbędną, by nauczyciel szkoły średniej miał swobodę i środki na pokazanie niektórych z nich, wziętych według uznania z rachunku prawdopodobieństwa, teorii gier lub z arytmetyki, algebry czy też geometrii. Jego rola nie powinna ograniczać się do zdefiniowania wszystkich pojęć, których inni będą używać. Jego misją jest rozbudzenie umysłu ucznia, ćwicząc go w odkrywaniu i posługiwaniu się podstawowymi pojęciami matematyki.

Wniosek: *obecna reforma jest w niebezpieczeństwie.*

W szkolnictwie średnim mnogościowe ujęcie geometrii jest zatem niebezpieczną utopią. Aktualnie opublikowane programy nie narzucają jej, ale komentarz oficjalny do porgramów trzeciego i czwartego roku nauczania szkoły średniej zalecał właśnie to ujęcie. Terminologia naukowa, której musieliśmy użyć, aby komentarz ten przeanalizować, dowodzi, jak dalece reforma ta nie docenia zdolności i potrzeb intelektualnych uczniów klas średnich.

Obecna reforma stawia w niebezpieczeństwie przyszłość ekonomiczną, techniczną i naukową naszego kraju.

RÉNÉ THOM (Bures-sur-Yvette)

Matematyka „nowoczesna": pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?(1)

W odczuciu większości współczesnych ludzi tak zwana "nowoczesna" matematyka cieszy się wielkim poważaniem. Matematyka razem z cybernetyką i informatyką została wrzucona do worka ze sztukami magicznymi, zachwalanymi przez zwodniczą reklamę jako coś istotnego dla współczesnej techniki, narzędzie niezbędne dla przyszłego rozwoju wiedzy naukowej. Co więcej, z chwilą modernizacji programów nauczania „nowoczesna" matematyka wtargnęła do życia domowego.

(1) Tłumaczenie artykułu *Les mathématiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique* opublikowanego w L'Age de la Science 3, zeszyt 3, str. 225–245; wersja angielska opublikowana została w The American Scientist 59 (1971), str. 695–699 (*przyp. red.*).

Zaniepokoiła wielu rodziców, którzy — niezdolni już pomagać swym dzieciom — poczuli się zgubieni w obliczu nowej, nie znanej im terminologii. Niektórzy, zakłopotani, przyjęli to za jeszcze jeden objaw przepaści otwierającej się pomiędzy generacjami, skłonni systematycznie tamować te nowe idee. Inni natomiast, szczególnie ci, którzy sami zajmowali się nauczaniem, przyjęli z entuzjazmem nowe programy, nowe pojęcia i nową symbolikę. Cóż należy o tym sądzić?

Modyfikacja programów nauczania. Zróbmy krótki bilans zmian wprowadzonych do programów:

1) *Nowo wprowadzone pojęcia*:

(A) „Elementarna" teoria zbiorów; użycie symboli ($\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$); odwzorowania jednego zbioru w inny; kwantyfikatory. Z pewnością najbardziej uderzające jest to, że zbiory pojawiają się wszędzie od przedszkola aż do matury. Do tej sprawy powrócimy jeszcze później.

(B) Rozwijanie pojęć algebraicznych; własności działań; pojęcia grupy, pierścienia, ciała. Wprowadzenie ciała liczb zespolonych w ostatniej klasie.

(C) Wcześniejsze wprowadzenie podstawowych pojęć rachunku różniczkowego i całkowego, pochodnych, całek nieoznaczonych, funkcji elementarnych takich, jak logarytm i funkcja wykładnicza.

2) *Pojęcia usunięte*:

Tradycyjna geometria euklidesowa, a w szczególności zawiłości geometrii trójkąta.

Łatwo jest zauważyć, że w sumie zmiany programu wyrażają się w znacznym zwiększeniu materiału w szkole średniej. Jeśli jakiś program zasługuje na miano „obłędnego", to przede wszystkim dotyczy to punktu (C). Czy można by uniknąć tej inflacji? Zwróćmy uwagę, że tendencja do algebraizacji nauczania ze szkodą dla geometrii pogłębia się jeszcze bardziej w nauczaniu uniwersyteckim.

Eliminacja geometrii. Usunięcie z programów szkolnych tradycyjnej geometrii euklidesowej oparte zostało na dwóch argumentach. Pierwszy z nich jest teoretyczny: prace aksjomatyczne powstałe pod wpływem *Grundlagen der Geometrie* Hilberta wykazały, że rzekoma ścisłość *Elementów* Euklidesa jest w dużej mierze iluzoryczna, często oparta na uzasadnieniach intuicyjnych. Argumentowano więc, że należy unikać geometrii euklidesowej i rozwijać takie teorie, jak algebra, której ścisłe wyłożenie jest możliwe. Drugi argument jest natury praktycznej: tradycyjna geometria euklidesowa ze szczegółowym rozpatrywaniem własności trójkąta jest pedantyczna i niepotrzebna. Któż bowiem kiedykolwiek musiał posłużyć się na co dzień „prostą Simpsona" lub „kołem Feuerbacha".

Algebra a geometria. Zajmiemy się najpierw argumentem drugim. Uważa się, że algebra jest bardziej użyteczna i potrzebna od geometrii. Oczywiście nikt nie ma zamiaru negować ogólnej przydatności naukowej takich teorii, jak algebra liniowa lub pewnych pojęć algebry wieloliniowej. Jednak już w stosunku do ogólnej

algebry przemiennej, wielomianów itp. powinniśmy być bardziej sceptyczni. Któż w swoim życiu codziennym musiał rozwiązać równanie drugiego stopnia lub posłużyć się pojęciem modułu nad pierścieniem? A więc okazuje się, że jeśli chodzi o algebrę, argument o użyteczności nie jest tak mocny, jak to przedstawiano. Natomiast odnosi się on w pełni do rachunku różniczkowego i całkowego, ponieważ są to podstawowe wiadomości niezbędne dla każdego wykładu fizyki klasycznej.

Znajomość algebry na poziomie elementarnym z pewnością przynosi wielkie korzyści. Wystarczy sobie przypomnieć arytmetyczne zadania tekstowe dla dwunastolatków, których rozwiązanie „przez rozumowanie" wymagało niecodziennej lotności umysłu, podczas gdy do ich rozwiązania za pomocą algebry wystarczy prawidłowo stosować elementarne mechanizmy formalne. W tym przypadku ekonomia myślenia, jaką daje algebra, jest niezaprzeczalna. Ale gdy zajmiemy się zagadnieniami bardziej złożonymi, to wyższość algebry zaciera się. Kartezjusz wymyślił geometrię analityczną, ażeby zredukować geometrię do algebry. Lecz, jak wynika z doświadczenia, przewaga metod analitycznych nad geometrycznymi w problemach teoretycznych i ogólnych nie jest zasadnicza.

