ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVIII (1974)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Uroczystość wręczenia dyplomów członków honorowych Polskiego Towarzystwa Matematycznego Władysławowi Orliczowi i Antoniemu Zygmundowi

Walne Zgromadzenie Polskiego Towarzystwa Matematycznego w Lublinie we wrześniu 1971 uchwaliło przyznanie członkostwa honorowego Władysławowi Orliczowi i Antoniemu Zygmundowi (1).

Dyplomy członkostwa zostały wręczone na uroczystym posiedzeniu Towarzystwa, które odbyło się dnia 25 czerwca 1973 r. w Sali Lustrzanej Pałacu Staszica w Warszawie. Przemówienia omawiające działalność i dorobek naukowy W. Orlicza wygłosili J. Albrycht i Z. Semadeni. Oba podajemy poniżej.

Odczyt o pracach A. Zygmunda z szeregów trygonometrycznych i analizy harmonicznej wygłosił Jean-Pierre Kahane z Uniwersytetu Paryskiego (Prezes Francuskiego Towarzystwa Matematycznego), a o wynikach w teorii całek osobliwych mówił B. Bojarski. Artykuły o dorobku naukowym A. Zygmunda zamieścimy w dalszych tomach naszego pisma.

Po uroczystości Prezes Polskiego Towarzystwa Matematycznego przyjął uczestników lampką wina na tarasie Pałacu Staszica.

Z. SEMADENI (Warszawa)

O pracach W. Orlicza z analizy funkcjonalnej

Przypadło mi w udziale zadanie zaszczytne, ale i zarazem bardzo trudne: omówić syntetycznie i krótko dorobek naukowy profesora Władysława Orlicza, pod którego skrzydłami wyrastałem w Poznaniu. Dorobek to ogromny, zawarty w stu kilkudziesięciu pracach naukowych, z których pierwsza ukazała się w roku 1926,

(1) Zjazd lubelski przyznał również członkostwo honorowe prof. Stanisławowi Gołąbowi i dyplom został Mu wręczony na uroczystym posiedzeniu Oddziału Krakowskiego.

Do chwili oddania niniejszego tomu materiały te nie zostały opracowane, wobec czego opublikujemy je w terminie późniejszym.

a najświeższe nie są jeszcze wydrukowane. Ograniczę się więc do wyników najbardziej znanych, które odegrały największą rolę w rozwoju matematyki.

Pomimo wielkiej różnorodności wyników prof. Orlicza wszystkie mają jeden rys wspólny: widzenie zagadnień analizy matematycznej w dwóch kontekstach: abstrakcyjnym, w duchu analizy funkcjonalnej, i konkretnym — w duchu analizy klasycznej.

Spośród wielu problemów naukowych rozpatrywanych przez prof. Orlicza można wyodrębnić pewne kręgi zagadnień, które Go specjalnie interesowały i do których wracał najczęściej.

Najbardziej z nich dziś znany wiąże się z przestrzeniami, które na całym świecie zwane są przestrzeniami Orlicza. Tę problematykę omawia w swym referacie doc. J. Albrycht.

Następne kręgi zagadnień, które przez długi czas pasjonowały prof. Orlicza, to: szeregi ortogonalne, szeregi bezwarunkowo zbieżne, operatory wielomianowe, przestrzenie B_0, teoria limesowalności, przestrzenie Saksa, stosowanie metody kategorii Baire'a, funkcje wektorowe i miary uogólnione.

Teoria szeregów ortogonalnych stanowiła główny przedmiot zainteresowania prof. Orlicza w latach przedwojennych. Spośród licznych jego wyników omówię wpierw dwa szczególnie znane: twierdzenia o osobliwościach Carlemana i osobliwościach Littlewooda. Przypuśćmy, że (φ_n) jest układem ortonormalnym funkcji na przedziale $[a, b]$. Jednym z naturalnych zagadnień jest badanie związków między własnościami funkcji f a zbieżnością szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p, \tag{1}$$

gdzie $c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$, $n = 1, 2, \ldots$, jest ciągiem współczynników rozwinięcia ortogonalnego funkcji f.

