wmptm 1897

było eksperymentem połączonym niewątpliwie z dużą dozą ryzyka. To zaufanie ze strony władz partyjnych i państwowych, zrozumienie naszych potrzeb i poparcie okazywane w realizacji naszych celów, towarzyszyły nam od pierwszej chwili i towarzyszą obecnie. Dla udokumentowania tego stwierdzenia można by przytoczyć wiele konkretnych przykładów, ale wspomnę jedynie tylko o jednym, z niedalekiej przeszłości. Mam na myśli utworzone niedawno Centrum Banacha. Nietrudno sobie wyobrazić, że urzeczywistnienie tej inicjatywy leżało poza możliwościami Instytutu i wymagało nie tylko deklaratywnego poparcia, ale aktywnego zaangażowania władz Polskiej Akademii Nauk, i nie tylko Akademii.

Utworzenie Centrum nie byłoby możliwe bez uzyskania na ten cel lokalu. Budynek Centrum zawdzięczamy Komitetowi Warszawskiemu Polskiej Zjednoczonej Partii Robotniczej, a w szczególności osobiście I Sekretarzowi tego Komitetu — tow. Kępie.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Fakt ten i wiele innych przyjmujemy jako wyraz uznania dla polskiej matematyki, dla jej wkładu w rozwój kultury i gospodarki Polskiej Ludowej. To nas nie tylko cieszy, ale co ważniejsze — zobowiązuje i mobilizuje do jeszcze wydatniejszej pracy.

* * *

Na zakończenie referatu prof. Olech podziękował długoletnim pracownikom Instytutu i wskazał na rolę, jaką odegrali w zorganizowaniu i w osiągnięciach Instytutu kontynuatorzy Polskiej Szkoły Matematycznej — profesorowie: Karol Borsuk, Kazimierz Kuratowski, Stanisław Mazur, Andrzej Mostowski i Wacław Sierpiński w Warszawie, Franciszek Leja i Tadeusz Ważewski w Krakowie, Bronisław Knaster, Edward Marczewski i Hugo Steinhaus we Wrocławiu, Władysław Orlicz w Poznaniu.

KAZIMIERZ URBANIK (Wrocław)

Ćwierćwiecze badań naukowych w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk

Matematyka to commedia dell'arte — powiedział kiedyś Stefan Drobot — *jest to taki teatr, w którym aktorzy nie mają wyznaczonych ról, nie ma dokładnie ustalonej akcji, nie ma reżysera, a jest tylko umowa między aktorami, że na scenie ma się coś dziać, coś, co z grubsza omówiono, a resztę pozostawiono talentowi aktorów i — co nie jest bez znaczenia — reakcji publiczności.* Istotnie, osobliwością naszych czasów jest to, że matematyka staje przed koniecznością rozwiązywania zagadnień formułowanych przez niemal wszystkie dziedziny nauki i, co więcej, musi ingerować bezpośrednio w sprawy techniki, rolnictwa i ekonomiki. Nie wszystkie zjawiska dają się jednak podciągnąć pod istniejące już schematy matematyczne. Nie zawsze matematyka jest w stanie sprostać życzeniom i wymaganiom publiczności ale, jak uczy historia,

życzenia te i wymagania mają istotny wpływ na kierunki rozwojowe matematyki, często nawet większy niż namiętne poszukiwanie czystej prawdy.

Kazimierz Kuratowski pisząc o sukcesach Polskiej Szkoły Matematycznej w dwudziestoleciu międzywojennym stwierdza: ... *oprócz blasków były i cienie, które już wówczas dostrzegaliśmy z pewnym niepokojem. Była to jednostronność ówczesnej matematyki polskiej. Aczkolwiek takie działy matematyki, jak topologia i analiza funkcjonalna, stanowiące główny teren działalności matematyków polskich, poczęły odgrywać coraz to większą rolę w całokształcie matematyki i rozrosły się do wielkich samodzielnych dyscyplin matematycznych, to jednak uprawianie ich bez należytego rozwoju analizy matematycznej i algebry, z zupełnym niemal pominięciem zastosowań matematyki, było niewątpliwie słabą stroną ówczesnej matematyki polskiej.*

Publiczność wyrażała tę samą myśl innymi słowami. Na jednym z jubileuszów Wacława Sierpińskiego fizyk Czesław Białobrzeski powiedział: *Stosunki matematyki i fizyki nie pozostawały niezmienne w ciągu wieków. Newton, którego działalność stanowiła punkt zwrotny zarówno w matematyce jak i w fizyce, był przede wszystkim fizykiem w szerokim znaczeniu wyrazu. Matematyka u niego była głównie na usługach fizyki i astronomii. Ten ścisły związek z fizyką pozostał długo. Gdy wielki Norweg Abel w roku 1824 był w Paryżu, skarżył się w liście, że znalazł mało zrozumienia, „matematycy bowiem paryscy zajmują się tylko magnetyzmem i innymi sprawami fizycznymi". Dopiero w końcu wieku XIX „królowa nauk" zapragnęła ugruntować swe podstawy w całkowitej niezależności od nauk doświadczalnych... Gdyby Abel w sto lat po swym pobycie w Paryżu, w roku 1924 mógł wstać z grobu i odwiedzić Warszawę, miałby całkowitą satysfakcję obserwując pracę matematyków polskich.*

Pozwolę sobie w tym miejscu zauważyć, że przepowiadanie kierunków rozwoju nauki i ocena roli jej poszczególnych działów jest zajęciem trudnym i niezwykle ryzykownym. Rzeczywistość bowiem czyni nam niejedną niespodziankę. Po przykłady nie trzeba sięgać daleko. Wystarczy porównać słowa Czesława Białobrzeskiego, które trudno by uznać za apologię metody aksjomatycznej, z tym co powiedział Marshall Harvey Stone w wykładzie „Matematyka i przyszłość nauki": ... *fizyka teoretyczna, już wysoce zmatematyzowana, prowadziła do abstrakcji i spekulacji o charakterze mniej lub bardziej metafizycznym, dla zbadania których metoda aksjomatyczna, właściwa współczesnej matematyce czystej, okazała się najsilniejszym narzędziem.*