„Modernizm". W dzisiejszej matematyce zastosowanie algebry jako narzędzia jest bardzo ważne i być może zasadnicze. Na pewno jednak warto zastanowić się czy potrzeby zawodowych matematyków powinny być brane pod uwagę na poziomie szkoły średniej. Matematycy naszego pokolenia, przesiąknięci duchem bourbakistów, mają naturalną skłonność do włączenia do programów szkół średnich i wyższych teorii i struktur algebraicznych, które były tak bardzo użyteczne w ich własnych badaniach i które triumfują w umysłach matematyków naszych czasów. Rozsądne jest jednak pytanie czy do programów nauczania w szkole średniej powinno się włączać ostatnie zdobycze nauki? Matematycy nie są odosobnieni w poddawaniu się tym skłonnościom. Widziałem podręczniki biologii zarówno dla początkujących i dla zaawansowanych — gdzie przedstawiano podwójną spiralę DNA Watsona i Cricka oraz cały mechanizm odtwarzania spirali jako prawdę naukową definitywnie udowodnioną. Bez próby czasu nie powinno się w ogóle dopuszczać nowości do programów szkolnych. We Francji powinno się było liczyć na to, że zespół inspektorów generalnych zapewni niezbędną stabilność programów szkolnych. Prawdopodobnie w obawie, by słuszny sceptycyzm nie był poczytany za objaw sklerozy, bariera ta nie działała dotychczas z pożądaną skutecznością. Z drugiej strony, podręczniki muszą się zmieniać i wydawcy muszą z czegoś żyć.

Problem geometrii. W przedstawionej analizie argument o użyteczności programów nauczania nie jest chyba decydujący. Pomińmy jako pozostałość minionych czasów „kulturę" czyli „to, co zostaje, gdy wszystko inne ulega zapomnieniu". Niektórzy ciągle upierają się przy poglądzie, że w tej bądź innej formie jednym z celów nauczania jest „selekcja", to znaczy jak najlepsze ocenienie zdolności każdego ucznia i rozwinięcie ich do maksimum ze szczególną uwagą zwróconą na najbardziej utalentowane jednostki. Uważam jednak, że osiągnięcie tego celu jest niemożliwe w dziedzinie, która nie zawierałaby w sobie przynajmniej trochę nie-

potrzebnych, nieużytecznych elementów. W istocie rzeczy, aby w pełni ocenić możliwości ucznia, należy postawić go w sytuacji wymagającej aktywności i odwołać się do jego inicjatywy, do jego własnej przedsiębiorczości. Takiej sytuacji nie można stworzyć w ramach teorii „użytecznej", w której cały materiał — włączony ze względu na swą użyteczność — jest dogmatycznie wykładany, a uczeń doskonały to taki, który dokładnie i szybko zapamiętuje wyłożony materiał. Z tego punktu widzenia wartość dydaktyczną mają jedynie teorie zawierające elementy pewnej „gry", a spośród wszystkich takich gier geometria euklidesowa, stale odwołująca się do swych intuicyjnych podstaw, ma największe znaczenie. Tak więc, obecna tendencja do zastępowania geometrii algebrą jest dydaktycznie zgubna i powinna być zmieniona. Powód tego jest prosty: istnieją problemy geometryczne, natomiast nie ma problemów algebraicznych. Zadanie z algebry może być tylko prostym ćwiczeniem wymagającym ślepego zastosowania reguł rachunkowych, wcześniej ustalonego formalnego schematu. Poza nielicznymi wyjątkami uczeń nie jest w stanie udowodnić samodzielnie twierdzenia z algebry, ponieważ dowodzona własność albo jest prawie natychmiastowa i wymaga jedynie podstawiania definicji, lub też problem jest prawdziwie teoretyczny i wówczas jego rozwiązanie przekracza możliwości najbardziej uzdolnionych uczniów. Z lekką przesadą można powiedzieć, że każde zadanie z algebry jest „trywialne" bądź nie do rozwiązania. W przeciwieństwie do tego klasyczne problemy geometrii mogą przedstawiać bardzo zróżnicowany poziom trudności.

Co prawda, rozwiązanie problemu geometrycznego wymaga dużo czasu, wysiłku, koncentracji, zdolności kojarzenia, do których tylko nieliczni uczniowie są zdolni. Być może, że geometria euklidesowa, podobnie jak wiersze łacińskie, jest jednym ze szlachetnych i staromodnych ćwiczeń, zarezerwowanych dla elity i niezgodnych z masowym nauczaniem. Gdyby tak było, to usunięcie geometrii z programów należałoby do problemów natury wyłącznie socjologicznej, o których wolałbym nie dyskutować. W każdym razie byłoby dużym błędem uważać, że można ułatwić przyswajanie matematyki zastępując geometrię algebrą nauczaną masowo i przedwcześnie bez odpowiedniej motywacji. Z tego punktu widzenia wprowadzanie ciała liczb zespolonych do programów nie wydaje się konieczne.

Ścisłość. Przechodzimy teraz do drugiego zarzutu przeciwko geometrii euklidesowej. Opierał się on na niedoskonałości i nieścisłości aksjomatyki *Elementów* Euklidesa. Należy wpierw zwrócić uwagę na to, że już od dawna zaniechano ciężkiej i niestrawnej retoryki Euklidesa w nauczaniu geometrii. Niektórzy łudzili się nadzieją zastąpienia jej przez aksjomatykę hilbertowską. Przerażająca złożoność tej konstrukcji rozwiała tę nadzieję. Do postawionego zarzutu nie można się ustosunkować bez wcześniejszej odpowiedzi na pytanie natury filozoficznej: jaka powinna być koncepcja ścisłości w matematyce? Do przyjęcia są następujące trzy postawy:

a) *Postawa formalistyczna.* W obrębie jednego sformalizowanego systemu (S) zdanie P jest prawdziwe, gdy daje się wyprowadzić z aksjomatów (S) przez skończoną ilość operacji dopuszczalnych w obrębie (S).

b) *Postawa realistyczna* czyli *platońska.* Obiekty matematyczne istnieją niezależnie od naszej myśli — tak jak idee platońskie. Zdanie (*P*) jest prawdziwe, gdy wyraża istniejącą efektywnie relację między ideami; to znaczy jest ideą wyższego rzędu narzucającą strukturę w zbiorze idei jej podporządkowanych.

c) *Koncepcja empiryczna* czyli *socjologiczna.* Dowód (*D*) uważamy za ścisły, jeżeli ma aprobatę najlepszych aktualnie specjalistów.

Z tych trzech postaw pierwsza jest obecnie najczęściej spotykana wśród matematyków. Na pierwszy rzut oka jest ona najbardziej kusząca. Nie wnosi trudności ontologicznych, jak np. propozycja druga, nie jest tak nieokreślona i arbitralna jak trzecia. „Matematyka to wiedza, w której nie jest wiadome, o czym się mówi, ani czy to, co się wypowiada, jest prawdziwe" (B. Russel). Niestety trudno jest zachować postawę czysto formalistyczną i, dość paradoksalnie, jest tak z przyczyn formalnych. Wiadomo, na jakie trudności związane z twierdzeniem Gödla napotkała formalizacja arytmetyki. G. Kreisel([2]) omówił krytycznie postawę formalistyczną. Ja zadowolę się następującym przykładem: przypuśćmy, że dla sformalizowanej teorii (*S*) można skonstruować maszynę elektroniczną (*M*), która jest w stanie z ogromną szybkością wykonywać wszystkie operacje z (*S*). Chcemy sprawdzić pewną formułę (*F*) należącą do teorii; po rachunku złożonych z 10^{30} operacji elementarnych wykonanych w kilka sekund, maszyna (*M*) daje odpowiedź pozytywną. Jaki matematyk bez wahania uznałby za wartościowy taki dowód, jeśli sprawdzenie po kolei wszystkich jego etapów jest niemożliwe?

„Sens" w matematyce. Każdy matematyk obdarzony pewną dozą uczciwości intelektualnej przyzna, że w każdym ze swoich dowodów jest w stanie przypisać sens każdemu z używanych symboli: różni się on w tym od fizyka teoretyka, który bardzo często nie waha się zaufać magicznym zaletom ślepego formalizmu w nadziei (często zwodniczej), że „światło na końcu rozświetli ciemności początku".

