wmptm 1897

RÉNÉ THOM (Bures-sur-Yvette)

Czy istnieje matematyka nowoczesna?(1)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Przyszły historyk matematyki będzie z pewnością zdumiony rozmiarem, jaki osiągnął w latach sześćdziesiątych ruch zwany matematyką nowoczesną. Wydaje się, że obecnie ruch ten doszedł do swego zenitu i można zauważyć pierwsze oznaki odpływu, objaw zdrowej reakcji. Chciałbym dać — może nieco przedwczesne — podsumowanie, przedstawić to, co z tego ruchu powinno być utrwalone, co ustawione na właściwym miejscu, a co zwyczajnie i po prostu wyeliminowane. Jest rzeczą zbędną, by w takiej dyskusji jak ta ukrywać istnienie uprzedzeń, zajmowanie stanowiska subiektywnego, które nie może nie wpłynąć na nasz osąd. Bowiem nie chodzi tu o naukę, ani nawet o technikę pedagogiczną, lecz o dziedzinę, w której wrażliwość osobista matematyka musi odegrać zasadniczą rolę. Jedynie umysły dogmatyczne (a takich nie brak wśród „modernistów") mogą wierzyć, że w tych zagadnieniach istnieje jakaś prawda dająca się logicznie ustanowić i przed którą należy koniecznie się ukorzyć. Rozumiem zatem ten wykład jako mowę obrończą, którą należy włączyć się do dyskusji, a nie jako dowód, o którym dobrze wiadomo, że nie istnieje.

»Matematyka nowoczesna« ma bardzo złożone pochodzenie i skład. Można powiedzieć, z grubsza, że stawia sobie ona dwa podstawowe cele:

1° *Odnowa pedagogiczna nauczania matematyki.*

Zarzuca się nauczaniu tradycyjnemu dydaktyzm, a nawet dogmatyzm, szczególnie odczuwalny, jak się nas zapewnia, w nauczaniu geometrii euklidesowej. Proponuje się zastąpić go nauczaniem mniej dyrektywnym, bardziej swobodnym, bardziej konstruktywnym, zorientowanym przede wszystkim na heurystykę i tego rodzaju, by pobudzało więcej zainteresowania i aktywności indywidualnej ucznia.

2° *Unowocześnienie programów.*

Skoro matematyka, jak się nam mówi, poczyniła ogromne postępy od czasów Cauchy'ego, nie jest rzeczą normalną, by w wielu krajach również programy nie uwzględniały tego stanu rzeczy. W szczególności wprowadzenie do nauczania wielkich »struktur« matematycznych upraszcza nauczanie, ponieważ ukazuje uniwersalne schematy, które rządzą myślą matematyczną.

Zauważmy, że żaden z powyższych dwu celów nie jest, właściwie mówiąc, ani »nowoczesny« ani nawet nowy. Troska o heurystyczny czy twórczy sposób nauczania matematyki nie datuje się od wczoraj. Powstała ona na tle pedagogiki Rousseau i można by powiedzieć bez żadnej przesady, że współcześni pedagodzy mo-

(1) Przekład artykułu *Mathématiques modernes et mathématiques de toujours*, którego tłumaczenie pt. *Modern mathematics: does it exist?* opublikowane zostało w *Developments in Mathematical Education, Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education*, University Press, Cambridge 1973, str. 194–209 (*przyp. red.*).

gliby w dalszym ciągu czerpać natchnienie z heurystycznej lekcji, którą dał Sokrates w dialogu platońskim małemu niewolnikowi Menona. Jeśli zaś chodzi o postęp w matematyce, który wymagałby zmiany programów, to wystarczy zwrócić uwagę na zakłopotanie i niezdecydowanie teoretyków modernistycznych przed postawieniem daty rzekomej rewolucji w matematyce, na którą tak chętnie się powołują: czy Ewaryst Galois — twórca teorii grup, czy Weierstrass — ojciec ścisłości w analizie, czy Cantor — twórca teorii zbiorów, czy Hilbert — twórca aksjomatyki podstaw geometrii, czy Bourbaki, który systematycznie prezentuje matematykę nowoczesną? Tyle nazwisk zacytowanych na chybił-trafił i bez wielkiej dokładności teoretycznej, by usprawiedliwić modernizację programów..

Nie można odmówić celom 1° i 2° pewnej wartości. Nie można jednak oczekiwać absolutnego osiągnięcia któregoś z tych celów. Nie będę długo dyskutował celu 1° (odnowa pedagogiczna): nie czuję się kompetentny w pedagogice. Trudno mi w tym widzieć coś więcej niż sztukę. Ograniczę się zatem w tej dziedzinie do argumentów prostego, zdrowego rozsądku.

Chcąc zapewnić sobie pełny udział ucznia w prowadzonych badaniach, nauczyciel powinien brać pod uwagę w każdej chwili jego reakcje, by móc kierować postępowaniem swoim i ucznia. W formie idealnej jest to możliwe tylko wtedy, gdy nauczyciel i uczeń są ze sobą sam na sam; jest to zresztą sytuacja z cytowanego wyżej dialogu Platona. Z chwilą, gdy nauczyciel ma jednocześnie kilku uczniów, nie może on brać pod uwagę reakcji, często rozbieżnych, wszystkich swoich uczniów i zmuszony jest pominąć niektóre z nich. Jeszcze jeden krok, a troska o skuteczność nauczania doprowadzi go do przyjęcia postawy przewodnika, a wkrótce doprowadzi do nauczania *ex cathedra*. Ponadto wysiłki w kierunku swobodniejszej pedagogiki są z konieczności kosztowne: wymagają one większej liczby nauczycieli, i to nauczycieli lepiej wykształconych, o większej indywidualności. Społeczeństwo będzie zmuszone narzucić na te wysiłki nieuchronne ograniczenia budżetowe. Zresztą, robić teorię twórczości matematycznej jest, praktycznie rzecz biorąc, sprzecznością już w samej terminologii, ponieważ nic nie nadaje się mniej do ujęcia w przepisach lub receptach, jak twórcza oryginalność. Z chwilą, gdy używa się podręcznika — ustala się dydaktyzm lub akademizm, nawet jeśli podręcznik był napisany tak, by pobudzać twórczość indywidualną. Cóż stąd można wywnioskować innego, niż to, że wysiłki w kierunku odnowy pedagogicznej nie mają nigdy być zakończone?