Najbardziej znanym wynikiem tego typu jest twierdzenie Riesza–Fischera orzekające, że ciąg (c_n) jest ciągiem współczynników pewnej funkcji f należącej do przestrzeni L^2 wtedy i tylko wtedy, gdy szereg (1) jest zbieżny dla $p = 2$.

Ponieważ istnieje ciąg (c_n) taki, że $\sum |c_n|^2 < \infty$ i jednocześnie

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{2-\varepsilon} = \infty, \tag{2}$$

więc istnieje funkcja $f \in L^2$ taka, że zachodzi (2). Mówimy, że układ (φ_n) ma *osobliwość Carlemana*, jeżeli istnieje funkcja *ciągła* f spełniająca (2). Carleman pokazał, że układ trygonometryczny ma tę osobliwość. Jednym z najpiękniejszych wyników prof. Orlicza ([3], str. 233) było pokazanie, że osobliwość Carlemana ma każdy układ ortonormalny ograniczony, złożony z nieskończenie wielu funkcji, a także pewne układy nieograniczone (np. układ Haara).

Z twierdzenia Riesza–Fischera wynika również, że jeżeli szereg $\sum |c_n|^2$ jest

zbieżny, to przy dowolnym rozkładzie znaków $\pm$ szereg

$$\sum \pm c_n \varphi_n \tag{3}$$

(tzn. szereg $\sum \eta_n c_n \varphi_n$, gdzie, dla każdego n, η_n jest równe $+1$ lub -1) jest rozwinięciem ortogonalnym funkcji z L^2. Mówimy, że układ (φ_n) ma *osobliwość Littlewooda*, gdy dla każdego ciągu (c_n) niesumowalnego z kwadratem, tzn. takiego, że

$$\sum |c_n|^2 = \infty,$$

istnieje układ znaków $\pm$ taki, że (3) nie jest rozwinięciem żadnej funkcji z L^1. Twierdzenie to udowodnił Littlewood w przypadku układu trygonometrycznego; natomiast W. Orlicz ([7], [12]) pokazał, że tę samą osobliwość ma każdy układ ortonormalny ograniczony złożony z funkcji ciągłych, których kombinacje liniowe aproksymują jednostajnie dowolną funkcję ciągłą.

Pięknym, wielokrotnie cytowanym wynikiem prof. Orlicza [1], jest następująca charakteryzacja zbieżności bezwarunkowej szeregów ortogonalnych:

Przypuśćmy, że $\omega_1 < \omega_2 < \ldots$ jest ciągiem liczb naturalnych dążących do nieskończoności i takich, że dla pewnego rosnącego ciągu wskaźników $n_1, n_2, \ldots$ zachodzi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{n_k}} < \infty \quad \text{oraz} \quad \sup_k \frac{\log n_{k+1}}{\log n_k} < \infty.$$

Niech (φ_n) będzie dowolnym układem ortonormalnym funkcji na przedziale $[a, b]$. Wówczas ze zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1} |c_n|^2 (\log n)^2 \omega_n \tag{4}$$

wynika, że szereg $\sum c_n \varphi_n$ jest zbieżny prawie wszędzie przy każdym uporządkowaniu (tzn. dla każdej permutacji $m_1, m_2, \ldots$ liczb naturalnych istnieje zbiór E taki, że miara zbioru E wynosi 0 i szereg $\sum c_{m_k} \varphi_{m_k}(x)$ jest zbieżny dla każdego $x \in [a, b] \setminus E$; zbiór E może zależeć od permutacji).

Próbowano odwrócić to twierdzenie, tzn. stwierdzić czy warunek (4) może być również konieczny; uzyskano jednakże (K. Tandori i inni) tylko częściowe wyniki.

Badania prof. Orlicza z teorii szeregów ortogonalnych cechuje powiązanie metod klasycznych z rozwijanymi wówczas we Lwowie metodami analizy funkcjonalnej, dzięki czemu rozszerzył on istotnie ramy teorii ogólnych układów ortonormalnych oraz uzyskał wyniki ogólniejsze i mocniejsze, przy niejednokrotnym uproszczeniu dowodów.

Badanie szeregów ortogonalnych zainspirowało stworzoną przez W. Orlicza ogólną teorię szeregów bezwarunkowo zbieżnych w przestrzeniach Banacha. Szczególną sławę uzyskały: twierdzenia o równoważności słabej i mocnej zbieżności bezwarunkowej oraz twierdzenie o zbieżności bezwarunkowej w przestrzeniach L_p.