Jeśli zaniechamy formalistycznej definicji ścisłości, pozostają nam jedynie do wyboru postawy b) i c). Rozważywszy to matematyk powinien mieć odwagę wyznać swoje najgłębsze przekonanie: przyzna on więc, że struktury matematyczne mają egzystencję niezależną od umysłu ludzkiego, który je rozważa. Ta forma istnienia jest bez wątpienia różna od konkretnej i materialnej egzystencji świata zewnętrznego, lecz tym niemniej jest ona subtelnie i głęboko związana z egzystencją obiektywną. W jaki sposób można by bowiem wytłumaczyć niewątpliwy sukces matematyki w opisywaniu wszechświata, gdyby była ona jedynie bezużyteczną igraszką, przypadkowym produktem działania naszego mózgu? Reguły matematyczne można odnaleźć nie tylko w ścisłym i tajemniczym funkcjonowaniu praw fizyki, lecz również, mniej jawnie, ale bez wątpliwości, zauważamy je w niekończącym się następstwie form świata ożywionego i nieożywionego, w formowaniu się i unicestwianiu symetrii tych form. Z tych powodów najbardziej naturalna i filozoficznie najbardziej ekonomiczna jest wbrew pozorom hipoteza, która mówi, że

---

([2]) G. Kreisel, *The formalist-positivist doctrine of mathematical precision in the light of experience*, L'Age de la Science, S (1970), zeszyt 1, str. 17–46.

idee platońskie nadają kształt światu. O tym świecie idei matematycy mają w każdej dowolnej chwili wiedzę bardzo niepełną i fragmentaryczną. Z tego powodu każdy dowód jest przede wszystkim odkryciem nowej struktury, której elementy leżą niepowiązane w intuicji człowieka, dopóki rozumowanie człowieka nie złoży ich w jedną całość. W tym sensie każdy dowód jest doświadczeniem sokratycznym; chodzi o wywołanie w umyśle osoby czytającej procesu psychologicznego koniecznego dla wyłonienia prawdy, której wszystkie dane już są w umyśle tej osoby, lecz pozostają jeszcze ukryte i niesformułowane. W tym sensie właśnie między punktami b) a c) nie ma sprzeczności. Świat idei nie jest nam ukazany od razu w całości. Musimy go tworzyć na nowo w naszej świadomości przez stałą, wciąż rozpoczynaną rekonstrukcję.

Przeciwnicy tezy ontologicznej b) powinni zastanowić się nad następującym faktem: w historii matematyki nie ma przykładu, by pomyłka jednego człowieka pociągnęła naukę na błędną drogę. Bardzo często się zdarza, że matematyka zabrnie w formalne rozwijanie teorii nieznaczących i nieciekawych. Tak było dawniej, tak dzieje się obecnie i tak, bez wątpienia, będzie w przyszłości. Nigdy jednak ważny błąd nie mógł się wśliznąć do czyjegoś wniosku i pozostać bez prawie natychmiastowego wykrycia. Czy można by inaczej wytłumaczyć taką jednomyślność, gdyby nie była ona związana z powszechnym poglądem, że jest ona rezultatem nieustającej walki umysłu ludzkiego ze stałymi, bezczasowymi i powszechnymi więzami. Przekonanie o istnieniu świata idei pozwala matematykowi nie troszczyć się zbytnio o ograniczenia procedur formalnych; podobnie może on zapomnieć o problemie niesprzeczności, z tej prostej przyczyny, że świat idei w sposób nieskończony przewyższa nasze „techniczne możliwości". To właśnie intuicja jest najwyższą racją naszej wiary w prawdziwość istniejących twierdzeń. A zgodnie z zapomnianą dziś etymologią, teoremat jest przede wszystkim przedmiotem wizji ([3]).

Każdy musi decydować za siebie. Nie istnieją ścisłe definicje „ścisłości". Możemy więc przyjąć, że dowód jest ścisły, jeżeli jest akceptowany przez wszystkich czytelników, którzy mają dostateczne przygotowanie do jego zrozumienia. Co więcej, oczywistość dowodu prowadząca do przeświadczenia o jego słuszności wynika ze zrozumienia użytych symboli na tyle jasnego, że ich kombinacja przekonuje czytelnika. Z tego punktu widzenia ścisłość (lub jej brak) jest w istocie rzeczy *lokalną* własnością rozumowania matematycznego. Dla ocenienia słuszności rozumowania nie potrzeba wypracowanych struktur aksjomatycznych ani wyrafinowanej machiny pojęciowej. Wystarczy do tego jedynie zrozumienie zastosowanych symboli i jasna idea, jak przeprowadzać na nich różne kombinacje.

Granice i potrzeba aksjomatyzacji. Powyższy punkt widzenia może sugerować, że odchodzimy trochę od aksjomatyki. Sformalizować teorię znaczy nic innego, jak zacząć od przedstawionego w teorii materiału, który jest zorganizowany jako intuicyjna „morfologia" T, następnie przedstawić formalny zestaw symboli i pra-

([3]) Greckie *theōrein* — przyglądać się, rozważać (*przyp. red.*).

widłowości generujących system formalny (S) izomorficzny z morfologią (T); izomorfizm $(S) \rightarrow (T)$ jest ściśle odpowiedniością przyporządkowującą symbolowi s należącemu do (S) jego „znaczenie", to jest jego intuicyjny sens w (T) (jego realizację semantyczną, jakby powiedzieli logicy).

Czy można mieć nadzieję, że intuicyjna treść teorii (T) może być w pełni pokryta symbolicznymi wyrażeniami (S)? Natychmiast przychodzi na myśl przykład języków naturalnych. Lingwiści szkoły formalnej zawzięcie próbowali zredukować gramatykę i syntaksę języka naturalnego do aksjomatów. Aby to zrobić, rozpoczęli od pewnej liczby procedur formalnych — generujących i transformujących gramatyk — których wiarygodność na poziomie formalnego opisu zdań efektywnie istniejących w języku nie może być podważona. Lecz jeśli usystematyzować te formalne procedury w aksjomatykę i ślepo stosować otrzymane formalne wyniki, to szybko zbudujemy zdania takiej długości i tak złożone, że będą one zupełnie niezrozumiałe.

Nie widzę żadnego powodu, aby podobne zjawisko nie zachodziło w matematyce: jeśli stosować mechanizm formalny do granic jego generatywnych możliwości, może się zdarzyć, że zbudujemy tak długie i skomplikowane formuły, że zniknie wszelka możliwość intuicyjnej interpretacji. „Twierdzenia" tak otrzymane będą być może formalnie prawdziwe, lecz semantycznie będą bez znaczenia. Należy się więc spodziewać, że w każdej teorii intuicyjnej (T) celowe jest posługiwanie się kilkoma aksjomatykami; każda „lokalna" aksjomatyka (S) ma zadaną wraz z intuicyjną morfologią (T) również „strefę kontaktu" Z_s, dla której jest prawdziwa; lecz gdy zbudujemy w (S) formuły zbyt długie i skomplikowane, to ich czytelność zniknie. Na granicy strefy Z_s związek semantyczny między (S) a (T) załamuje się, nie pozwala to przedłużyć poza Z_s izomorfizmu $S \rightarrow T$ zadanego na podstawie sensu. Pogląd, że teoria (T) może być generowana przez jeden tylko mechanizm formalny jest *a priori* tak nieprawdopodobna, jak stwierdzenie, że Ziemia jest płaska, bądź że można pokryć rozmaitość za pomocą jednej mapy. Mechanizm semantycznego rozejścia się należałoby dokładniej sprecyzować; zobaczymy dalej uderzający przykład tego, co zdarza się, gdy prawa składania są nieadekwatne do semantycznych wartości symbolizowanych elementów (będzie to przypadek stosowania formalizmu boole'owskiego do potocznego języka).