Punkt 2° (modernizacja programów) wydaje się również bardzo usprawiedliwiony. Zauważmy jednak, że pomimo ostatniego postępu naszej cywilizacji technicznej, etapy rozwoju (fizycznego czy umysłowego) małego dziecka nie zmieniły się. Istnieje w dalszym ciągu pewna konieczna faza wprawiania się, pewne więzy genetyczne, które należy respektować, aby nauczyć się chodzić, mówić, czytać, pisać i nie wydaje się, aby postęp w psychologii mógł zmienić w czymkolwiek normalny kalendarz regulujący nabywanie tych umiejętności. I dlatego mamy prawo zapytać, czy podobne ograniczenia nie wchodzą w grę przy opanowywaniu matematyki. Gdyby tak było, nadzieja na przyspieszenie opanowania wielkich

teorii matematycznych przez całkowitą zmianę programów czy metod mogłaby okazać się iluzoryczna. Otóż nie podlega dyskusji, że wielu „modernistów" wyrażało taką nadzieję i podtrzymywało te iluzje.

Osobiście wierzę, że owe więzy genetyczne istnieją, że tworzą one część integralną temperamentu, indywidualności ucznia i wielu uczniów (prawdopodobnie większość dzieci rozpoczynających szkołę średnią) z tego powodu nie potrafi pojąć matematyki na poziomie elementów rachunku różniczkowego, co miało być celem osiągniętym przed rozpoczęciem nauki na etapie wyższego nauczania naukowego. I dlatego nie jest oczywiste, że postęp w nauce ma koniecznie znajdować odbicie w programach, szczególnie na poziomie szkoły podstawowej czy średniej.

Lecz przyjmijmy na razie zasadność punktów 1° i 2° wziętych każdy z osobna. Pozycja modernistyczna utrzymuje, że jest możliwa synteza obu tych celów, i to jest właśnie najdziwniejsze i najbardziej sporne. Podano dwa argumenty na rzecz tej syntezy:

(i) Pierwszy argument jest natury taktycznej; słyszałem go, gdy był wypowiadany „in petto" przez modernistów francuskich i nie wiem czy można uważać, że wyraża on ogólne stanowisko modernistów w skali światowej. Aby przeprowadzić reformę pedagogiczną należy złamać bezwład i rutynę nauczających. W tym celu należy zmienić programy; zmieniając przedmiot łatwiej będzie zmienić metody.

Ten argument taktyczny mógłby okazać się słuszny dopiero wówczas, gdyby nowe przedmioty wprowadzone do nauczania faworyzowały pedagogikę konstruktywną i heurystyczną. Otóż, właśnie moderniści (przynajmniej ci z kontynentu europejskiego) przez swoje uprzedzenia filozoficzne doprowadzeni zostali z jednej strony do opuszczenia idealnego terenu wprawiania się w pracy badawczej, tej niewyczerpanej kopalni, jaką jest geometria euklidesowa, z drugiej zaś do zastąpienia jej przez ogólne struktury mnogościowe i logiczne, czyli przedmiot uboższy, najbardziej pusty i sprawiający największy możliwy zawód intuicji.

(ii) Drugi argument jest poważniejszy. Psychopedagodzy, zdając sobie sprawę z niejasności swego stanowiska doktrynalnego, uwierzyli, że znaleźli klucz do swych kłopotów w twierdzeniach logików i matematyków formalistycznych. Ponieważ okazało się, że postęp myśli matematycznej był modelowany przez takie wielkie schematy formalne, jakimi są struktury mnogościowe, logiczne, algebraiczne, topologiczne — wystarczy nauczyć dziecko we wczesnym wieku definicji i stosowania tych struktur, aby w ten sposób jak najbardziej ułatwić mu dostęp do współczesnych teorii matematycznych.

Argument ten zasługuje na wnikliwą dyskusję; pod przekonywającymi pozorami jest to w rzeczywistości podstawowy błąd psychologiczny, z powodu którego całkowicie chybiają wszystkie zakusy modernistyczne.

Rzeczywiście, trzeba zauważyć, że większość owych wielkich struktur abstrakcyjnych: teoria zbiorów, rachunek Boole'a, struktury topologiczne, jest już w ukrytej formie obecna w psychice dziecięcej, kiedy w nauczaniu przedstawia się je w formie rozwiniętej. (Jeśli chodzi o struktury algebraiczne, to wypadałoby nie być tak kategorycznym: niektóre, jak struktura grupy istnieją w formie ukrytej, inne,

jak struktura pierścienia czy ciała, są znacznie bardziej sztuczne). Każdy argument modernistyczny opiera się ostatecznie na następującym postulacie: wyraźnie ujawniając i przedstawiając ukryte mechanizmy myślenia, ułatwia się je dziecku.