Szereg $\sum f_n$ elementów przestrzeni Banacha nazywa się *bezwarunkowo zbieżnym*, jeżeli jest zbieżny przy każdym uporządkowaniu wyrazów; wówczas [2] suma szeregu nie zależy od kolejności wyrazów. Bezwarunkowa zbieżność szeregu $\sum f_n$ równoważna jest temu [4], że każdy szereg częściowy $\sum f_{n_k}$ jest zbieżny, natomiast jest istotnie słabsza (w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych) od zbieżności absolutnej, tj. od zbieżności szeregu $\sum \|f_n\|$.

Szereg $\sum f_n$ nazywa się *słabo bezwarunkowo zbieżnym*, gdy dla każdego funkcjonału liniowego ciągłego ξ szereg liczbowy $\sum \xi(f_n)$ jest bezwarunkowo zbieżny.

W 1929 r. W. Orlicz udowodnił, że jeżeli przestrzeń Banacha jest słabo ciągowo zupełna, to każdy szereg słabo bezwarunkowo zbieżny jest bezwarunkowo zbieżny. Nieco później zauważył, że ten sam dowód daje następującą równoważność: *na to, aby szereg $\sum f_n$ był bezwarunkowo zbieżny potrzeba i wystarcza, by każdy szereg częściowy $\sum f_{n_k}$ był słabo zbieżny do pewnego elementu*; przy tym sformułowaniu założenie o słabej zupełności jest zbędne ([2]).

Jest to jeden z najpiękniejszych wyników polskiej szkoły analizy funkcjonalnej, o bardzo dużym znaczeniu dla teorii przestrzeni Banacha i dla teorii całki.

Ważnym wnioskiem z twierdzenia Orlicza jest jedno z podstawowych twierdzeń teorii miary wektorowej (sformułowane po raz pierwszy przez Pettisa w 1938 r.) głoszące, że *każda miara słabo σ-addytywna jest mocno σ-addytywna*. Dokładniej można to sformułować następująco: Przypuśćmy, że μ jest miarą skończenie addytywną określoną na pierścieniu $\mathfrak{M}$ podzbiorów pewnego zbioru X, o wartościach w przestrzeni Banacha F. Jeżeli dla każdego ciągu zbiorów rozłącznych $E_1, E_2, \ldots$ należących do $\mathfrak{M}$ szereg $\sum \mu(E_n)$ jest słabo zbieżny i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big), \tag{4}$$

to szereg (4) jest mocno zbieżny. Istotnie, ustalmy ciąg (E_n) i oznaczmy $f_n = \mu(E_n)$. Wówczas każdy szereg częściowy jest słabo zbieżny

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n_k}) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\Big),$$

a zatem, na mocy twierdzenia Orlicza, szereg $\sum f_n$ jest mocno zbieżny.

Na odwrót, z tego, że każda słaba σ-addytywna miara jest mocno σ-addatywna, wynika natychmiast twierdzenie Orlicza. Istotnie, jeżeli każdy szereg częściowy $\sum f_{n_k}$ jest słabo zbieżny, to rozważamy funkcję zbioru μ określoną na ciele wszyst-

([2]) W tej to drugiej postaci wynik Orlicza jest cytowany w aneksie książki Banacha *Théorie des opérations linéaires*. Niestety nie podany był przy tym żaden cytat bibliograficzny i można było wnosić, że wynik dopiero czeka na publikację; z tego chyba powodu wielu autorów uważało, że pierwszym opublikowanym dowodem twierdzenia Orlicza był dowód Pettisa z 1938 r. Oryginalny dowód Orlicza (dla przestrzeni słabo ciągowo zupełnych) opublikowany był w pracy [2] o szeregach ortogonalnych, a nie w jednej z prac o zbieżności bezwarunkowej, jak do dzisiaj bywa błędnie cytowany.

kich podzbiorów zbioru $\boldsymbol{N}$ liczb naturalnych jako

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} f_n, \quad \text{gdy } A \subset \boldsymbol{N}.$$

Jest oczywiste, że funkcja μ jest słabo σ-addytywna, a jej mocna σ-addytywność jest równoważna mocnej zbieżności bezwarunkowej szeregu $\sum f_n$.