Bezsprzeczną zaletą formalizmu lokalnego jest często możliwość sprecyzowania danych intuicyjnych, a jego wartością nie do zastąpienia jest to, że pozwala on na porozumiewanie się matematyków. Wszelkie metody przekazywania informacji, pisane lub ustne, odwołują się do morfologii jednowymiarowej. W związku z tym niezbędna staje się umiejętność zakodowania morfologii intuicyjnej (T) (ma ona zwykle za bazę przestrzeń wielowymiarową o bardzo dużej liczbie wymiarów) za pomocą formalnego systemu (S) złożonego z symboli jednowymiarowych. Ostatnio wielokrotnie podkreślano znaczenie aksjomatyzacji jako instrumentu służącego do systematyzacji i badań. Jako metoda systematyzacji jest ona niewątpliwie efektywna, natomiast jej przydatność do badań jest mniej oczywista. Charakterystyczne jest to, że żadne nowe twierdzenie nie wynikło z ogromnego wysiłku włożonego

przez Bourbakiego w systematyzację (która, jako taka, nie jest prawdziwą formalizacją, gdyż Bourbaki używa niesformalizowanego metajęzyka). Jeśli matematycy powołują się na Bourbakiego, to przeważnie odnosi się to do zadań w książce, w których znajdują więcej „pożywienia" niż w dedukcyjnej części tekstu, gdyż w zadaniach tych autor zgromadził konkretny materiał. Należy dobitnie stwierdzić: aksjomatyzacja jest zadaniem specjalistów i nie ma dla niej miejsca ani w nauczaniu w szkole średniej, ani na uczelniach (oczywiście poza gronem specjalistów zajmujących się badaniem podstaw). To powinno wyjaśnić, dlaczego zarzut niekonsekwencji stawiany geometrii euklidesowej jest bez znaczenia, nie podważa on bowiem jedynie znaczącej cechy: prawdziwości lokalnego rozumowania intuicyjnego.

„Genetyczne" znaczenie geometrii: ciągłość jest wcześniejsza od nieciągłości. Powyższe rozważania dają nam klucz do zrozumienia sukcesu historycznego *Elementów* Euklidesa. Geometria euklidesowa była pierwszym przykładem zapisu procesu przestrzennego dwu- lub trójwymiarowego w jednowymiarowym języku pisanym. W tym celu geometria euklidesowa zastosowała procedurę znaną już z codziennego języka, do sytuacji bardziej sztywnej i lepiej zdeterminowanej. Zasadniczą funkcją zwykłego języka jest przede wszystkim opis procesów przestrzenno-czasowych, które nas otaczają; topologia tych procesów odzwierciedla się w składni opisujących je zdań([4]). W geometrii euklidesowej mamy do czynienia z tą samą funkcją języka, lecz tym razem grupa równoważności działająca na figurach jest grupą Liego, grupą metryczną w przeciwieństwie do grup opisujących bardziej topologiczne niezmienniki „Gestalten"([5]), pozwalające rozpoznać obiekty zewnętrznego świata opisane terminami języka potocznego.

Geometria jest więc naturalnym i prawdopodobnie niemożliwym do zastąpienia łącznikiem między zwykłym językiem a sformalizowanym żargonem matematycznym, w którym każdy obiekt jest zredukowany do symbolu, a grupa równoważności redukuje się do identyczności zapisanego symbolu z nim samym. Z tego punktu widzenia stadium myślenia geometrycznego jest być może etapem nie do ominięcia w normalnym rozwoju racjonalnej działalności człowieka. Od pięćdziesięciu lat kładło się stanowczo zbyt silny nacisk na odtworzenie geometrycznego continuum, wychodząc od liczb naturalnych (przez teorię przekrojów Dedekinda lub przez uzupełnienie liczb wymiernych). Pod wpływem aksjomatycznych i książkowych tradycji widziano w zbiorze dyskretnym główną istotę matematyki: „Bóg stworzył liczby naturalne, a reszta jest dziełem człowieka". Ta maksyma algebraika Kroneckera świadczy raczej o jego przeszłości, jako wzbogaconego na operacjach monetarnych bankiera, niż o przenikliwości filozoficznej. Jest bezsporne z psychologicznego punktu widzenia (a dla mnie z ontologicznego), że continuum geometryczne jest bytem pierwotnym. Mieć świadomość, to znaczy mieć świadomość

([4]) Por. R. Thom, *Topologie et Linguistique*, artykuł opublikowany w tomie Essays in Topology and Related Topics, dedykowanym G. de Rhamowi, wydanym przez Springer Verlag, str. 226–248

([5]) Postać, kształt (niem.) (*przyp. red.*).

czasu i przestrzeni, continuum geometryczne jest w pewnym sensie nierozerwalnie związane ze świadomym myśleniem.

Continuum to — z początku jednorodne i bezpodstaciowe — stopniowo wzbogaca swoją strukturę; podstawowym narzędziem tego „ustrukturowienia" jest grupa metryczna, pozwalająca wprowadzić nieciągłość i operacje dyskretne w jednorodnej przestrzeni. Lecz jest to już operacja bardzo złożona, u podstaw mamy wszystkie własności topologicznego continuum. Aby je odnaleźć, matematyka nowoczesna (ta prawdziwa) musiała powrócić do źródeł, wyzwalając się spod dominacji grupy metrycznej. Taka teoria nie będąca ani metryczną, ani ilościową, jest głównie jakościowa i jako taka może się opierać jedynie na dyskretnym symbolizmie w języku semisformalizowanym. Jednakże bardziej głębokie niezmienniki topologiczne są trudniejsze do przyswojenia niż bardziej od nich sztuczne niezmienniki metryczne. Z tych względów przejście od zwykłego myślenia do myślenia sformalizowanego zachodzi w naturalny sposób poprzez myślenie geometryczne. Tak było w historii myśli ludzkiej, tak być powinno w normalnym rozwoju myślenia racjonalnego, jeśli oczywiście wierzyć prawu Haeckela, które mówi, że osobnik w swoim rozwoju musi przejść przez wszystkie etapy rozwoju gatunku.

Teoria zbiorów. Powracam teraz do punktu pierwszego, do teorii zbiorów. Jest to zasadniczy punkt rozwijany przez piewców matematyki „nowoczesnej". Niektórzy twierdzą, że użycie teorii zbiorów pozwoli całkowicie zrewolucjonizować nauczanie matematyki i że dzięki tym zmianom nawet najbardziej przeciętny uczeń będzie w stanie opanować wykładany program matematyki. Nie warto nawet mówić, że jest to złudzenie. Każdy może przyswoić sobie umiejętność posługiwania się oczywistymi faktami wynikającymi z naiwnej teorii zbiorów. Lecz to nie jest jeszcze ani matematyka, ani nawet logika. Z chwilą gdy wchodzimy w kontakt z prawdziwą matematyką (z liczbami rzeczywistymi, geometrią, funkcjami), wówczas odkrywamy, że nie ma drogi królewskiej i że większość uczniów nie będzie w stanie przyswoić sobie tych pojęć w całości. Przesadny optymizm wywołany używaniem symboliki teorii zbiorów oparty jest, jak się wydaje, na pomyłce filozoficznej. Sądzono, że przez nauczanie posługiwania się symbolami ϵ, $\subset$, $\cup$, $\cap$ można wyjaśnić mechanizm leżący u podstaw każdego rozumowania, każdej dedukcji. Człowiek XX wieku z entuzjazmem odkrył na nowo sylogizmy Derapti i Celarent, które były wykładane przez scholastykę średniowiecza. Lecz jakież obniżenie poziomu nastąpiło. Gdy w XIX w. Boole pisał sławne dzieło poświęcone algebrze noszącej jego imię, nie zawahał się przed nadaniem mu tytułu: *The laws of thought*. Naiwną wiarę w to, że każdy wywód znajduje swój model w działaniach teorii zbiorów, podzielali tacy nowocześni filozofowie, jak neopozytywiści. Ani Arystoteles, ani średniowieczni scholastycy nie podzielali tej iluzji. Jak przypomina J. Vuillemin(6), logika arystotelesowska opierała się na bogatej i złożonej ontologii substancji. Nowocześni inicjatorzy teorii zbiorów powinni zdawać sobie sprawę, że teoria ta