Otóż powstaje tu wielki problem psychopedagogiki, który wcale nie jest osobliwością tylko matematyki. Spotkać go można na przykład w nauczaniu języków żywych: czy należy uczyć dziecko języka obcego systemem książkowym, wpajając mu gramatykę i słownictwo danego języka — czy też, przeciwnie: uczyć bezpośrednio tego języka przez używanie, tak jak uczyłoby się w sposób naturalny dziecko wprowadzone w obce wspólnoty językowe? Odpowiedź nie jest łatwa, jednak z punktu widzenia skuteczności, metoda bezpośrednia często zasługuje na pierwszeństwo. We wczesnym rozwoju małego dziecka wiedza sformułowana w sposób wyraźny i dedukcyjny — nie odgrywa żadnej roli. W nauce chodzenia znajomość anatomii nogi byłaby bardziej szkodliwa niż użyteczna, a to że poznało się anatomię układu trawiennego — nie pomoże w trawieniu zbyt ciężkiego posiłku.

Z pewnością zarzuci mi się, że podaję tu przykłady bardzo prymitywne, nie mające nic wspólnego z tą tak wysoce racjonalną działalnością, jaką jest myśl matematyczna. Ale zarzut taki oznaczałby pomijanie faktu, że sam rozum ma u człowieka korzenie biologiczne, oraz że myśl matematyczna powstaje wskutek umysłowej potrzeby modelowania rzeczywistości zewnętrznej. Powrócimy do tego punktu później.

Innego przykładu, dosyć typowego, przejścia od spraw ukrytych do wyraźnych dostarcza nam psychoanaliza, która z tego przejścia od podświadomości do świadomości chciała uczynić zasadnicze narzędzie terapii. W tym przypadku rezultaty w leczeniu zaburzeń psychicznych przyniosły, jak się okazało, rozczarowanie. Sama znajomość freudowskiej teorii pomyłek nie potrafi powstrzymać od popełnienia, przy okazji, takiegoż „freudowskiego" lapsusu...

Ponadto, to często niepotrzebne przejście od ukrytego do wyraźnego może być szkodliwe. Czasami uczeń nie może znaleźć związku między pewną czynnością umysłową tkwiącą już w jego umyśle a podawanym mu jej symbolicznym opisem abstrakcyjnym (szczególnie jeśli przedstawienie to przesiąknięte jest duchem formalizmu). W tym przypadku takie nauczanie pozostanie dla niego martwą literą. Czasami dziecko podejrzewa istnienie takiego związku nie dochodząc jednak do jasnego ujęcia go. W tym przypadku podsunięcie mu wyraźnej formalnej definicji tej czynności umysłowej, która zupełnie skutecznie funkcjonowała aż dotąd bez teorii, może zaburzyć tę czynność. Podobnie jak ci skrupulatni osobnicy, którzy ciągle wahają się mówiąc językiem obcym, ponieważ zbyt dobrze znają jego gramatykę i boją się popełniać błędy.

W końcu nie należy sądzić, że znajomość standardowych struktur daje wiedzę o matematyce; przeciwnie, struktury te reprezentują matematykę jedynie bardzo powierzchownie. Kiedy biolog pragnie badać fizjologię chodzenia, jego uwaga kieruje się natychmiast na tak uderzające struktury, jakimi są kości i stawy, ale zaniedba, z powodu niepełnego zrozumienia, wszystkie aspekty funkcjonalne zwią-

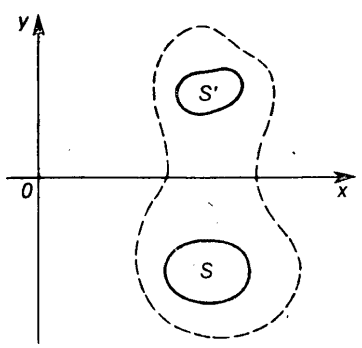
zane z synchronizacją skurczu mięśni, efekty mechaniczne składające się na ogólną równowagę, układy nerwowe, które nią rządzą etc. W ten sposób nasza analiza rozwoju myśli ujawnia jedynie najgrubsze wiązanie procesu rozumowania, zaniedbując subtelne wzajemne oddziaływanie wynikające z sensu, znaczenia, które z trudem daje się wyrazić czy sformalizować. Te grube wiązania są właściwą dziedziną logiki, rachunku zdań. Odpowiada to strukturze „powierzchniowej", jak to się mówi w lingwistyce. W języku potocznym jest ona stale zachwiana, załamywana przez wymogi „głębokich" struktur znaczeniowych (patrz przykłady, które podałem w artykule [2]). Oczywiście, w zasadzie mamy inną sytuację w matematyce, gdzie kombinatoryczne reguły struktur nie tolerują wyjątków. Ale i to nie jest tak wyraźne: paradoksy teorii mnogości pochodzą najwidoczniej stąd, że nie chce się dopuszczać wyjątków od prawomocności pewnych aksjomatów, a w zwykłej matematyce wyjątek realizuje się przez skok do nieskończoności i ciągłości (por. to, co jest powiedziane w [2] o „odlepianiu semantycznym").