Oznacza to, że twierdzenie Orlicza i twierdzenie Pettisa są dwoma wariantami tego samego faktu matematycznego; z tego powodu każde z tych twierdzeń bywa często nazywane twierdzeniem Orlicza–Pettisa.

Warto tu wspomnieć, że A. Pełczyński udowodnił w 1957 r., że na to, aby przestrzeń Banacha F miała własność Orlicza, tzn. by każdy szereg słabo bezwarunkowo zbieżny w F był mocno bezwarunkowo zbieżny, potrzeba i wystarcza, by przestrzeń F nie zawierała podprzestrzeni izomorficznej z c_0 (jest to warunek istotnie słabszy od słabej ciągowej zupełności).

Drugim bardzo głębokim wynikiem Orlicza dotyczącym bezwarunkowej zbieżności jest twierdzenie (udowodnione w [5]) głoszące, że jeżeli $\sum f_n$ jest bezwarunkowo zbieżnym szeregiem w przestrzeni L^p i $2 \leqslant p < \infty$, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^p < \infty,$$

a jeżeli $1 \leqslant p < 2$, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^2 < \infty.$$

W ćwierć wieku później M. I. Kadec udowodnił, że analogiczną własność ma każda przestrzeń jednostajnie ściśle wypukła. Dokładnie wynik Kadeca brzmi: jeżeli F spełnia warunek

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta(\varepsilon)>0} \bigwedge_{f,g \in F} [\|f\| = 1 \ \& \ \|g\| = 1 \ \& \ \|f-g\| \geqslant \varepsilon] \Rightarrow \left[\left\|\frac{f+g}{2}\right\| \leqslant 1-\delta(\varepsilon)\right]$$

i szereg $\sum f_n$ jest bezwarunkowo zbieżny w F, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta(\|f_n\|) < \infty.$$

Zestawiając to ze znanymi dziś szacowaniami funkcji $\delta(\varepsilon)$ dla przestrzeni L^p (J. A. Clarkson, Kadec, O. Hanner) otrzymuje się wynik Orlicza. Tematyka ta jest dzisiaj nadal żywotna i aktualna.

Przejdę teraz do innych dziedzin. Omówię niezwykle owocną współpracę prof. Orlicza z prof. Mazurem. Zacznę od operatorów wielomianowych. Otóż wiadomo, że w latach trzydziestych, po zbudowaniu zasadniczych zrębów analizy funkcjonalnej liniowej, szkoła lwowska miała znacznie ambitniejszy zamiar zbudowania analizy funkcjonalnej nieliniowej. Zamiar ten nie został wówczas zrealizowany — dobrej teorii nieliniowej analizy funkcjonalnej nie ma i dziś, pomimo wysiłków

matematyków wielu krajów. Owocem ówczesnych wysiłków były prace Schaudera (m. in. twierdzenie o punkcie stałym) oraz prace Mazura i Orlicza [8], [9], [10], [11] o operatorach wielomianowych. Mazur i Orlicz podali trzy równoważne określenia operatorów wielomianowych, z których najprostsze jest następujące: najpierw określa się operatory wieloliniowe. Operator

$$U : F_1 \times \ldots \times F_n \to F$$

(n zmiennych) nazywa się n-liniowym, gdy jest liniowy ze względu na każdą zmienną z osobna. Obcinając operator n-liniowy do przekątnej, tzn. podstawiając

$$U_0(x) = U(x, x, \ldots, x)$$

otrzymujemy operator wielomianowy jednorodny stopnia n. Ogólnie, przez operator wielomianowy rozumie się sumę skończonej liczby operatorów wielomianowych jednorodnych. Plan oparcia analizy funkcjonalnej na aproksymacji operatorów nieliniowych przez wielomianowe i na badaniu tzw. operatorów analitycznych (rozwijalnych w szereg operatorów wielomianowych jednorodnych) został zrealizowany tylko częściowo.