(6) J. Vuillemin, *De la logique à la théologie*, Flammarion, Paryż 1967.

jest niewystarczająca do odtworzenia najbardziej elementarnego postępowania dedukcyjnego zwykłego myślenia. Niech mi będzie wolno zilustrować to przykładem.

Spójniki „lub" oraz „i". Klasycznie naucza się, że równoważnikiem gramatycznym symbolu $\cup$ (suma) jest *lub*, natomiast *i* jest odpowiednikiem symbolu $\cap$ (część wspólna). Zastosujemy tę regułę do dwóch zdań, których podmiotami są imiona własne:

(i) Piotr lub Jan przyjdzie,

(ii) Piotr i Jan przyjdą.

Pierwsze zdanie (i) można inaczej wypowiedzieć jako: *Piotr przyjdzie lub Jan przyjdzie.* Wówczas mamy zupełną zgodność symbolu *lub* z sumą logiczną $\cup$, pod warunkiem, że spójnik *lub* odniesiemy do czasownika *przyjdzie*, a nie do podmiotów.

Drugie zdanie (ii) również można sparafrazować: *Piotr przyjdzie i Jan przyjdzie.* Gdy to zrobimy, zauważymy, że zdanie (ii) jest nieco dwuznaczne; Piotr i Jan przyjdą znaczy w ukrytej formie (w „dorozumieniu" zdania), że Piotr i Jan przyjdą *razem.* Podczas gdy wyrażenie *Piotr lub Jan* jako takie nie ma żadnej realizacji *semantycznej*, to *Piotr i Jan* można interpretować jako całość złożoną z pary osób Piotra i Jana, przypuszczalnie bliskich w przestrzeni.

Fakt ten tłumaczy różnicę w gramatycznym traktowaniu orzeczeń w (i) i (ii); spójnik *i* wymaga liczby mnogiej, gdyż zakłada on pewną bliskość przestrzenną podmiotów.

Weźmy pod uwagę teraz zdania, w których spójniki odnoszą się tym razem do walorów jakościowych (przymiotniki).

1) Piotr jest niski lub inteligentny.

2) Piotr jest niski i inteligentny.

3) Jan jest brunetem lub szatynem.

4) Jan jest brunetem i szatynem.

iZauważymy, że zdania 2) i 3) są semantycznie możliwe do przyjęcia, natomiast 1) 4) są wątpliwe lub wręcz nie do zaakceptowania. Podsumujemy uwagi w postaci następującej zasady:

Zasada wykluczania. Jeśli X i Y są dwiema jakościami, wówczas zdania

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ jest } X \text{ lub } Y \\ A \text{ jest } X \text{ i } Y \end{array}\right\} \quad \text{nie mogą jednocześnie być semantycznie zaakceptowane.}$$

Jeśli X *lub* Y może być poprzedzone podmiotem, to mówimy, że X i Y są jakościami z tego samego *obszaru semantycznego* (na przykład: *brunet*, *szatyn* w zdaniach 3) i 4)). W takim przypadku X *i* Y na ogół nie ma sensu. Jest jednak ważne odstępstwo od tej reguły, a mianowicie przypadek, gdy „i" oznacza bliskość w przestrzeni, a nie iloczyn logiczny. Następujące dwa zdania są jednakowo możliwe:

5) Ten sztandar jest biały lub czarny.

6) Ten sztandar jest biały i czarny.

Fakt, że w zdaniu 6) spójnik *i* nie ma znaczenia $\cap$, wyraża się w tym, że implikacja

Ten sztandar jest biały i czarny $\Rightarrow$ *Ten sztandar jest biały*

jest fałszywa.

W rzeczywistości warunki na to, by własność *X lub Y* miała sens, są ogromnie ograniczające. Na przykład: *Jan jest blondynem lub szatynem* jest zdaniem bardziej prawdopodobnym niż *Jan jest blondynem lub brunetem*, gdyż w dziedzinie semantycznej kolory włosów blond i ciemnoblond (szatyn) są powiązane, gdy natomiast kolor blond i brązowy (brunet) nie są sobie bliskie. W geometrycznym języku spójnik *lub* daje efekt *zmniejszania progu* między dwoma „polami przyciągania" zdefiniowanym przez przymiotniki blond i ciemnoblond. Gdy dystans semantyczny między dwiema własnościami *X*, *Y* staje się zbyt duży, wyrażenie *X lub Y* traci cały sens. Dzieje się tak na przykład, gdy własności te należą do rozłącznych dziedzin semantycznych, tak jak cecha fizyczna i cecha moralna.

Wydaje się, że ten oczywisty fakt uszedł uwadze autorów podręczników z teorii zbiorów. Proponują oni uczniom ćwiczenia z algebry Boole'a, dotyczące zdań: „sześciany duże lub niebieskie" i „Paryżanie łysi lub bogaci". Ćwiczenia takie są nie tylko dziwaczne i niepotrzebne, lecz ponadto, gdyby konsekwentnie posuwać się tą drogą, mogą okazać się szkodliwe dla intelektualnej równowagi dziecka. Rozróżnianie różnych dziedzin semantycznych jest podstawową zasadą poprawnego myślenia: mieszanie tych dziedzin ma swoją nazwę: *delirium*. Gdyby logicy chcieli przypisać sens wszystkim zdaniom zbudowanym z potocznego języka za pomocą formalizmu boole'owskiego, to otrzymaliby opis świata *urojonego* i *szaleńczego*.

Wszystko to pokazuje, jak wąskie są granice użyteczności teorii zbiorów do opisu procesów zwykłej dedukcji. Rozumowanie dnia codziennego odwołuje się do głębokich mechanizmów psychicznych, takich jak analogia, które nie mogą być sprowadzone do operacji teorii zbiorów: w tym przypadku zasadniczą rolę odgrywa podobieństwo budowy wewnętrznej różnych dziedzin semantycznych, które są homologicznie kojarzone. Natomiast schemat boole'owski jest stosowalny tylko w sytuacjach opisanych przez zawieranie przestrzenne podzbiorów przestrzeni, jak na przykład w schematach Venna. Wówczas jednak nikt nie sądzi chyba, że warte jest trudu opisywanie rozumowania za pomocą sylogizmów: lis, który wie, że jeśli kury są w kurniku, a kurnik jest w ogrodzie, to kury są w ogrodzie, nie troszczy się o teorię zbiorów. Człowiek stosuje teorię zbiorów od początku istnienia; zupełnie tak jak molierowski Jourdain, który mówił prozą, nic o tym nie wiedząc. Można by powiedzieć, że lepiej jest stosować teorię zbiorów, gdy się ją zna: jednak korzyści, jakie można dzięki temu uzyskać, są czysto retoryczne. Korzyść z lokalnej formalizacji — która jest właściwie lokalnym „uprzestrzenieniem" — i ze stosowania do niej formalizmu teorii zbiorów można mieć w dowodzie matematycznym tylko w takim zakresie, w jakim technika dowodu jest typu retorycznego. Siła przekonywania schematów logicznych pochodzi od zawierania przestrzennego, a nie odwrotnie.