Pierwsze lata powojenne, to okres ciężkiej pracy nad odbudową życia naukowego i rozwinięciem go stosownie do zwiększonych obowiązków w nowym socjalistycznym ustroju. Należało jednocześnie wypełniać luki poczynione przez wojnę i okupację oraz wydatnie rozwijać problematykę badań zgodnie z tendencjami rozwojowymi matematyki w świecie i bezpośrednimi potrzebami kraju. Zadania te zostały wykonane w decydującej mierze dzięki instytucji utworzonej ćwierć wieku temu, którą dziś, używając teatrologicznych porównań, należałoby nazwać Narodową Sceną Matematyczną. Zauważę, że nazwa ta tylko w jednej trzeciej odbiega od nazwy Narodowy Instytut Matematyczny, proponowanej przez 1948 rokiem przez Polskie Towarzy-

stwo Matematyczne, kierowane w owym czasie przez Kazimierza Kuratowskiego. W projekcie ramowym tego Instytutu czytamy:

Do zadań Instytutu należą:

a) utrzymanie i wzmocnienie osiągniętej przed wojną na terenie międzynarodowym pozycji matematyki polskiej, jako jednego z przodujących na świecie ośrodków naukowych;

b) rozbudowa matematyki stosowanej i praktycznej w szerokim zakresie, odpowiednio do rosnących w tej dziedzinie potrzeb Nauki i Państwa, zwłaszcza w dziedzinie gospodarki planowej, obronności, produkcji przemysłowej i rolniczej, opieki społecznej i zagadnień statystycznych;

c) koordynacja działalności wydawniczej w zakresie matematyki i racjonalna organizacja pracy w tej dziedzinie.

Dnia 20 listopada 1948 r. Rada Ministrów powołała do życia Państwowy Instytut Matematyczny, który później, z chwilą utworzenia Polskiej Akademii Nauk, przekształcił się w Instytut Matematyczny tej Akademii.

Ogólnokrajowa struktura Instytutu sprzyja kontaktom naukowym, wymianie pomysłów i badaniom zespołowym, doskonaląc imponderabilia Polskiej Szkoły Matematycznej — styl i metody pracy. Dzięki Instytutowi okrzepła jedność matematyki polskiej do tego stopnia, że dziś trudno wytyczyć granice między dorobkiem naukowym Instytutu a dorobkiem szerokiego zespołu matematyków formalnie nie związanych z Instytutem, ale będących w sferze jego oddziaływania naukowego.

Mam przedstawić dorobek naukowy minionego ćwierćwiecza — rezultaty, które już zajęły trwałe miejsce w nauce światowej. Jest to niezmiernie trudne zadanie, bowiem dorobek ten jest ogromny. Widzę tu pełną analogię ze zwiedzaniem muzeum lub galerii sztuki. Są różne sposoby zwiedzania. Jeden z nich to systematyczne studia każdej mumii, rzeźby lub obrazu. Wymaga on jednak niemal olimpijskiej kondycji. W przedstawieniu osiągnięć matematyki polskiej, dzięki działaniu zespołowemu, kondycję tę osiągnęli autorzy materiałów na II Kongres Nauki Polskiej. Materiały te zawierają również szczegółową obiektywną ocenę Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk i, co więcej, są podstawą naszych codziennych poczynań. Czy mam więc powiedzieć: przeżyjmy to jeszcze raz — i odczytać siedemdziesiąt siedem stron materiałów kongresowych?

Pozostaje wobec tego inny sposób zwiedzania muzeum, polegający na wyborze kilku zaledwie dzieł sztuki. Nie daje to wprawdzie pełnej informacji o zbiorach, ale przynajmniej dostarcza wyobrażenia o duchu i stylu epoki. Uczciwie przyznaję się, że jest to sposób zdecydowanie subiektywny. Jednego bowiem oczarowuje piękno kształtów Wenus z Milo (do teorii kształtu jeszcze powrócę), innego — tajemniczy uśmiech Giocondy lub prostota akwareli Nikifora z Krynicy. Przyjmując ten właśnie sposób wybrałem kilka przykładów przemawiających do mnie swym matematycznym pięknem. Widzę w nich zarówno tradycyjną problematykę, jak i nowe idee, przemawia do mnie siła dowodowa wyników i prostota rozumowań, uściślenie faktów, które usilnie przed tym się bronią, oraz głębokie wartości poznawcze lub nieoczekiwane zastosowania.

Jedna z tradycyjnych dziedzin Polskiej Szkoły Matematycznej — topologia ogólna i geometryczna — utrzymuje swój światowy poziom osiągnięty jeszcze w okresie międzywojennym. Kazimierz Kuratowski w serii powojennych prac wydobył bogatą treść topologiczną tkwiącą w twierdzeniach o funkcjach analitycznych. Rozpatruje on rodzinę wszystkich przekształceń ciągłych $\mathscr{P}^X$ przestrzeni topologicznej X w zbiór $\mathscr{P}$ powstały z płaszczyzny liczb zespolonych przez usunięcie liczby 0. Zbiór $\mathscr{P}^X$ jest grupą abelową względem zwykłego mnożenia funkcji. Oczywiście, zbiór Γ funkcji postaci e^u, gdzie u jest funkcją ciągłą, jest podgrupą grupy $\mathscr{P}^X$. Decydującym faktem jest to, że grupa ilorazowa $\mathscr{P}^X/\Gamma$ jest niezmiennikiem topologicznym przestrzeni X. Na przykład, gdy X jest domkniętym podzbiorem płaszczyzny Gaussa, ranga grupy $\mathscr{P}^X/\Gamma$ zwiększona o 1 jest, zgodnie z twierdzeniem Eilenberga, liczbą składowych dopełnienia zbioru X. Kazimierz Kuratowski poprzez subtelne badanie grupy $\mathscr{P}^X/\Gamma$ uzyskał daleko idące uogólnienia wielu klasycznych twierdzeń o funkcjach analitycznych, w szczególności twierdzenia Rungego o aproksymacji funkcji holomorficznych w zbiorze otwartym przez funkcje wymierne, twierdzenia Weierstrassa o rozkładzie funkcji całkowitych na czynniki pierwsze i twierdzenia Rouchégo o liczbie zer funkcji holomorficznych.