Około roku 1933 Mazur i Orlicz stworzyli zręby teorii przestrzeni liniowo-metrycznych lokalnie wypukłych i zupełnych, nazywanych przez nich przestrzeniami typu B_0. Teoria ta odgrywa dziś kluczową rolę w analizie funkcjonalnej. Niestety, większość tych wyników opublikowanych została dopiero po II wojnie światowej (prace [13] i [15]), a do tego czasu znaczna ich część została ponownie odkryta przez matematyków francuskich.

Najbardziej znanym twierdzeniem pracy [15] jest następujące twierdzenie Mazura–Orlicza o nierównościach, będące uogólnieniem twierdzenia Hahna–Banacha. Przypuśćmy, że p jest funkcjonałem subliniowym (subaddytywnym i dodatnio-jednorodnym) na przestrzeni liniowej F, $(f_t)_{t\in T}$ jest rodziną elementów przestrzeni F, a $(c_t)_{t\in T}$ — rodziną liczb rzeczywistych. Na to, aby istniał funkcjonał liniowy ξ na F spełniający nierówności

$$\xi(f_t) \geqslant c_t \quad \text{dla } t \in T$$

oraz

$$\xi(f) \leqslant p(f) \quad \text{dla } f \in F,$$

potrzeba i wystarcza, by dla dowolnego skończonego układu wskaźników $t_1, \ldots, t_n \in T$ i dowolnych liczb $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ zachodziła nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_{t_i} \leqslant p\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{t_i}\right).$$

(Proste dowody tego twierdzenia podali R. Sikorski i V. Pták.) Twierdzenie Mazura–Orlicza jest bardzo ważnym i wygodnym narzędziem analizy funkcjonalnej; wiele twierdzeń, których bezpośrednie dowody są żmudne, można łatwo wyprowadzić z twierdzenia Mazura–Orlicza.

Przed wojną opublikowane zostały (bez dowodów) piękne twierdzenia Mazura i Orlicza [6] dotyczące ogólnej teorii limesowalności. Stosowanie metod analizy funkcjonalnej, a szczególnie teorii przestrzeni B_0 (m. in. twierdzeń o ciągach operatorów liniowych), rozszerzyło ramy klasycznej teorii limesowalności, wprowadziło nową problematykę i nowe idee, a zarazem pozwoliło na proste i eleganckie dowody twierdzeń o strukturze pól limesowalności, których dowody metodami klasycznymi byłyby znacznie bardziej skomplikowane.

Po II wojnie światowej matematycy pracujący w teorii limesowalności (przede wszystkim K. Zeller) odtworzyli dowody prawie wszystkich twierdzeń anonsowanych przez Mazura i Orlicza, jednakże dowód następującego twierdzenia (anonsowanego w [6], udowodnionego w [18]) sprawiał trudności.

Załóżmy, że $A = (a_{nm})$ i $B = (b_{nm})$ są dwiema macierzami nieskończonymi, determinującymi dwie metody limesowalności permanentne, tzn. limitujące każdy ciąg zbieżny do jego granicy. Załóżmy również, że każdy ciąg ograniczony (x_n) limitowany metodą A jest limitowany metodą B. Wówczas każdy ciąg ograniczony limitowany metodą A jest limitowany metodą B do tej samej granicy.

Otóż do dowodu tego twierdzenia nie wystarczy wprowadzić odpowiednią metrykę w polu limesowalności ciągów ograniczonych. W związku z tym niektórzy (A. L. Brudno) stosowali dość zawiłe metody konstruktywne. W. Orlicz [17] pokazał, że twierdzenie to można udowodnić w prosty i naturalny sposób stosując nowy typ przestrzeni, nazwanych przez niego przestrzeniami Saksa (na cześć S. Saksa, który badał pewien szczególny przypadek tych przestrzeni).

Przestrzeń Saksa jest to kula jednostkowa S pewnej przestrzeni Banacha F zaopatrzonej w drugą słabszą normę typu B_0, względem której kula jest zupełna. Pojęcie to jest bardzo bliskie pojęciu przestrzeni dwunormowej, jednakże żadne z tych pojęć nie zawiera się w drugim ([3]). Badaniom przestrzeni Saksa poświęcił prof. Orlicz kilka prac po wojnie (m. in. [14], [17], [18], [19]). Główna zaleta tych przestrzeni to zupełność kuli w słabszej normie i możliwość stosowania twierdzenia Baire'a, co pozwala udowodnić np. twierdzenie o granicach ciągów operatorów liniowych ciągłych na kuli względem słabszej normy, analogicznych do klasycznych twierdzeń Banacha–Steinhausa.