Wskazuje nam to, jaki stosunek powinna mieć rozsądna dydaktyka do teorii. Prosta i konkretna teoria zbiorów powinna być przerabiana w przedszkolach, gdzie ma ona swoje naturalne miejsce. W ostatnich klasach szkoły podstawowej([7]) uczniowie powinni przyswoić sobie posługiwanie się symbolami ϵ, $\cap$, $\cup$, $\subset$; później wprowadzić należy kwantyfikatory, i na tym powinno się zakończyć.

Nie wiadomo czy nawet w matematyce czystej każde rozumowanie dedukcyjne ma swój model w teorii zbiorów. Na jakie niebezpieczeństwa można się narazić przez nierozsądne używanie na pozór niewinnych symboli przypominają matematykom nie do końca poskromione paradoksy podminowujące formalną teorię zbiorów. Być może, nawet w matematyce jakość pozostaje i opiera się wszelkiemu sprowadzaniu do zbiorów. Stara nadzieja bourbakistów, by dostrzec, jak wszystkie struktury matematyczne wywodzą się w naturalny sposób z hierarchii zbiorów, ich podzbiorów i ich kombinacji, okazała się bez wątpienia chimerą. Nikt rozsądny nie może się oprzeć wrażeniu, że najważniejsze struktury matematyczne (struktury algebraiczne, topologiczne) pojawiają się jako podstawowe, bazowe dane narzucone przez świat zewnętrzny, a ich nieracjonalna różnorodność znajduje swoje jedyne usprawiedliwienie w otaczającej nas rzeczywistości.

Dodatek

O znaczeniu pola semantycznego i o „zasadzie wyłączania" w geometrycznym modelu znaczenia (signification).

Sposób w jaki w języku potocznym używa się spójników „lub" oraz „i" stawia problemy delikatnej natury; zwyczajową równoważność *lub* $= \cup$, *i* $= \cap$ podważają liczne kontrprzykłady. Najbardziej oczywisty jest następujący: opisując zbiór złożony z psa Azora i jego właściciela Jana, powiemy: Azor *i* Jan a nie Azor *lub* Jan.

Analiza oparta na geometrycznym modelu znaczenia (inspirowana przez model Zeemana czynności psychicznych) pozwoli nam lepiej zrozumieć te mechanizmy.

Geometryczny model znaczenia. W tym modelu zakładamy, że zbiór wszystkich stanów psychicznych osobnika może być reprezentowany przez punkty przestrzeni euklidesowej $U = R^N$ o ogromnej liczbie wymiarów. Każdemu impulsowi zmysłowemu s odebranemu przez osobnika odpowiada pewna transformacja jego stanu psychicznego. Zmianę tę będzie reprezentować ciągły endomorfizm $g_s : U \to U$. Jeśli endomorfizm g_s jest *idempotentny*, tzn. zachodzi $g_s \circ g_s = g_s$, to impuls (s) nazywamy *znaczącym* dla osobnika. Rzeczywiście, gdy mówimy, że „zrozumieliśmy" pewną sytuację, znaczy to, że dalsze badanie tej sytuacji nie zmieni naszego stanu myślowego („zrozumieć" to „uodpornić się")([8]).

([7]) Odpowiada to klasie V w polskim systemie szkolnictwa (*przyp. red.*).

([8]) Zob. René Thom, *Topologie et Signification* L'Age de la Science, vol. I n° 4 1968, str. 219–242. Czytelnik znający mechanikę kwantową zauważy analogię tej definicji z teorią miary zdefiniowanej przez rzut w przestrzeni Hilberta.

Definicja pola semantycznego. Jeśli założymy, że endomorfizm g_s jest różniczkowalny, to obraz $g(U)$ stanowi podrozmaitość w U, na której g_s lokalnie jest projekcją. Taka podprzestrzeń $g(U)$ stanowi na ogół „pole semantyczne", mentalną dziedzinę znaczenia. Ten podzbiór jest spójny — jest to odbicie podstawowej zasady modelu, że nie można myśleć o kilku rzeczach na raz([9]).

Otóż użycie spójników „*i*" oraz „*lub*" prowadzi do paradoksu: zmuszają nas one do myślenia co najmniej o dwóch rzeczach jednocześnie. Użycie spójników stawia nam następujący problem: za pomocą jakiego procesu umysł potrafi związać różne obiekty w jedną całość? Logika nowoczesna sądziła, że potrafi usunąć ten klasyczny problem (patrz *Sofista* Platona) zastępując go opisem wszechświata za pomocą teorii zbiorów. Opis taki, jak pokazaliśmy, ma charakter nierealny i deliryczny.

Spójnik „i". Zbadajmy wpierw kwestię spójnika „*i*" znacznie prostszą niż spójnika „*lub*". Weźmy pod uwagę przypadek gdy „*i*" łączy dwie jakości (gramatycznie reprezentowane przez przymiotniki). W pewnych przypadkach można po prostu usunąć „*i*" bez zmiany sensu.

Przykłady:

Piotr jest wysoki i bogaty,

Piotr jest wysoki, bogaty.

Więc jeśli w zdaniu *A jest X i Y* można opuścić „*i*": *A jest X, Y*, to znaczy, że semantyczny wynik *X i Y* praktycznie równy jest złożeniu endomorfizmów: $g_y \circ g_x$. Skądinąd można bez zmiany sensu przestawić te dwie jakości, a więc projekcje g_y i g_x komutują i $g_y \circ g_x$ jest dalej idempotentem. Implikuje to, że pola semantyczne $g_x(U)$, $g_y(U)$ przecinają się transwersalnie w U. Wyrazimy tę sytuację mówiąc, że pola semantyczne $g_x(U)$, $g_y(U)$ są *niezależne*. Intuicyjnie odpowiada to faktowi, że jakości X i Y należą do niezależnych aspektów rzeczywistości, jak np. jakość fizyczna i jakość moralna.

Może się jednak zdarzyć, że spójnik „*i*" łączy dwie jakości tej samej natury, jak w następującym przykładzie:

Ten sztandar jest niebieski i biały.

W tym przypadku nie można już pominąć łącznika (bez zmiany sensu, *przyp. tłum.*), i nie ma komutowania tych jakości bez spójnika.