Rezultaty uzyskane w ostatnich latach utrwalają znaczenie i rolę topologii polskiej. Jest to przede wszystkim zasługa Karola Borsuka i jego uczniów, wyrażająca się podstawowymi osiągnięciami w teorii kształtu. Oparte są one na matematyzacji pojęcia kształtu przestrzeni precyzującej intuicje wiązane dotychczas z tą nazwą. Pojęcie to ma charakter globalny i zdecydowanie pomija lokalne patologie przestrzeni. Przytoczymy je przyjmując nieistotne ograniczenie do podzbiorów zwartych kostki Hilberta Q. U podstaw teorii tkwi pojęcie ciągu podstawowego $F = \{f_k, X, Y\}$ złożonego z ciągu odwzorowań ciągłych $f_k: Q \to Q$ i pary zwartych podzbiorów X, Y przestrzeni Q spełniających warunek: dla każdego otoczenia V zbioru Y istnieje takie otoczenie U zbioru X, że obcięcia $f_k|U$ i $f_{k+1}|U$ są homotopijne w V dla niemal wszystkich k. Mając dany inny ciąg podstawowy $G = \{g_k, Y, Z\}$ definiujemy złożenie GF za pomocą wzoru $GF = \{g_k f_k, X, Z\}$. Mówimy, że dwa ciągi podstawowe $F = \{f_k, X, Y\}$ i $F' = \{f'_k, X, Y\}$ są homotopijne i piszemy $F \simeq F'$, gdy przeplatanka $\{h_k, X, Y\}$ zdefiniowana wzorem $h_{2k-1} = f_k$, $h_{2k} = f'_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ jest ciągiem podstawowym. Oznaczmy symbolem I_A ciąg podstawowy $\{i, A, A\}$, gdzie $i: A \to A$ jest odwzorowaniem identycznościowym. Mówimy, że dwa zbiory zwarte X i Y są podstawowo równoważne, gdy istnieją dwa ciągi podstawowe $F = \{f_k, X, Y\}$ i $G = \{g_k, X, Y\}$, dla których zachodzą relacje $FG \simeq I_Y$ i $GF \simeq I_X$. Kształt zbioru X to klasa abstrakcji względem tej relacji zawierająca X.

Teoria kształtu bada stosunek pojęcia kształtu do innych pojęć topologicznych. W szczególności przedmiotem zainteresowania są niezmienniki kształtu. Uzyskano tu wiele cennych wyników. Dla przykładu podam, że własność „być podstawowym absolutnym retraktem otoczeniowym" jest niezmiennikiem kształtu. Zawieszenia zbiorów o tym samym kształcie mają również ten sam kształt. O skomplikowanej z geometrycznego punktu widzenia strukturze solenoidów van Dantziga świadczy natomiast fakt, że ich kształt nie jest kształtem żadnego z kontinuów lokalnie spójnych.

Rozszerzenie pojęcia ciągu podstawowego do pojęcia słabego ciągu podstawowego pozwala na ugruntowanie bliźniaczej teorii położenia zbioru w przestrzeni. Najprostszy związek między kształtem i położeniem obserwujemy na płaszczyźnie, gdzie dwa kontinua mają jednakowe położenie wtedy i tylko wtedy, gdy mają jednakowy kształt.

Inną dziedziną o dużej tradycji jest badanie podstaw matematyki, a w szczególności rozwijanie teorii mnogości, teorii modeli i teorii rekursji. Wysoka pozycja Polskiej Szkoły w tej dziedzinie w świecie to przede wszystkim zasługa Andrzeja Mostowskiego, którego idee i metody prowadziły do istotnego postępu nauki. Jego semantyczny dowód niepełności teorii mnogości był poważnym krokiem naprzód w porównaniu z metodą Gödla, a wyniki o izomorfizmie struktur ekstensjonalnych ze strukturami przechodnimi leżą u podstaw dzisiejszych prac nad modelami teorii mnogości. Po stwierdzeniu, że system Gödla–Bernaysa jest nieadekwatny dla badań nad teorią mnogości, proponuje on niepredykatywny system teorii klas. Sformalizowana analiza, jak każda teoria pierwszego rzędu, ma wiele modeli. Wśród nich wyróżnioną rolę odgrywają ω-modele, w których interpretacja liczb naturalnych jest wierna. Badania nad tymi modelami prowadzone przez Andrzeja Grzegorczyka, Andrzeja Mostowskiego i Czesława Rylla-Nardzewskiego doprowadziły do powstania nowej dziedziny zwanej uogólnioną teorią rekursji. Inny dział teorii rekursji, analiza obliczalna, wywodzi się z przedwojennych jeszcze badań Banacha i Mazura nad obliczalnością funkcji rzeczywistych, kontynuowanych przez Mazura po wojnie. Helena Rasiowa i Roman Sikorski algebraizują podstawy matematyki. Szeroko znany jest ich algebraiczny dowód twierdzenia o pełności rachunku kwantyfikatorów.