Ale wróćmy do naszego problemu: czy warto przekształcać w wyraźnie sformułowaną wiedzę mechanizm, który tkwi w formie niejawnej w umyśle? Przed postawieniem pytania, czy takie przekształcenie jest pożyteczne, trzeba zapytać, czy jest ono możliwe. W jaki sposób jednostka myśląca może oddzielić się od swojej myśli, obserwować ją w sposób abstrakcyjny, niezależnie nawet od samej treści myśli? Oczywiście to oddzielenie jest konieczne dla postępu matematycznego; ale operacja odwrotna, którą jest powrotne wchłonięcie przez to, co ukryte tego, co wyraźne, jest nie mniej ważne i nie mniej konieczne. Ten drugi etap sprowadza się do traktowania klas równoważności jako „egzystencje", jako pełnoprawne obiekty, które należy pojmować globalnie. Klasy te są uzyskane abstrakcyjnie przez uprzedni proces wyraźnego wydzielania, co odpowiada temu, co logicy nazywają „wymogiem ontologicznym" dla rozważanej operacji. Otóż wszystko wskazuje na to, że owa operacja „oddzielania się", to rozwarstwianie pola semantycznego nośnika działalności umysłowej, które chce się wyabstrahować — jest możliwe jedynie wtedy, gdy objekt zrodzony przez tę operację abstrahowania jest uznany za nośnik pewnej wartości stałej, tj. „znaczenie" równie silne jak to, które przyznaje się elementom pierwotnym. Zilustrujmy te trudne rozważania przykładem: można zdefiniować abstrakcyjnie liczbę wymierną jako klasę równoważności relacji między parami liczb całkowitych: $(p, q) \sim (p', q')$ wtedy i tylko wtedy, gdy $pq' = p'q$. Ale definicja ta będzie miała sens dopiero wtedy, gdy udowodni się, że tak zdefiniowana klasa równoważności zachowuje się jak liczba wymierna, że zachowuje wszystkie własności jej działań (a nawet więcej, gdyż dzielenie przez liczbę wymierną różną od zera jest zawsze możliwe) i że ponadto zbiór tych nowych liczb zawiera w sposób naturalny zbiór liczb całkowitych, z których się wyszło. W ten sposób własność istnienia, którą jako punkt wyjścia przyjęto dla liczb całkowitych, przysługiwać będzie również liczbom wymiernym, które je zawierają. Kiedy się jasno pojmie, że jest to rezultat procesu abstrahowania, który usprawiedliwia abstrakcję i umożliwia ją, widzi się, jak bardzo przedstawienie formalne i aksjomatyczne jest przeciwne naturalnemu porządkowi rzeczy. We właściwej pedagogice wprowadza się

nowe koncepcje i pojęcia przez używanie ich; formułuje się reguły działania między nimi a elementami pierwotnymi, których istnienie zostało założone i oswaja się z nimi przez manipulowanie tymi regułami. Dopiero potem można podać definicję abstrakcyjną, która pozwala na sprawdzenie rozszerzonej w ten sposób teorii. Matematyka, nawet w swojej najbardziej wypracowanej formie, nigdy inaczej nie postępowała (oprócz być może pewnych otrzymywanych w banalny sposób uogólnień teorii algebraicznych).

Profesor Piaget w swoim artykule napisanym na ten Kongres świetnie przedstawił proces wydobywania świadomych struktur ze schematów nieświadomej działalności: nazywa on to procesem „abstrakcji refleksyjnej". Niemniej jednak twierdzi on, że nauczanie w formie wyraźnej wielkich struktur abstrakcyjnych stworzonych przez matematykę współczesną jest bardzo skutecznym czynnikiem ułatwiającym ten proces. Czy mogę powiedzieć, że tu psycholog wydaje się mieć zbyt wielkie zaufanie do formalizmu matematycznego? I że obdarza on dedukcyjne, abstrakcyjne myślenie siłą, której nie może ono mieć w umyśle dziecka?

Spróbujmy wyobrazić sobie ów proces „abstrakcji refleksyjnej" geometrycznie: przedstawmy zbiór działań ludzkich (sensomotorycznych i umysłowych) jako płaszczyznę Oxy i przypuśćmy, że górna płaszczyzna $y > 0$ reprezentuje część świadomą tych działań, a płaszczyzna dolna $y < 0$ — część nieświadomą. Schemat S aktywności nieświadomej będzie reprezentowany przez formę geometryczną (S) w półpłaszczyźnie dolnej. Abstrakcja refleksyjna polega na tworzeniu z (S) będącego



emanacją S formy (S') w półpłaszczyźnie świadomej $y > 0$: (S') jest pewnego rodzaju obrazem zwierciadlanym (S), ewentualnie zubożonym i oczyszczonym. Ten proces tworzenia „świadomego potomka" S' ze struktury macierzystej S jest w każdym punkcie analogiczny do procesu reprodukcji biologicznej, w którym istota żywa wytwarza izomorficznego z nią potomka. Gdy proces ten trwa, to zawsze na początku formuje się w S zalążek S', który po osiągnięciu dojrzałości oddziela się od S. Jest to, jak wskazuje nazwa, prawdziwe „poczęcie", które pozwala na tworzenie się S' wychodząc z S. Zadaniem pedagoga jest doprowadzić ten zarodek do dojrzałości i w odpowiednim momencie oddzielić go od struktury macierzystej

nieuświadomionej, która go tworzy. Jest to zadanie położnika — jak mówił Sokrates. Ale, w tej analogii, wielkie struktury abstrakcyjne logiki, jak pojęcie relacji równoważności, silne środki abstrakcji, mocno przypominają brutalne narzędzia ingerencji chirurgicznej jak kleszcze czy cesarskie cięcie. Jeśli zastosuje się cesarskie cięcie przedwcześnie, nie będzie dziecka i ryzykuje się zabiciem matki. Jeśli, przeciwnie, pozwoliło się dziecku rozwijać się, dojrzewać, dostarczając mu odpowiedniego środowiska pokarmowego, oddzielenie od struktury-matki odbędzie się samo z siebie, w sposób naturalny i bez pomocy tych silnych i nieczułych narzędzi, jakimi są abstrakcyjne pojęcia logiki. Nasi ojcowie (a faktycznie i matematycy mojego pokolenia) nie znali „matematyki nowoczesnej" i nie przeszkodziło im to nauczyć się matematyki i to, nie waham się powiedzieć, w sposób bardziej *naturalny* niż w przedstawieniu nowoczesnym. Dać dojrzeć zarodkowi, to w istocie rzeczy doprowadzić go stopniowo do świadomości, a zatem nadać mu sens, *znaczenie* bądź operacyjne, bądź koncepcyjne. Temu to pierwszoplanowemu zadaniu przeniesienia nań istnienia w świecie umysłowym powinien poświęcić się nauczyciel.