Żeby lepiej zrozumieć tę sytuację, konieczne jest dokładniejsze opisanie endomorfizmów g_x odpowiadających jakości X. Załóżmy, że X jest kolorem, na przykład niebieskim. Wówczas endomorfizm g_x rozkłada się na produkt postaci $h_x \circ C$,

---

([9]) W rzeczywistości operator najczęściej jest tylko *projekcją aproksymacyjną*; pomimo to podrozmaitość $g(U)$ istnieje, ale g działa na tej podrozmaitości. Prowadzi to w pewnych przypadkach do rozkładu na relatywnie stałe baseny przyciągań (h_x dla kolorów). W innych przypadkach (jak np. zwykłej przestrzeni R^3) regulacja różnicy g^2-g stwarza lokalną morfologię w $g(U)$. W taki sposób może być interpretowane twierdzenie semantyków (np. Hjemsleva), że każde znaczenie jest *formą* i *treścią*. Treścią jest przestrzeń $g(U)$, formą zaś morfologia indukowana przez g w $g(U)$. W przypadku przestrzeni R^3 morfologia jest materią, zaś g^2-g symuluje prawa mechaniki i fizyki.

gdzie C jest projekcją o obrazie $g(U)$ odpowiadającym trzywymiarowej przestrzeni wrażeń kolorystycznych. h_x jest definiowane na części przestrzeni $C(U)$, na zbiorze Bl złożonym z punktów w $C(U)$, które się zwykle uważa za dające wrażenie niebieskości. Obraz $h_x \circ C$ można wówczas uważać za punkt zbioru Bl, obraz niebieskości, który powstaje w umyśle, gdy słyszymy słowo „niebieski". Na przykład wyrażenie *niebieska żaba* wywołuje stan pewnego niepokoju semantycznego. Powoduje to fakt, że endomorfizm g odpowiadający rzeczownikowi „żaba" ma za obraz pole semantyczne reprezentujące zwykłą przestrzeń trójwymiarową R^3 i w tej przestrzeni mamy akcydens zdefiniowany przez przestrzenną formę żaby. Aby zastosować $g_{\text{niebieski}}$ do tego obrazu, najpierw stosujemy projekcję C(kolor), lecz w przestrzeni kolorów obraz C(żaba) jest zawarty w basenie zieleni bądź w basenie „rudości", na pewno jednak poza dziedziną Bl operatora $h_{\text{niebieski}}$. Superpozycja nie może być zdefiniowana, co powoduje uczucie niepokoju.

Endomorfizmy odpowiadające dwóm kolorom, na przykład niebieski, biały, faktoryzują się $g_{\text{niebieski}} = h_{\text{niebieski}} \circ C$, $g_{\text{biały}} = h_{\text{biały}} \circ C$. Oba one należą do pola semantycznego kolorów zdefiniowanego przez endomorfizm C. Zdanie *ten sztandar jest niebieski i biały* interpretuje się wówczas w następujący sposób: umysł może zastosować „jednocześnie"([10]) operatory $h_{\text{niebieski}}$ i $h_{\text{biały}}$ do obrazu C(ten sztandar). Zdanie to wyraża więc fakt, że obraz ten jako całość jest pokryty przez dziedziny operatorów $h_{\text{niebieski}}$ i $h_{\text{biały}}$. Tutaj końcowe „punkty przyciągania" („attracteurs") operatorów $h_{\text{niebieski}}$ i $h_{\text{biały}}$ są rozłączne i już nie przecinają się. To tłumaczy fakt, że implikacja: ten sztandar jest niebieski i biały $\Rightarrow$ ten sztandar jest biały jest fałszywa, gdyż dziedzina operatora $h_{\text{biały}}$ nie pokrywa całości obrazu C(ten sztandar).

Podsumowując:

Jeśli zdanie: *A jest X i Y* ma sens, to możliwe są dwa przypadki:

(i) Spójnik *i* można pominąć bez zmiany sensu, wówczas X i Y są jakościami z *niezależnych pól semantycznych*,

(ii) Spójnik *i* nie może być pominięty: wówczas A jest pojęciem „rozległym" (rozległym przestrzennie w zwykłej przestrzeni, bądź w odpowiedniej przestrzeni semantycznej). Jakości X i Y należą do tego samego pola semantycznego, zdefiniowanego przez projekcję C: $g_x = h_x \circ C$, $g_y = h_y \circ C$, gdzie C może być nieciągłe na rozległym obrazie g_A, a obraz $C(A)$ jest zawarty w sumie dziedzin operatorów h_x i h_y([11]).

([10]) W rzeczywistości, zgodnie z poniżej podanym modelem, umysł opisuje projekcję oscylującą i zmienną, gdzie $h_{\text{niebieski}}$ i $h_{\text{biały}}$ są punktami ekstremalnymi tej oscylacji.

([11]) Fenomen ten spowodowany jest „lokalnym" charakterem pola semantycznego przestrzeni: przyjmujemy w rzeczywistości, że dwa zjawiska jednocześnie zlokalizowane w odległych punktach nie mają na siebie wpływu. Ponieważ umysł nie może myśleć o wszystkich polach lokalnych jednocześnie, będzie istnieć wśród nich jedno uprzywilejowane, centralne, które może przebiegać całe pole w zależności od potrzeb. W polu widzenia, pole centralne jest anatomicznie realizowane przez „fovea" siatkówki, a przebieganie pola zapewnione jest przez rotację oczu.

Spójnik „lub". Teraz zajmijmy się spójnikiem *lub*. Zdanie *A jest X lub Y*, gdzie *X* i *Y* są jakościami, może mieć sens tylko jeśli *X* i *Y* są jakościami z tego samego pola semantycznego.

Rzeczywiście, jeśli wyrażenie *X lub Y* ma sens, to jest ono zdefiniowane przez endomorfizm idempotentny g, którego obraz musi być topologiczną sumą obrazów $g_x(U)$, $g_y(U)$; lecz jeśli *X i Y* ma sens tak jak w punkcie (i) powyżej, to $g_x(U)$ i $g_y(U)$ są rozmaitościami, które przecinają się transwersalnie. Więc $g_x(U) \cup g_y(U)$ nie może być rozmaitością gładką i nie może być obrazem projekcji. Więc jeśli *X i Y* ma sens (przypadek (i)) to *X lub Y* nie może mieć sensu.

Więc *X lub Y* ma sens tylko gdy przecięcie rozmaitości $g_x(U) \cap g_y(U)$ jest puste. Odpowiada to przypadkowi, w którym jakości *X*, *Y* wykluczają się, a więc gdy należą do tego samego pola semantycznego([12]).

Zdanie twierdzące: *A jest X lub Y* może mieć sens tylko wtedy, gdy *X* i *Y* są jakościami „przyległymi" w ich wspólnej dziedzinie semantycznej: *Jan jest brunetem lub szatynem* znaczy, że kolor włosów Jana należy do części wspólnej kolorów włosów zdefiniowanych przez jakości brunet i szatyn w dziedzinie semantycznej. Spójnik „lub" ma w tej przestrzeni wydźwięk zbliżony do przyimka „*pomiędzy*" w zwykłej przestrzeni([13]): ustala on próg pomiędzy basenami dwóch przyciągań *X*, *Y*.

„Lub" a pytanie. Gdy *X*, *Y* nie są jakościami przyległymi wyrażenie *X lub Y* ma sens co najwyżej w zdaniach pytających lub wątpiących. Aby ustalić próg między odległymi basenami konieczne jest „ożywienie" wyrażenia, podniesienie jego „potencjału semantycznego".

Na przykład: zdanie twierdzące:

Piłka, którą zgubiłaś rano, była czerwona lub niebieska

jest nieco dziwaczne.

W formie pytającej jest ono całkiem normalne:

Czy piłka, którą zgubiłaś rano, była czerwona lub niebieska?

Pytająca transformacja zdania w efekcie wywołuje u słuchacza stan semantycznie niestały, „pobudzenie" („excitation"), którego naturalnym wynikiem jest danie odpowiedzi na pytanie.

Jeśli *X*, *Y* są jakościami z niezależnych dziedzin semantycznych, wówczas wyrażenie *X lub Y* nie ma sensu nawet w formie pytającej:

Czy Piotr jest niski lub inteligentny?

jest dziwaczne.