Po wojnie, oprócz kontynuowania pewnych tematów przedwojennych (m. in. teorii limesowalności), prof. Orlicz podjął nowe zagadnienia, m. in. zajmował się funkcjami wektorowymi i operatorami liniowymi na pewnych przestrzeniach specjalnych.

W ostatnich latach prof. Orlicz oprócz badań nad przestrzeniami modularnymi prowadził intensywne badania nad miarami wektorowymi skończenie addytywnymi;

([3]) Warto dodać, że w ówczesnych latach rozważanie przestrzeni niezamkniętej ze względu na działanie dodawania wydawało się niezbyt naturalne. Dzisiaj kule w przestrzeni Banacha zyskują coraz większą popularność jako osobne obiekty badań, m. in. w teorii kategorii zamkniętych (prace S. Eilenberga i innych). Spore znaczenie ma dziś kategoria uogólnionych zwartych przestrzeni Saksa (kul w przestrzeniach Banacha zaopatrzonych w słabszą topologię zwartą, lokalnie wypukłą).

ponieważ norma funkcji charakterystycznej zbioru, tzn. funkcja $\mu(A) = \|\chi_A\|$, nie jest addytywna, prof. Orlicz rozwinął również badania miar skalarnych subaddytywnych i tzw. funkcjonałów ortogonalno-addytywnych (tzn. addytywnych na funkcjach f, g takich, że $f \wedge g = 0$).

Wyniki te, jakkolwiek przez swój techniczny charakter mało wdzięczne do cytowania, głęboko wnikają w podstawy teorii miary, całki i teorii przestrzeni funkcyjnych; stały się one też inspiracją dla najmłodszej generacji uczniów profesora Orlicza.

Wiele prac prof. Orlicz napisał ze swym uczniem A. Alexiewiczem, który doktoryzował się u niego w tajnym uniwersytecie podczas okupacji niemieckiej we Lwowie. Prof. Alexiewicz był później moim opiekunem naukowym i promotorem mojej pracy doktorskiej, mogę się więc czuć wnukiem matematycznym prof. Orlicza.

Bardzo wiele zawdzięczam Profesorowi Orliczowi bezpośrednio. Jako student I roku fizyki chodziłem na jego znakomite wykłady z analizy matematycznej I, które były dla mnie szkołą myślenia matematycznego i zadecydowały o moim późniejszym wyborze zawodu matematyka. Gdy byłem studentem IV roku fizyki, prof. Orlicz zaangażował mnie jako zastępcę asystenta w swojej katedrze, a w dwa lata później zaproponował dwóm początkującym asystentom: Przemysławowi Zbijewskiemu i mnie, przygotowanie godzinnego odczytu przekrojowego o przestrzeniach Banacha funkcji ciągłych na konferencję z analizy funkcjonalnej w Zakopanem.

Profesor Orlicz miał wielu uczniów. Rozwój jednego z nich, Z. Ciesielskiego, najwybitniejszego, miałem możność obserwować od początku. Zbyszek przyszedł na studia dwa lata po mnie. Gdy był na III roku studiów, prof. Orlicz zaproponował mu opublikowanie wspólnej pracy [20]. Później, gdy Z. Ciesielski przechodził na V rok i miał otrzymać temat pracy magisterskiej, asystenci Katedry Matematyki próbowali ustalić, jaki — ich zdaniem — temat byłby najodpowiedniejszy w tej sytuacji. Padały różne propozycje, nie wykraczające poza to, co się wówczas w Poznaniu robiło. Dziś, po upływie kilkunastu lat, podziwiam śmiałość i dalekowzroczność ówczesnej decyzji prof. Orlicza: jako temat wybrał miarę Wienera, na którą Z. Ciesielski natknął się w jakiejś pracy poświęconej funkcjom wypukłym. O mierze Wienera nikt z nas przedtem nie słyszał. Biedny Zbyszek męczył się z tym tematem okropnie, ale wkrótce uzyskał w tej dziedzinie swe pierwsze wyniki.