Prawdziwym problemem, jakiemu musi stawić czoło nauczanie matematyki, nie jest problem ścisłości, lecz problem rozwoju „znaczenia", „istnienia" przedmiotów matematycznych.

Formalizacja, aksjomatyka i ścisłość. To doprowadza mnie do zajęcia się zawołaniem bitewnym modernistów Europy kontynentalnej: ścisłość i aksjomatyka. Wiadomo, że możliwość ustawienia matematyki na ściśle formalnym fundamencie została nieodwracalnie obalona przez twierdzenie Gödla. Nie wydaje się jednak, by matematycy, w swojej zawodowej działalności, bardzo cierpieli z powodu tej sytuacji. Dlaczego? Dlatego, że w praktyce myśl matematyczna nigdy nie jest sformalizowana. Matematyk nadaje sens każdemu zdaniu, co pozwala mu zapomnieć, jakie jest miejsce tego zdania w jakiejkolwiek istniejącej sformalizowanej teorii. Sens nadaje temu zdaniu statut ontologiczny, niezależny od jakiejkolwiek formalizacji. Wierzę, że można z całym spokojem twierdzić, że jedynymi procedurami formalnymi w matematyce są rachunki: numeryczny i algebraiczny. Czy można jednak redukować matematykę do rachunków? Z pewnością nie. Nawet gdy zajmujemy się wyłącznie rachunkami, poszczególne kroki rachowania muszą być wybrane spośród wielkiej liczby możliwości. Jedynie interpretacja intuicyjna wielkości, jakimi się manipuluje, pozwala kierować tym wyborem. Zatem silny akcent położony przez modernistów na aksjomatykę jest nie tylko zboczeniem pedagogicznym (co jest dosyć widoczne), lecz również matematycznym.

Nie wyciągnięto, sądzę, z aksjomatyki hilbertowskiej prawdziwej lekcji, która z niej wypływa; oto ona: osiągnięcie absolutnej ścisłości jest możliwe tylko przez eliminację znaczenia. Ale jeśli będę miał wybierać między ścisłością a sensem, to wybiorę bez wahania sens. Takiego właśnie wyboru dokonywano zawsze w matematyce, gdzie operuje się zawsze w sytuacji na pół sformalizowanej metajęzykiem, który jest językiem potocznym, a więc niesformalizowanym. I cały świat matematyczny zadowala się tą sytuacją i nie wymaga lepszej.

Zresztą, bardzo prawdopodobnie, przeceniło się znaczenie ścisłości w matematyce. Ze wszystkich dyscyplin naukowych, matematyka jest tą, w której ścisłość jest *a priori* najmniej potrzebna. Kiedy matematyk *X* publikuje dowód jakiegoś twierdzenia, jego czytelnik *Y* jest w stanie skontrolować jego stwierdzenia. Może powiedzieć: nie rozumiem takiego a takiego punktu, ten lemat wydaje mi się niejasny, w tamtym rozumowaniu jest luka, lub też: dowód wydaje mi się prawidłowy i przekonał mnie. Przeciwnie, w dyscyplinach doświadczalnych sytuacja jest zupełnie inna: jeśli pewien eksperymentator prezentuje wynik doświadczeń zrobionych w swoim laboratorium, to może on podać mi wszelkie żądane szczegóły dotyczące postępowania, wszelkie wymagane gwarancje statystyczne dotyczące rezultatów numerycznych, nie mam jednak żadnej możliwości sprawdzenia prawdziwości tego, co mówi, i zmuszony jestem zaufać mu. Stąd wynika, że błąd jest ostatecznie zaniedbywalnym zjawiskiem ewolucji matematyki. Jest on częściej szczęśliwym przypadkiem dla rozwoju jakiejś teorii niż katastrofą, która wykoleja naukę z jej normalnego kursu. Błąd jest przykry dla autora, a nie dla samej matematyki.

Zwolennicy aksjomatyki dobrze zrobiliby zastanawiając się nad następującym problemem filozoficznym: dlaczego język potoczny nie daje się zaksjomatyzować? (Być może językami najbardziej zbliżonymi do języków sformalizowanych są: prawniczy i teologiczny.) Dlatego, że w codziennych sytuacjach członkowie tej samej wspólnoty językowej mają ten sam świat semantyczny, tę samą wizję świata poprzez swój własny język. Mimo że jakaś nazwa lub myśl jest zrealizowana (in extenso)([2]) przez klasę równoważności nie dającą się sformalizować, to język potoczny funkcjonuje z zastanawiającą skutecznością i z prawie całkowitym brakiem dwuznaczności (jeśli jakieś zdanie jest przypadkowo dwuznaczne, to kontekst na ogół tę dwuznaczność usuwa); w języku potocznym znaczenie opiera się w dużej mierze na kryteriach o charakterze topologicznym: tożsamość osoby lub przedmiotu wyraża się przez spójny charakter dziedziny czasoprzestrzennej zajmowanej przez ten przedmiot (lub tę osobę). A składnia języka potocznego, względnie uboga ze strukturalnego punktu widzenia, opisuje najczęstsze wzajemne oddziaływania dynamiczne między przedmiotami czasoprzestrzennymi. Z drugiej strony, w matematyce, zawodowi matematycy (a za nimi studenci) mają bardzo różne światy semantyczne: zdanie sensowne dla *X* jest niezrozumiałe dla *Y*, etc. Dzieje się tak dlatego, że „sens" w matematyce jest owocem pewnej konstrukcji, pewnego nauczania i nigdy nie było dwóch matematyków (ani nawet dwóch studentów), których doświadczenia matematyczne miałyby tę samą historię. Jest to podstawowa różnorodność światów semantycznych tłumacząca konieczność formalizacji, przynajmniej częściowej, w matematyce. Matematycy opierają co najwyżej fundamenty swego świata na czymś w rodzaju wspólnego pnia składającego się z przedmiotów i teorii, które spotykają się w standardowym nauczaniu (na przykład: liczby rzeczywiste i zespolone, funkcje analityczne i różniczkowalne, przestrzenie topologiczne, rozmaitości, grupy, przestrzenie wektorowe itd.) i każdy niezbyt wyspecjalizowany dowód