Widzimy więc, że przeciwnie do powszechnego poglądu, w przestrzeni semantycznej *i* oznacza *sumę* dziedzin, *lub* — ich *przecięcie*. Z tego punktu widzenia nie

---

([12]) Pomijamy tu przypadek gdy $g_x(U)$ jest zawarte w $g_y(U)$: na przykład gdy *X* = niebieski, *Y* = kolorowy. W tej sytuacji ani *X lub Y* ani *X i Y* nie mają sensu.

([13]) Mówi się przecież: wybierać *pomiędzy* wyrażeniami alternatywy.

ma różnicy pomiędzy zwykłą przestrzenią jakości semantycznych (w „genetycznej" teorii formacji umysłowej można przyjąć, że różne przestrzenie semantyczne wynikają z reprezentacji zwykłej przestrzeni R^3 poprzez proces dyferencjacji, stopniowego rozwarstwienia([14])).

Alternatywa włączająca i alternatywa wyłączająca. Klasycznie rozróżniamy w użyciu „*lub*" *alternatywę włączającą* (łacińskie *vel*) i *alternatywę wyłączającą* (łaciński *aut*). Jednak należy zdać sobie sprawę, że ani w łacinie, ani w języku francuskim nie istnieje prawdziwa alternatywa włączająca. Klasyczne użycie *vel* odpowiada mentalnie procesowi kolejnych przybliżeń; drugi wyraz alternatywy jest przedstawiony jako lepsze przybliżenie pierwszego: *Melius vel optime* (Ciceron): *Lepiej lub raczej najlepiej.* W tym przypadku użycie „*lub*" przypomina zdanie (3): *Jan jest brunetem lub szatynem.* Tutaj również nie było ścisłej przemienności jakości (*szatyn* — było lepszym niż *brunet* przybliżeniem koloru włosów Jana).

Streszczając nasze rozważania: doszliśmy do wniosku, że wyrażenie *X lub Y*, gdzie *X*, *Y* są jakościami, ma sens tylko wtedy, gdy *X* i *Y* należą do tego samego pola semantycznego, *X lub Y* może występować w zdaniu twierdzącym tylko wówczas, gdy *X* i *Y* są jakościami bliskimi w polu semantycznym; w zdaniu pytającym *X*, *Y* mogą być dowolnymi jakościami tego samego pola.

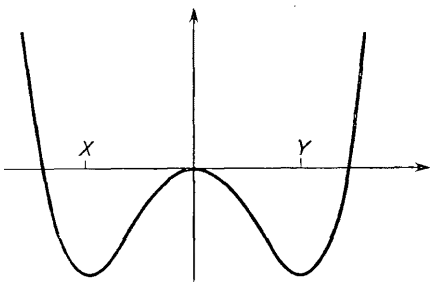
„Zasada wyłączania": *X lub Y*, *X i Y* nie mają sensu jednocześnie, dopuszcza jeden wyjątek: jest to przypadek, gdy podmiot jest pojęciem rozciągniętym w przestrzeni, *i* ma wówczas znaczenie bliskości przestrzennej.

Dynamiczny model „zmieszań". Jak zostało wyżej powiedziane, w przestrzeni semantycznej *lub* daje efekt ustalania progu pomiędzy basenami przyciągania *X* i *Y*. Jest to to samo co wzięcie ich części wspólnej. Natomiast *i* tworzy topologiczną sumę basenów. Nie należy brać dosłownie tego stwierdzenia. W rzeczywistości rozbijanie przestrzeni semantycznej na baseny przyciągania jest na ogół kontrolowane przez mechanizm dynamiczny, który ma względnie prosty model algebraiczny (na przykład minima potencjału). Tworzenie „zmieszań" takich, jak *X lub Y*, lub *X i Y* odpowiada wówczas procesowi dynamicznemu, który można opisać jako jednoczesne i rezonujące wzbudzenie oscylatorów związanych z minimami potencjału *X* i *Y*.

Dwie jakości z jednego pola semantycznego w rzeczywistości są zawsze przyległe, ale wysokość progu, który oddziela baseny definiuje semantyczną odległość tych jakości.

([14]) Jest możliwe, że to wydzielanie pól semantycznych z prymitywnego pola przestrzennego jest rządzone przez ten sam schemat dynamiczny, który rozgranicza różne przyciągania (attracteurs) samego pola semantycznego: inaczej mówiąc, różne pola semantyczne tworzą się jako elementy przyciągania pewnego „hiperpola". Te hiperpola nie istnieją już w normalnej świadomości, lecz pod wpływem czynników patologicznych (gorączka, narkotyki ...) mogą się one wyjątkowo na nowo ujawnić w braku rozróżniania (dadifferenciation). To właśnie nazywamy „delirium".

Podamy tu geometryczny, jednowymiarowy model tej sytuacji. Załóżmy że naszą przestrzenią semantyczną jest oś Ox. Na tej osi mamy zadany potencjał semantyczny zdefiniowany przez krzywą o dwóch minimach X, Y ($X = -1$, $Y = +1$) typu funkcji $V = x^4 - 2x^2$.



Wyobraźmy sobie, że punkt materialny m porusza się w zagłębieniu potencjału zdefiniowanym przez funkcję V. Jeżeli energia kinetyczna punktu w minimum jest mniejsza od wysokości progu, to punkt pozostaje uwięziony w jednym z basenów X lub Y. Jeśli zwiększymy tę energię, to punkt może osiągnąć, a nawet przekroczyć próg pomiędzy basenami. Jednak gdy energia kinetyczna h nieznacznie tylko przewyższa energię konieczną do przejścia ponad progiem, wówczas prędkość poruszania się w sąsiedztwie progu będzie bardzo mała tak, że punkt pozostanie przez znaczny okres w pobliżu progu (dużo dłużej niż przez okres konieczny do oscylacji w zagłębieniach X i Y). W termodynamice odpowiada to *stabilizacji progu* pomiędzy X, Y. Jednak jeżeli energia kinetyczna wzrośnie, to powyższy efekt będzie zanikał, a punkt ruchomy będzie dążył do ergodycznego wypełnienia sumy zagłębień potencjału. Pierwsza sytuacja, gdy m miał małą energię odpowiada „zmieszaniu" *X lub Y*. Drugi zaś, tzn. gdy energia była duża, odpowiada „zmieszaniu" *X i Y*. Jeśli taki model jest poprawny, to można w sposób ciągły przejść ze zmieszania *X lub Y* do zmieszania *X i Y*, wzbudzając oscylator.

Być może taki model tłumaczy fakt, zadziwiający dla naszego sposobu myślenia kształtowanego od tysiącleci przez logikę, że istnieją języki, w których użycie *lub* i *i* jest zastąpione jednym tylko spójnikiem. Dalsze rozróżnienie między *lub* a *i* zadane jest przez dołączenie określeń typu: jeden tylko, oba naraz([15]).

Jak więc widzieliśmy, potoczne użycie spójników *lub* i *i* ma tylko odległy i delikatny związek z operacjami $\cup$, $\cap$ w logice i topologii. Dziwić się temu mogą jedynie neurofizjolodzy na tyle naiwni, by sądzić, że mózg ludzki jest tylko zbiorem obwodów nerwowych podobnych do obwodów maszyny elektronicznej realizującej, operacje $\cup$ i $\cap$ w kodzie dwójkowym.

([15]) W jednym z języków samojedzkich, patrz R. Jacobson, *Essays de Linguistique General*, str. 82, Editions de Minuit, Paryż.