Wiadomo, że żadna teoria elementarna nie jest kategoryczna. Są jednak takie teorie elementarne, które mają w ustalonej mocy tylko jeden, z dokładnością do izomorfizmu, model. Przykładem jest tu teoria gęstego liniowego porządku bez elementów pierwszego i ostatniego. Istotnie, twierdzenie Cantora daje kategoryczność tej teorii w mocy $\aleph_0$. Jerzy Łoś pokazał, że przeliczalna teoria kategoryczna w jakiejś mocy jest zupełna, a Czesław Ryll-Nardzewski udowodnił, że teoria zupełna jest kategoryczna w mocy $\aleph_0$, jeśli dla każdego n naturalnego zawiera ona tylko skończoną liczbę typów formuł z n zmiennymi.

Matematyków można podzielić na zwolenników i przeciwników pewnika wyboru Zermeli. Hugo Steinhaus był przeciwnikiem i wraz z Janem Mycielskim proponował zastąpić go aksjomatem determinacji. Aby sformułować ten aksjomat rozpatrzmy prostą grę, w której pierwszy gracz wybiera jedną z cyfr 0 lub 1, następnie drugi gracz również dokonuje wyboru jednej z tych cyfr, wiedząc jaki był wybór poprzednika i tak dalej. Po przeliczalnej ilości kroków jako wynik rozgrywki otrzymuje się ciąg zero-jedynkowy, który można interpretować jako punkt zbioru Cantora. Metoda wyłonienia zwycięzcy polega na ustaleniu podzbioru Z zbioru Cantora: jeżeli wynik rozgrywki należy do Z, to wygrywa pierwszy gracz, w przeciwnym przypadku wygrywa drugi gracz. Posługując się pewnikiem wyboru można skonstruować tak patologiczny zbiór Z, dla którego żaden z graczy nie ma strategii gwarantującej mu wygraną. Ignorując otwarcie ten fakt, aksjomat determinacji orzeka, że dla każdego zbioru Z jeden z graczy ma strategię zwycięską. Aksjomat

determinacji prowadzi do bardzo porządnej teorii mnogości bez wielu zjawisk patologicznych, będących konsekwencjami pewnika wyboru. W tej teorii wszystkie zbiory na prostej są mierzalne w sensie Lebesgue'a i mają własność Baire'a. Co więcej, jest w tej teorii słaba, ale wystarczająca do uprawiania analizy, wersja pewnika wyboru, polegająca na możliwości wyboru z przeliczalnych rodzin zbiorów liczb rzeczywistych.

Zainteresowanie w naszym kraju analizą funkcjonalną ma uzasadnienie zarówno w tradycji ugruntowanej dziełem naukowym Stefana Banacha i jego uczniów, jak i w roli tej dziedziny we współczesnej matematyce. Analiza funkcjonalna jest coraz częściej używana jako wygodny język opisu faktów matematycznych i skuteczna metoda badawcza w innych dziedzinach matematyki i jej zastosowań. Słynne jest powiedzenie I. M. Gelfanda, że analiza funkcjonalna to nie teoria, lecz ideologia matematyki.

Poglądy te znajdują całkowite uzasadnienie na gruncie uzyskanych w minionym ćwierćwieczu wyników. Badania Aleksandra Pełczyńskiego i jego współpracowników nad operatorami absolutnie sumującymi i operatorami radonizującymi mają głębokie znaczenie dla teorii miary w przestrzeniach liniowych topologicznych i, w konsekwencji, dla teorii procesów stochastycznych. Rozwinięcie przez Władysława Orlicza i jego zespół teorii przestrzeni Orlicza i ogólniejszych przestrzeni modularnych przyczyniło się nie tylko do rozwoju analizy, ale także, jak to pokazano w ośrodku wrocławskim, do rozwoju teorii prawdopodobieństwa. Okazuje się bowiem, że odgrywająca dużą rolę w teorii prognozy klasa funkcji całkowalnych względem miary losowej jest izomorficzna z odpowiednio skonstruowaną przestrzenią Orlicza. Z wielu głębokich rezultatów o przestrzeniach Banacha przedstawię jeden o istnieniu uniwersalnej przestrzeni Banacha z bazą.

Ciąg $\{e_n\}$ elementów przestrzeni Banacha X nazywa się jej bazą, gdy każdy element $x \in X$ ma jednoznaczną reprezentację $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ z rzeczywistymi współczynnikami c_n. Mówimy, że podprzestrzeń Y przestrzeni X jest w niej uzupełnialna, gdy istnieje ograniczony liniowy projektor z X na Y. Klasyczne twierdzenie Banacha–Mazura o uniwersalności przestrzeni $C(0, 1)$ głosi, że każda ośrodkowa przestrzeń Banacha jest izomorficznie izometryczna z jakąś podprzestrzenią przestrzeni $C(0, 1)$. Okazuje się, że w zakresie przestrzeni Banacha z bazą można uzyskać subtelniejsze rezultaty. Aleksander Pełczyński udowodnił istnienie przestrzeni Banacha B z bazą o tej własności, że każda przestrzeń Banacha z bazą jest izomorficzna i izometryczna z jakąś uzupełnialną w B podprzestrzenią z bazą. Później pokazał on, że przestrzeń B jest w tym samym sensie uniwersalna dla przestrzeni Banacha mających własność aproksymacji. Twierdzenia Pełczyńskiego nabierają nowego blasku dzięki wynikowi Pera Enflo, który pokazał, że istnieją ośrodkowe przestrzenie Banacha nie tylko bez bazy, ale nawet bez własności aproksymacji. W tej sytuacji klasyczny problem Banacha o istnieniu bazy w przestrzeni $C^{(1)}$ na kwadracie jednostkowym również nabiera rumieńców, a konstrukcja bazy w tej przestrzeni przeprowadzona przez Zbigniewa Ciesielskiego i uogólniona na przestrzenie $C^{(m)}$

nad kostkami euklidesowymi we współpracy z Joachimem Domstą zyskuje na znaczeniu.