([2]) Dla określenia tego terminu technicznego p. na przykład, Quine, *From a logical point of view*, p. 21.

musi być oparty na tym wspólnym dla wszystkich języku zawodowym. Dowód jakiegoś twierdzenia (T) przedstawia się jako drogę, która wychodząc od zdań zaczerpniętych ze wspólnego pnia (i przeto zrozumiałych dla wszystkich) prowadzi przez kolejne etapy do takiej sytuacji psychologicznej, w której (T) jest już oczywiste. Ścisłość — w sensie potocznym, niesformalizowanym tego słowa — dowodu polega na tym, że każdy etap ma być całkowicie jasny dla każdego czytelnika, biorąc przy tym pod uwagę rozszerzenia znaczeń wprowadzone w poprzednich etapach. W matematyce, jeśli odrzuca się jakiś dowód, to częściej jest to spowodowane tym, że jest on niezrozumiały, niż tym, że jest on fałszywy. Bierze się to na ogół stąd, że autor, zafascynowany wizją swojego odkrycia, czyni zbyt optymistyczne założenia co do osobowości czytelnika. Ale wkrótce inni matematycy dowodzą wyraźnie tego, co autor wyraził w sposób niejasny, wypełniając w ten sposób luki i uzupełniając dowód. Ścisłość, jak we frontowym zaopatrzeniu w zapasy i uzupełnienia, idzie w ślad za dokonanym przełomem.

Istotnie, czy się tego chce czy nie, każda choćby trochę sensowna pedagogika matematyczna opiera się na pewnej filozofii matematyki. W zasadzie tendencją modernistów jest formalistyczne pojmowanie matematyki, które najlepiej wyraża znany aforyzm Bertranda Russella: „Matematyka może być określona jako przedmiot, w którym nigdy nie wiadomo, o czym się mówi, i czy to, co się mówi, jest prawdziwe". Ich przeciwnicy natomiast kładą nacisk na zakotwiczenie matematyki w rzeczywistości. Chętnie oskarża się ich o platonizm. Ale są bez wątpienia różne odcienie. U Platona świat idei stanowił najwyższą rzeczywistość, a świat zmysłowy naszych percepcji był jedynie jego zdegradowanym obrazem. Człowiekowi wydaje się jednak ciągle naiwnie, że ma dostęp do rzeczywistości ostatecznej. Skromniej, należy zadać sobie pytanie, czy matematyka nie odegrała pewnej roli w ewolucyjnym oddzieleniu się od zwierzęcia: czy nie stanowiła czynnika decydującego o wyższości człowieka nad zwierzęciem. W rzeczywistości zewnętrznej, pewne procesy lokalne natury fizycznej czy biologicznej poddane są rygorystycznemu determinizmowi; inne, przeciwnie, są przypadkowe, tzn. nie dają się przewidzieć precyzyjnie. Bardzo szybko system nerwowy zwierzęcy, a potem ludzki, wyspecjalizowały się w symulacji zdeterminowanych procesów zewnętrznych; natomiast symulowanie procesów przypadkowych jest bezużyteczne, gdyż z definicji nie można przewidzieć ich wyniku. Bardzo szybko, umysł wyizolował pewną liczbę procesów dynamicznych typowych, o dającym się przewidzieć wyniku, ponieważ podlegają ścisłemu determinizmowi (są dynamicznie stabilne).

Te schematy konfliktów ujęte w klasyfikacji procesów efektywnych były pierwszymi sytuacjami „zrozumianymi" przez człowieka (na przykład złowienie ofiary przez drapieżnika); utworzyły one „jądra zrozumienia rzeczywistości", jak się wyraził J. Ladrière [1]. Ale, po przyswojeniu udanego schematu, umysł ma tendencję do ekstrapolacji warunków jego zastosowania, do wielokrotnego jego użycia (jak pies Pawłowa, któremu cieknie ślina na dźwięk dzwonka). Tak powstaje tendencja do izolowania procesów powtarzalnych, dających się kombinować między sobą dowolną ilość razy. Takie jest źródło matematyki: jest to umiejętność symu-

lowania automatyzmów. W celu powtarzania i kombinowania pewnej konfiguracji przedmiotów umysł jest doprowadzony do upraszczania, oczyszczania rzeczywistości. Między formalnym a zrozumiałym jest w zasadzie taki sam związek, jak między pochodną a jej funkcją pierwotną. W operacji różniczkowania kiełka funkcji ucina się sporą część informacji zawartej w tym kiełku, aby umożliwić jego swobodną ekstrapolację. Podobnie, w percepcji sytuacji zrozumiałej umysł schematyzuje, upraszcza tak, aby powtarzanie i kombinowanie tej sytuacji stało się możliwe. W ten sposób, wychodząc od takiego „jądra zrozumienia" umysł matematyczny generuje kombinatorycznie całość pewnej struktury abstrakcyjnej, której celem jest rozszerzenie warunków zastosowania skutecznego schematu przez ekstrapolację jej dziedziny. Ale między rzeczywistością a tą konstrukcją matematyczną jest taki sam związek, jak między płaszczyzną styczną do powierzchni a punktem styczności; z chwilą, gdy odsunąć się nieco od punktu styczności, prawomocność modelu abstrakcyjnego zamazuje się i na ogół zanika, gdyż ta powierzchnia styczna odbiega od rzeczywistości. Oczywiście w wyjątkowych przypadkach może się zdarzyć, że teoria matematyczna jest całkowicie stosowalna empirycznie. To jest to, o czym mówi Dostojewski: „rzeczywistości brakuje często zmysłu humoru". Pewne dziedziny natury, zwłaszcza klasyczna filozofia przyrody, są całkowicie opanowane przez reguły typu automatycznego. Stąd istnienie ilościowych praw fizyki i ich „bezrozumna precyzja" według tak trafnego określenia E. Wignera. Tylko tak dalece, jak jest głupia, daje się natura ująć terminami matematycznymi.