Profesora Orlicza cechowała zawsze ogromna solidność pracy naukowej, przejawiająca się m. in. w dokładnym studiowaniu wszystkiego, czym się zajmował, i bardzo dobrej znajomości bibliografii. Cechy te starał się wpoić w swoich uczniów.

Oprócz wybitnych osiągnięć naukowych, głębokiej wiedzy i rozległych horyzontów matematycznych, chciałbym podkreślić jeszcze jedną cechę profesora Orlicza: niesłabnące zainteresowanie wszystkim, co się w matematyce dzieje. Jakkolwiek jego własne badania koncentrowały się wokół analizy funkcjonalnej i teorii funkcji rzeczywistych, starał się śledzić postęp w innych dziedzinach i nie tracił żadnej okazji do wypytan a przyjeżdżających do Poznania matematyków o to, co robią. Wiedział, co jest w matematyce trwałe, a co jest przemijającą modą. Niejednokrotnie podkreślał przy tym, że twierdzenie łatwe do udowodnienia, ale znajdujące

dobre zastosowania, może mieć większe znaczenie dla rozwoju matematyki niż rozwiązanie trudnego problemu interesującego tylko nielicznych specjalistów.

Na zakończenie wspomnę o pewnej sprawie może drugorzędnej, ale rzucającej inne światło na działalność prof. Orlicza: wspólnie z S. Kubrakiewiczem napisał podręcznik *Rachunki dla I klasy szkoły podstawowej*, wydrukowany we Lwowie w 1937 r. Podręcznik ten nie wszedł już do masowego użytku, był jednak — jak na owe czasy — znakomicie napisany i nie ustępował podręcznikowi Rusieckiego. Prócz tego prof. Orlicz napisał wspólnie z A. Frejlichem podręcznik dla szkół średnich wydany w 1938 r. w języku ukraińskim.

Spis cytowanych prac prof. Orlicza

[1] *Zur Theorie der Orthogonalreihen*, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A (1927), str. 81–115.

[2] *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen* (II), Studia Math. 1 (1929), str. 241–255.

[3] *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen* (III), Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A (1932), str. 229–238.

[4] *Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen* (I), Studia Math. 4 (1933), str. 33–37.

[5] *Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen* (II), Studia Math. 4 (1933), str. 41–47.

[6] (wraz z S. Mazurem) *Sur les méthodes linéaires de sommation*, C. R. Acad. Sci. Paris 196 (1933), str. 32–34.

[7] *Z badań nad układami ortogonalnymi*, Wydawnictwo Zakładu Narodowego im. Ossolińskich, Lwów 1934.

[8] (wraz z S. Mazurem) *Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen. Erste Mitteilung*, Studia Math. 5 (1935), str. 50–68.

[9] (wraz z S. Mazurem) *Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen, Zweite Mitteilung*, Studia Math. 5 (1935), str. 179–189.

[10] (wraz z S. Mazurem) *Polynomische Operationen in abstrakten Räumen*, Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936.

[11] (wraz z S. Mazurem) *Sur la divisibilité des polynômes abstraits*, C. R. Acad. Sci. Paris 202 (1936), str. 621–623.

[12] *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen* (V), Studia Math. 6 (1936), str. 20–38.

[13] (wraz z S. Mazurem) *Sur les espaces métriques linéaires* (I), Studia Math. 10 (1948), str. 184–208.

[14] *Linear operations in Saks spaces* (I), Studia Math. 11 (1950), str. 237–272.

[15] (wraz z S. Mazurem) *Sur les espaces métriques linéaires* (II), Studia Math. 13 (1953), str. 137–179.

[16] (wraz z S. Mazurem) *On linear methods of summability*, Studia Math. 14 (1954), str. 129–160.

[17] *Linear operations in Saks spaces* (II), Studia Math. 15 (1955), str. 1–25.

[18] (wraz z V. Ptákiem) *Some remarks on Saks spaces*, Studia Math. 16 (1957), str. 56–68.

[19] *Contribution to the theory of Saks spaces*, Fund. Math. 44 (1957), str. 270–294.

[20] (wraz z Z. Ciesielskim) *Some remarks on the convergence of functionals on bases*, Studia Math. 16 (1958), str. 335–352.