Niech N będzie dowolnym nieskończonym podzbiorem zbioru liczb naturalnych. Stanisław Mazur istotnie rozszerzył klasyczne rezultaty Ch. Müntza oraz J. A. Clarksona i P. Erdösa o jednostajnej aproksymacji funkcji ciągłych przez wielomiany, których współczynniki o dodatnich wskaźnikach nie należących do N znikają. Podstawowym narzędziem badawczym jest tu nieoczekiwane twierdzenie o zbieżności: niech $\sum_{n\in N}\frac{1}{n}<\infty$, $0\leqslant a<b$, $f_k(t)=c_{k0}+\sum_{n\in N}c_{kn}t^n$ dla $|t|<b$ $(k=1,2,\ldots)$; wówczas punktowa zbieżność ciągu $\{f_k\}$ w przedziale $a\leqslant t<b$ implikuje zbieżność ciągów współczynników $c_{k0}\to c_0$ i $c_{kn}\to c_n$ dla $n\in N$ przy czym szereg $f(t)=c_0+\sum_{n\in N}c_nt^n$ jest zbieżny dla $|t|<b$ i ciąg $\{f_k\}$ jest niemal jednostajnie zbieżny do f w przedziale $|t|<b$. Twierdzenie to ma różne głębokie konsekwencje. Oto niektóre z nich. Nich $C(a,b)$ oznacza zbiór wszystkich ciągłych funkcji rzeczywistych w przedziale $a\leqslant t\leqslant b$, a $R(a,b;N)$ oznacza domknięcie w $C(a,b)$ w sensie punktowej zbieżności zbioru wielomianów, których współczynniki o dodatnich wskaźnikach nie należących do N znikają. Dalej, niech N_1 i N_2 oznaczają zbiory utworzone odpowiednio z nieparzystych i parzystych elementów zbioru N. Jeżeli $a\geqslant 0$ albo $b\leqslant 0$, to rozbieżność szeregu $\sum_{n\in N}\frac{1}{n}$ implikuje równość $R(a,b;N)=C(a,b)$, zaś jego zbieżność powoduje to, że $f\in R(a,b;N)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(t)=c_0+\sum_{n\in N}c_nt^n$ w przedziale $a<t<b$. Jeżeli natomiast $a<0<b$, to rozbieżność obydwóch szeregów $\sum_{n\in N_1}\frac{1}{n}$ i $\sum_{n\in N_2}\frac{1}{n}$ daje równość $R(a,b;N)=C(a,b)$, zaś zbieżność szeregu $\sum_{n\in N_1}\frac{1}{n}$ i rozbieżność szeregu $\sum_{n\in N_2}\frac{1}{n}$ powodują to, że $f\in R(a,b;N)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(t)-f(-t)=\sum_{n\in N_1}c_nt^n$ dla $|t|<\min(-a,b)$.

Osobnym rozdziałem zaliczanym często do analizy funkcjonalnej są wszelkiego rodzaju uogólnienia pojęcia funkcji, stymulowane zarówno przez teorię równań różniczkowych, jak i przez fizykę teoretyczną oraz zagadnienia techniki. W problematyce tej Stanisław Łojasiewicz uzyskał niezwykle cenne rezultaty dotyczące dzielenia dystrybucji przez funkcję analityczną. Zagadnienie to, pochodzące od Laurenta Schwartza, polega na tym, czy dla dowolnej dystrybucji T w przestrzeni euklidesowej R^n i dowolnej funkcji analitycznej n zmiennych rzeczywistych f istnieje dystrybucyjne rozwiązanie S równania $fS=T$? Stanisław Łojasiewicz uzyskał pozytywną odpowiedź dzięki subtelnym badaniom własności funkcji analitycznej zmiennych rzeczywistych w sąsiedztwie zbioru swych zer. Oto jego podstawowy wynik: niech $d(x)$ oznacza odległość punktu x od zbioru zer funkcji analitycznej f; wówczas na każdym podzbiorze zwartym dziedziny f przy odpowiednich stałych dodatnich a i b zachodzi nierówność $f(x)\geqslant a\,d^b(x)$. Twierdzenie o dzieleniu dystry-

bucji przez funkcję analityczną ma wersje głoszące zamkniętość ideałów w przestrzeni C^∞ generowanych przez funkcje analityczne oraz możliwość przejścia od rozwiązań w postaci szeregów formalnych do rozwiązań nieskończenie różniczkowalnych dla równań liniowych. Metody użyte w dowodzie tego twierdzenia były wykorzystane przez Bernarda Malgrange'a do udowodnienia różniczkowego twierdzenia przygotowawczego. Stąd także wyrosła Łojasiewicza teoria zbiorów semianalitycznych, która stała się narzędziem analizy różniczkowej.

Rachunek operatorów był już znany w XIX w., lecz rozpowszechnił się i rozwinął dopiero dzięki pracom Heaviside'a, który stosował go szeroko w zagadnieniach elektrotechniki. Matematyczne uściślenie uzyskał on na gruncie teorii transformacji Laplace'a. Bardzo proste, a jednocześnie ogólniejsze ujęcie teorii operatorów zawdzięczamy Janowi Mikusińskiemu, który oparł ją na algebraicznych podstawach. Punktem wyjścia tej koncepcji jest przemienny pierścień funkcji ciągłych na półprostej dodatniej ze zwykłym dodawaniem i splotowym mnożeniem. Dzięki twierdzeniu Titchmarsha pierścień ten nie ma dzielników zera. A zatem można go rozszerzyć do ciała ilorazów splotowych funkcji ciągłych, czyli operatorów Mikusińskiego.