Taka koncepcja matematyki jest oczywiście sprzeczna z tradycyjnym punktem widzenia. Wynosi ona ciągłość matematyczną na pierwszy plan. Schemat algebraiczny dyskretny uzyskuje swą formalną efektywność tylko dzięki temu, że ma realizację empiryczną w kontinuum czasoprzestrzennym. Pedagogika powinna starać się odtworzyć (wg prawa rekapitulacji Haeckla: ontogeneza powtarza filogenezę) podstawowe doświadczenia, które od początku czasów historycznych były źródłem pojęć matematycznych. Oczywiście, nie jest to proste, gdyż należałoby zapomnieć o całym dorobku kulturalnym (którego aksjomatyka jest ostatnim stadium) nakładającym się na te obiekty matematyczne, aby odrodziła się ich pierwotna świeżość. Należy zapomnieć o kulturze, aby wrócić do natury. Tendencja modernistyczna jest przeciwna, jest wzmożeniem czynnika kulturalnego ze szkodą natury; jest wymuszoną afektacją, w ścisłym tego słowa znaczeniu. Ale jeśli ta sztuczność ma w sztuce i literaturze pewien urok, to nie musi to samo zachodzić w matematyce.

Te rozważania, jakkolwiek by się wydawały ryzykowne, mają swoje znaczenie, jeśli chodzi o moment krytyczny reformy modernistycznej: miejsce geometrii elementarnej w nauczaniu.

Porównanie języka potocznego, geometrii i algebry. Interesujące jest porównanie języka potocznego, języka geometrii euklidesowej i języka algebraicznego (formalnego) z następującego, potrójnego punktu widzenia:

(i) „Znaczenie" elementu: czy można sformalizować klasę równoważności zdefiniowanej przez element języka?

(ii) Czy znaczenie to jest intuicyjnie jasne?

(iii) Bogactwo (lub ubóstwo) składni.

Otrzymuje się wówczas następujące odpowiedzi:

Język potoczny.

1) Klasa równoważności zdefiniowana przez słowo (pojęcie) nie daje się na ogół sformalizować; bywa ona często charakteru topologicznego — niezmienniczość jakiegoś Gestalt([3]).

2) Mimo wszystko znaczenie słowa jest jasne.

3) Składnia jest uboga (jest mało zdań atomicznych w gramatyce i szybko się kończy wstawianie zdań jedno w drugie: istnieją trzy lub cztery możliwe stopnie podrzędności).

Geometria euklidesowa.

(i) Przedmiot zdefiniowany przez słowo — figura geometryczna — daje się sformalizować (tzn. opisać niewielką ilością słów jako funkcja pojęć elementarnych, a mianowicie punktów). Równoważność jest zdefiniowana przez grupę euklidesową, grupę o skończonym wymiarze.

2) Znaczenie słowa jest jasne, gdyż pokrywa się ono z intuicją przestrzenną odpowiadającej figury.

3) Składnia jest bogata, gdyż opisuje wszystkie poszczególne pozycje figur i ich przemieszczeń (niemniej jednak wyraża się ona za pomocą małej ilości pojęć, jak np. incydencja, które można nieograniczenie kombinować).

Język formalny lub algebraiczny.

1) Klasę równoważności definiuje się przez identyfikowanie symbolu napisanego z sobą samym: daje się zatem sformalizować.

2) Sens symbolu algebraicznego jest trudny do ustalenia lub nie istnieje.

3) Składnia, która jest zbiorem możliwych kombinacji operacji jest bogata, gdyż w zasadzie jest nieograniczona.

Porównanie to ukazuje, jak geometria euklidesowa jest naturalnym pośrednikiem (być może niezastąpionym) między językiem potocznym a językiem algebraicznym. Geometria umożliwia psychologiczne rozszerzenie składni z zachowaniem sensu danego zawsze przez intuicję przestrzenną. Jednocześnie sens elementu może być dany już przez sformalizowaną definicję. Chcieć — jak tego wymaga jeden z postulatów modernistycznych — wyeliminować geometrię elementarną na rzecz analizy matematycznej i algebry liniowej jest operacją, którą psychologicznie trudno by polecać, ponieważ obiekty algebraiczne (symbole) są zbyt ubogie semantycznie, by się dały uchwycić bezpośrednio, tak jak to jest z figurami geometrycznymi.

Dodałbym, że język geometrii elementarnej dostarcza rozwiązania następującego problemu: wyrazić w jednowymiarowej kombinacji — a mianowicie w kombinacji

---

([3]) Gestalt (niem.) — postać, forma, kształt (*przyp. red.*).

językowej — morfologię, strukturę wielowymiarową. Problem ten narzuca się w sposób „wszędziegęsty" w matematyce tam, gdzie matematyk musi przekazać komuś swoje własne intuicje. W tym sensie duch geometrii krąży prawie wszędzie w olbrzymim ciele matematyki, a usiłowanie eliminowania go jest wielkim błędem pedagogicznym.

Do tego argumentu dołącza się ubóstwo heurystyczne algebry, w której każda nowa trudność jest jakby murem, do przeskoczenia którego potrzebne są zupełnie nowe metody. Niczego podobnego nie spotyka się w geometrii, gdzie kombinacje figur umożliwiają całą masę ćwiczeń o zróżnicowanej trudności.

Podsumowanie. Jeśli byłem surowy w stosunku do modernizmu, nie znaczy to, że wszystko, co ruch ten przyniósł, powinno być odrzucone; powrót do *status quo* jest bez wątpienia niemożliwy. Istnieje w szczególności jeden punkt pozytywny, który należałoby zachować w każdym przypadku. Niegdyś istniała między nauczaniem średnim a wyższym w matematyce pewnego rodzaju przepaść, z której zapełnieniem młodzi studenci po opuszczeniu liceum mieli duże trudności. Przez wprowadzenie oznaczeń mnogościowych (przedstawionych bez żadnej teorii jako proste skróty) i podstaw algebry liniowej można było zlikwidować tę lukę. Według mnie, uczeń mający ukończoną szkołę średnią (16–17 lat) i zamierzający wybrać karierę naukową powinien znajdować się na tym samym poziomie co Leibnitz z dodatkiem kilku pojęć nowocześniejszej algebry liniowej. Rezultat ten wydaje się możliwy do osiągnięcia bez poświęcenia geometrii euklidesowej; nie należy w tym celu szukać jakiejś niemożliwej ścisłości: zachowa się zasadniczą treść Elementów Euklidesa (prezentując je w sposób mniej aksjomatyczny, a bardziej giętki) przez zaniechanie metody postępowania, która jest od dawna przestarzała.

Być może, że tak umiarkowana konkluzja rozczaruje. Ale ostatnimi laty wspólnota matematyczna dała się wciągnąć na manowce przez nierozważne deklaracje i obietnice. Mówiło się o rewolucji matematycznej; utrzymywano, że dzięki nowym programom i nowym metodom najbardziej przeciętny uczeń będzie mógł ukończyć nauczanie matematyczne na wyższym stopniu. Należy skończyć z takimi wypowiedziami, które graniczą z oszustwem. Żaden cud nie jest możliwy i można mieć jedynie nadzieję, że ostrożnie, stopniowo i przez małe lokalne ulepszenia dojdzie się do poprawy obecnej sytuacji. Co zatem zrodziło ten ruch modernistyczny? Nie wytłumaczyło się wszystkiego, na szczęście, kiedy zwróciło się uwagę tylko na handlowe zyski wchodzące w grę przy zmianie programów i podręczników. Odważyłbym się wypowiedzieć następującą hipotezę (z pewną ograniczoną rezerwą): bez wątpienia w latach 1950–1960 wewnątrz wspólnoty matematycznej zaistniało poczucie względnej frustracji: zazdrość pod adresem fizyków faworyzowanych budżetowo przez rozwój energii jądrowej; zazdrość pod adresem biologów, wsławionych odkryciem DNA i kodu genetycznego. Matematyka poczyniła w ciągu tych samych lat ogromne postępy, a mianowicie w geometrii i topologii algebraicznej w szczególności, lecz były to postępy, które nie odbiły się szerszym echem w opinii publicznej. Wypuszczenie satelitów (1958–1960) znowu zwróciło uwagę opinii publicznej na techniki matematyczne (a w szczególności na komputery).

To właśnie dla odnowienia tego malejącego zainteresowania wezwano na pomoc „matematykę nowoczesną". Gdyby hipoteza ta była sluszna, to dobrze byłoby przypomnieć naszym kolegom, że jest tradycyjnym prawem naszego społeczeństwa, iż rzeczy ważne nigdy nie są tymi, o których się mówi; w naszych czasach, bardziej jeszcze niż w czasach Nietschego, „nowe idee przybywają drepcząc na gołębich nóżkach".

Literatura cytowana

[1] J. Ladrière, *Objectivité et réalité en mathématiques*, Revue philosophique de Louvain 64 (1966), str. 550–81.

[2] R. Thom, *Les Mathématiques „Modernes": Une erreur pédagogique et philosophique*? L'Age de la Science 3 (1970), str. 225–236. Tłumaczenie polskie: Wiadom. Mat. 18 (1974), str. 113–129.

Z. Semadeni (Warszawa)

Uwagi do artykułów J. Leraya i R. Thoma

Na początku lat siedemdziesiątych rozpoczęła się we Francji bardzo gwałtowna polemika na temat nowego programu matematyki i nowych podręczników we francuskich szkołach średnich. Wśród mnóstwa artykułów, które się ukazały, sporo było pisanych przez osoby zupełnie niekompetentne (jeden z takich autorów twierdził np., że do potrzeb współczesnej techniki wystarczają w zupełności narzędzia matematyczne stworzone w XIX w. z rachunkiem tensorowym na czele).

Na szczególną uwagę zasługuje jednak rzeczowa krytyka nowych tendencji w nauczaniu, pochodząca od dwóch Francuzów, których śmiało można zaliczyć do najwybitniejszych z żyjących matematyków. Są to: Jean Leray, którego dwie wypowiedzi umieszczone są powyżej, i Réné Thom, laureat medalu Fieldsa z 1958 r. Artykuł Thoma (cytowany powyżej przez Leraya) i jego plenarny odczyt *Mathématiques modernes et mathématiques de toujours* na II Kongresie Nauczania Matematyki w Exeter odegrały rolę przysłowiowego kija w mrowisku.

Podobne problemy nurtują również nasze środowisko, jakkolwiek nie doszło u nas do takich przejaskrawień, jak we Francji.

W wypowiedziach Leraya wyróżnić należy dwa zagadnienia. Pierwsze z nich, bardziej powierzchowne, to niebezpieczna współczesna tendencja zastępowania treści matematycznych przez ich formę. Zbyt często identyfikuje się nowoczesność ze ścisłością, a w imię ścisłości wysuwa się na plan pierwszy drugorzędne szczegóły techniczne, przywiązując do nich w nauczaniu szczególną wagę. Przykłady takiego zwichnięcia proporcji wykpił J. Leray. Podobne przykłady można by podać i z „na-