Badania algebraiczne nie miały w Polsce tradycji. Dopiero na początku lat pięćdziesiątych Jerzy Łoś inicjuje badania nad teorią grup abelowych i teorią algebr ogólnych. Edward Sąsiada uzyskuje wówczas sensacyjną konstrukcję pierścienia prostego, radykalnego w sensie Jacobsona, czyli nie zawierającego maksymalnych ideałów jednostronnych. Metody Sąsiady były wykorzystane przez P. M. Cohna w badaniach nad zanurzalnością pierścieni radykalnych w pierścieniach z dzieleniem. W ostatnim dziesięcioleciu problematyka uległa istotnemu rozszerzeniu. Andrzej Białynicki-Birula uzyskał interesujące rezultaty z geometrii algebraicznej dotyczące modeli relatywnie minimalnych ciał oraz schematów, a Stanisław Balcerzyk wraz ze współpracownikami otrzymał poważne wyniki w teorii kohomologii algebr z gradacją, teorii wymiaru pierścieni grupowych i modułów oraz opierając się na pojęciu stabilnych funktorów pochodnych — wyniki wiążące teorię funktorów pochodnych w przypadku nieaddytywnym z klasyczną teorią w przypadku addytywnym. Edward Marczewski wprowadził na gruncie algebry ogólnej pojęcie niezależności, którego szczególnym przypadkiem jest większość pojęć niezależności występujących w matematyce. Był to początek licznej serii prac nad własnościami indywidualnych algebr, charakteryzacją rodzin zbiorów niezależnych, zagadnieniem różnoliczności baz w tej samej algebrze i strukturą algebr, w których niezależność ma niektóre cechy niezależności liniowej.

Z algebrą łączymy często teorię liczb. Cenne wyniki uzyskał w niej Andrzej Schinzel. Trwałą wartość mają jego twierdzenia o dzielnikach pierwotnych, o równaniach diofantycznych oraz o przywiedlności wielomianów. Oto dwa przykłady nieoczekiwanych twierdzeń: Dla dowolnego wielomianu $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o wymiernych współczynnikach istnieje jedynie skończenie wiele możliwych typów rozkładu wielomianu $F(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \ldots, x_n^{k_n})$ z naturalnymi wykładnikami $k_1, k_2, \ldots, k_n$ na czynniki nieprzywiedlne, jeżeli pominie się czynniki będące wielomianami zwrotnymi,

oraz drugie głoszące, że dla każdego wielomianu W jednej zmiennej o całkowitych współczynnikach istnieje nieskończenie wiele wielomianów nieprzywiedlnych V takich, że suma kwadratów współczynników różnicy nie przekracza liczby 3. Ostatni rezultat daje częściowe rozwiązanie pewnego bardzo trudnego problematu P. Turana.

Przejdźmy teraz do innej problematyki. Tadeusz Ważewski opierając się na teorii równań kontyngensowych i paratyngensowych zaproponował orientorowe ujęcie układów sterowanych. Pozwala ono rozłożyć proces wyznaczenia optymalnego sterowania na dwa etapy. W pierwszym z nich znajdujemy optymalną trajektorię, a w drugim za jej pomocą określamy optymalne sterowanie. Ujęcie orientorowe uprościło wydatnie matematyczne podstawy teorii sterowania oraz wywarło istotny wpływ na jej rozwój. Czesław Olech otrzymał w tej dziedzinie zasadnicze rezultaty, charakteryzując optymalne trajektorie w przypadku układów opisanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, liniowymi względem funkcji niewiadomych.

Twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych stanowiły i nadal stanowią przedmiot intensywnych badań. Przyjrzyjmy się tej problematyce przypominając na wstępie własność jednoznacznego przedłużenia. Rozpatrujemy równanie różniczkowe w jakimś obszarze D leżącym w przestrzeni euklidesowej. Załóżmy, że hiperpowierzchnia S zawarta w D rozcina obszar D na dwa niepuste podzbiory otwarte A i B. Mówimy, że rozpatrywane równanie ma własność jednoznacznego przedłużenia przez hiperpowierzchnię S (z A do B), gdy rozwiązania tego równania pokrywające się w A są identyczne w jakimś otoczeniu hiperpowierzchni S. Klasycznym przykładem mogą tu być funkcje analityczne w obszarze D, czyli rozwiązania równania Cauchy'ego–Riemanna $\partial f/\partial t + i\,\partial f/\partial x = 0$ mające własność jednoznacznego przedłużenia przez każdą hiperpowierzchnię. Kilkadziesiąt lat temu E. Holmgren podał podstawowe twierdzenie głoszące, że równania różniczkowe dowolnego rzędu o analitycznych współczynnikach mają własność jednoznacznego przedłużenia przez każdą powierzchnię nie będącą hiperpowierzchnią charakterystyczną. Nasuwa się oczywiste pytanie — w jakiej mierze analityczność współczynników jest tu istotna? Dla równań eliptycznych zagadnieniem tym zajmowało się wielu matematyków, a między innymi A. P. Calderón i L. Hörmander, uzyskując zarówno pozytywne, jak i negatywne rezultaty. Najbardziej przejrzyste i ostre wyniki otrzymał jednak Andrzej Pliś. Pokazał on, w szczególności, że równanie

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)^4+t^4\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^4-i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3\right]f=a(t,x)f,$$

gdzie a jest funkcją nieskończenie różniczkowalną, nie ma własności jednoznaczego przedłużenia. Wynik ten pokazuje, że w twierdzeniu Holmgrena nie możemy odrzucić założenia analityczności współczynnika nawet przy pochodnej rzędu zerowego.

Jednym z zasadniczych zagadnień mechaniki statystycznej jest istnienie średnich czasowych. W klasycznej sytuacji, dzięki twierdzeniu Liouville'a sprowadza się ono do badania przekształceń zachowujących miarę. Rozpatrzmy najprostszy przypadek układu dynamicznego z czasem dyskretnym, to jest przestrzeń miarową (X, m),

gdzie m jest miarą probabilistyczną wraz z przekształceniem T: $X \to X$ zachowującym mierzalność przez przeciwobraz. Indywidualne twierdzenie ergodyczne Birkhoffa, w wersji F. Riesza, głosi, że gdy przekształcenie T zachowuje miarę przez przeciwobraz, to dla każdej m-całkowalnej funkcji f istnieje funkcja f^* również m-całkowalna i taka, że ciąg średnich arytmetycznych $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(T^k x)\right\}$ zmierza do $f^*(x)$ dla m-prawie wszystkich x. Funkcja graniczna f^* jest warunkową wartością oczekiwaną funkcji f względem σ-ciała zbiorów T-niezmienniczych. Gdy to σ-ciało jest trywialne, czyli gdy przekształcenie jest ergodyczne, granica f^* jest stałą równą całce $\int_X f(x)m(dx)$. Wówczas twierdzenie ergodyczne jest uzasadnieniem stosowanej w fizyce statystycznej zasady głoszącej, że średnia po czasie jest równa średniej po przestrzeni. N. Dunford i D. S. Miller uzyskali warunek na przekształcenie T słabszy niż zachowanie miary, ale implikujący tezę indywidualnego twierdzenia ergodycznego. Powstało naturalne zagadnienie znalezienia warunku koniecznego i dostatecznego. Stanisław Hartman sformułował warunek: istnieje stała K taka, że dla każdego m-mierzalnego zbioru E zachodzi nierówność

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m(T^{-k}E) \leqslant K \cdot m(E).$$

Czesław Ryll-Nardzewski udowodnił następnie, że dla przekształceń T zachowujących miarę 0 warunek Hartmana jest równoważny z tezą indywidualnego twierdzenia ergodycznego.

Poza fizyką twierdzenie ergodyczne znajduje rozmaite, czasem nieoczekiwane zastosowania. W rachunku prawdopodobieństwa dają one prawa wielkich liczb. A oto zastosowania do teorii ułamków łańcuchowych. Edward Marczewski wprowadził przekształcenie δ w przedziale $(0, 1)$ określone dla liczb niewymiernych reprezentowanych ułamkiem łańcuchowym

$$x = 1/n_1(x) + 1/n_2(x) + \ldots$$

wzorem

$$\delta(x) = 1/n_2(x) + 1/n_3(x) + \ldots$$

Przekształcenie to wprawdzie nie zachowuje miary Lebesgue'a, ale, jak to pokazał Czesław Ryll-Nardzewski, zachowuje miarę m z nią równoważną, a określoną wzorem

$$m(E) = \frac{1}{\log 2}\int_E \frac{dx}{1+x}.$$

Pozwoliło mu to otrzymać, jako konsekwencję indywidualnego twierdzenia ergodycznego, że dla prawie każdej liczby x z przedziału $(0, 1)$ każda liczba naturalna

p występuje w ciągu $\{n_k(x)\}$ z częstością

$$\frac{1}{\log 2} \log \frac{(p-1)^2}{p(p-2)}$$

oraz

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\prod_{j=1}^{k} n_j(x)} = \text{const.}$$

Pierwszy wynik uzyskany wcześniej bardzo skomplikowaną metodą należy do P. Lévy'ego, a drugi do A. Chinczyna.

Wzrost zainteresowania się teorią prawdopodobieństwa w naszym kraju tłumaczy się zarówno wzrostem znaczenia metod probabilistycznych we współczesnej matematyce i w rozlicznych jej zastosowaniach, jak i tym, że do problematyki probabilistycznej można dojść także od innych dziedzin — teorii miary, teorii równań różniczkowych, analizy funkcjonalnej, a nawet teorii liczb. Łączenie badań probalistycznych z innymi badaniami daje zazwyczaj cenne efekty i sprzyja rozwijaniu badań z pogranicza różnych dziedzin matematyki. Z wielu wyników cenionych w świecie, a dotyczących głównie teorii procesów stochastycznych, teorii całki losowej i teorii rozkładów granicznych wybrałem konstrukcję Ciesielskiego ruchu Browna.

Botanik Robert Brown zaobserwował w 1828 r. bezładny ruch cząsteczek zawieszonych w wodzie. Pierwsze probabilistyczne prawa rządzące ruchem cząsteczki brownowskiej podał dopiero w 1900 r. L. Bachelier. Zjawiskiem tym zajmowali się również Marian Smoluchowski i Albert Einstein. W 1923 r. dzięki pracom Norberta Wienera ruch Browna uzyskał rygorystyczny kształt matematyczny. Skomplikowaną konstrukcję Wienera uprościł później Paul Lévy. Najprostszą jednak konstrukcję podał Zbigniew Ciesielski. Oto jej myśl przewodnia: Niech $\{f_n\}$ będzie układem Haara w przedziale (0, 1), to jest $f_1 \equiv 1$ i

$$f_{2^m+k}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^m} & \text{gdy } \frac{2k-2}{2^{m+1}} \leqslant t < \frac{2k-1}{2^{m+1}}, \\ -\sqrt{2^m} & \text{gdy } \frac{2k-1}{2^{m+1}} \leqslant t < \frac{2k}{2^{m+1}}, \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases}$$

gdzie $k = 1, 2, \ldots, 2^m$ i $m = 0, 1, \ldots$ oraz $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych unormowanych gaussowskich zmiennych losowych. Wzór

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \int_0^t f_n(u)du$$

definiuje ruch Browna. Bardzo łatwo otrzymuje się stąd podstawowe własności trajektorii ruchu Browna. Ostatnio Zbigniew Ciesielski rozszerzył tę konstrukcję na wielowymiarowe ruchy Browna.

Jednym z naczelnych zadań formułowanych w Instytucie przed dwudziestu pięciu laty było przerzucenie mostu między badaniami teoretycznymi a bezpośrednimi zastosowaniami, wykorzystanie wysokiego potencjału naukowego matematyki w służbie innych nauk i gospodarki narodowej. Czy zadanie to zostało wykonane? Zamiast odpowiedzi przypomnę tylko niektóre rezultaty: optymalizacja podziału inwestycji na budowę dróg leśnych, statystyczne metody badania aktywności wątroby, statystyczna struktura języka polskiego ze względu na systemy stenograficzne, modelowanie transportu kołowego w głębinowych kopalniach węgla, matematyczne metody systematyki czaszek człowieka pierwotnego, matematyczny model niesymetrycznego podziału komórek nowotworowych Hela, planowanie doświadczeń, statystyczne metody badania jednorodności produktów bezkształtnych, probabilistyczne metody ustalania ojcostwa na podstawie ekspertyzy serologicznej, statystyczne metody badania zużywania się banknotów, metody porównywania próbek leków z wzorcami, badanie stanów równowagi w modelach ekonomicznych, metody porządkowania indywiduów i optymalizacja wierceń geologicznych. Taki rozwój zastosowań jest zasługą przede wszystkim Hugona Steinhausa, który umiał dostrzec zagadnienia matematyczne w różnych sytuacjach praktycznych i różnych dziedzinach nauki, pozornie bardzo odległych od matematyki. Niekiedy zagadnienie praktyczne nie tylko wymaga stosowania subtelnych metod matematycznych, ale stymuluje ich rozwój. Przytoczę tu jeden przykład.

Eksploatatorów złóż geologicznych interesują metody szacowania na podstawie wyników wierceń próbnych miąższości złoża lub innych jego parametrów, na przykład zawartości kruszcu. Stefan Zubrzycki uważał miąższość $y(p)$ złoża w punkcie p badanego obszaru D za ciągłe izotropowe pole stochastyczne. Wobec tego kowariancja wartości pola w dwóch punktach p i q zależy jedynie od odległości $||p-q||$ tych punktów: $\mathrm{Cov}\big(y(p), y(q)\big) = R(||p-q||)$. Funkcja R opisująca statystyczną strukturę pola zwie się jego funkcją kowariancyjną. Ponieważ w praktyce może być ona wyznaczona jedynie w przybliżeniu, naturalne jest więc dążenie do teoretycznego wyodrębnienia klasy dopuszczalnych funkcji kowariancyjnych i porównanie w tej klasie zasadniczych metod pobierania prób, to znaczy losowego, warstwowego i systematycznego próbkowania. J. Hájek i S. Zubrzycki w dwuwymiarowym przypadku pokazali, że klasa unormowanych dopuszczalnych funkcji kowariancyjnych jest zbiorem wypukłym o ekstremalnych elementach postaci $R_t(x) = r(tx)$ $(0 \leqslant t < \infty)$, gdzie

$$r(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left(\arccos x - x\sqrt{1-x^2}\right) & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

Na podstawie twierdzenia Kreina–Milmana–Choqueta otrzymuje się stąd całkową reprezentację dopuszczalnych funkcji kowariancyjnych.

Badając różne metody pobierania prób Stefan Zubrzycki udowodnił, że próbkowanie losowe jest mniej efektywne od warstwowego i że nie da się ogólnie roz-

strzygnąć, czy lepsze są próby systematyczne, czy warstwowe, nawet przy dodatkowych ograniczeniach postaci funkcji kowariancyjnej i kształtu warstw. Zagadnienie wpływu kształtu regularnych sieci prób na efektywność próbkowania było badane we współpracy z T. Daleniusem i J. Hájkiem. Aby eliminować wpływ brzegu obszaru D na kształt optymalnej sieci wierceń, rozważają oni całą płaszczyznę i konstruują kontrprzykłady pokazujące, że nie istnieje sieć generalnie najlepsza, bowiem kształt optymalnej sieci zależy na ogół od funkcji kowariancyjnej i od gęstości sieci. Powstało przy tym przypuszczenie, że dla pól z wykładniczą funkcją kowariancyjną optymalną siecią wierceń jest sieć trójkątów równobocznych. Bolesław Kopociński udowodnił, że sieć ta rzeczywiście jest lokalnie optymalna ze względu na transformacje afiniczne przy każdej gęstości sieci oraz jest lokalnie optymalna przy dostatecznie małej gęstości sieci.

Minęło pierwsze ćwierćwiecze, które udowodniło niezbicie trafność koncepcji ogólnokrajowego naukowo-badawczego instytutu matematycznego. Naukowe sukcesy Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk to obok rozwijania dziedzin tradycyjnie u nas uprawianych, świadome inicjowanie nowej problematyki i uzyskiwanie tam rezultatów liczących się w nauce światowej. Wiemy, że wiele zadań czeka jeszcze na rozwiązanie. W niektórych dziedzinach musimy przyśpieszyć kroku, by dojść do czołówki lub co najmniej do peletonu matematyki światowej. W tym marszu naszą nadzieją jest utalentowana młodzież, która co roku przychodzi do Instytutu, podejmując w nim pracę lub rozpoczynając studia doktoranckie. Niemal setka doktorantów kształconych aktualnie w Instytucie to pełna gwarancja rozwoju nie tylko Instytutu, ale całej matematyki polskiej. Możemy więc śmiało zaczynać drugie ćwierćwiecze.