ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XVIII (1974)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Recenzje

List Z. Semadeniego w sprawie błędów w książce *Banach spaces of continuous functions*, vol. I.

Pozwalam sobie podać poniżej listę ważniejszych błędów wskazanych mi przez życzliwe osoby, bądź też zauważonych przeze mnie po wydrukowaniu erraty.

str. 5 (dedykacja): rokiem urodzenia Schreiera jest 1909, a nie 1889;

str. 75, wiersz 1: w definicji przestrzeni $\mathscr{C}(X)$ opuszczono słowo „bounded";

str. 294, wiersz 18: powinno być: „for every bounded ω-additive measure λ";

str. 295, wiersz 24: $\mu = \mathscr{N}\beta$. ν zamiast $\mu = \mathscr{N}(\nu)$;

str. 307, wiersz 7: opisana tu funkcja μ nie jest miarą na $\mathscr{P}(X)$ (nie jest addytywna); najprostszym przykładem miary nieregularnej jest miara na ω_1+1, której konstrukcja jest tematem ćwiczenia 18.2.7 (B);

str. 310, wiersz 16: nie dla każdego zbioru borelowskiego prawdziwy jest podany tu wzór; dla dowolnego $B \in \mathscr{B}(X)$ jest natomiast

$$\mu(B) = \sup\{\mu^*(F)\colon F \subset B \,\&\, F \in \mathscr{F}(X)\},$$

gdzie

$$\mu^*(F) = \inf\{\nu(G)\colon F \subset G \,\&\, G \in \mathscr{G}(X) \cap \mathscr{B}_0(X)\};$$

str. 362, wiersz 7 od dołu: zamiast „a family of measures" ma być „a family of probability measures";

str. 451, wiersz 14 od dołu: w zadaniu (D) ma być $\sin \pi x$, $\cos \pi x$;

str. 466, wiersz 1 od dołu: skreślić „such that $\mathfrak{m}_0 < \mathfrak{m}_1 < \ldots$"

Zbigniew Semadeni

Andrzej Białynicki-Birula, *Algebra*, Biblioteka Matematyczna, tom 40, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1971, str. 287, cena zł 45.—

Recenzja ta ukazuje się z opóźnieniem z winy recenzenta. Do niedawna można było powiedzieć, że podręczniki tzw. analizy (I, II, III?) zawierały wszystkie mniej więcej to samo, tj. rachunek różniczkowy i całkowy funkcji w R^n, tzw. calculus, a podręczniki algebry różniły się ujęciem, ogólnością i wyborem materiału. Nauczanie analizy miało długą tradycję, a algebra przed wojną była przedmiotem drugiej rangi, więc potem niejednakowym sposobem honorowano jej awans w nauce. Obecnie porównanie metod nauczania w tych obu dyscyplinach daje już inny obraz, gdyż nowe podręczniki analizy (Rudin, Maurin) przyzwyczajają czytelnika od razu do obszernych klas przestrzeni i operacji, a w podręcznikach algebry materiał w przybliżeniu się ustalił i tylko układ i szczegóły wahają się zależnie od upodobania autora i jego poglądu na sprawę stosunku między szczytnym celem ogólności a poziomym celem przystępności.

Wydaje się, że Autor recenzowanej książki nie ma konsekwentnego stanowiska w tej sprawie. Czasem odnosi się wrażenie, że obawia się ogólności; przynajmniej trudno inaczej wytłumaczyć sobie, dlaczego w książce tak późno zjawia się pojęcie grupy i dlaczego aż tak ostrożnie rozszerza się zakres algebry wyniesiony ze szkoły. Za to wykład o systemach algebraicznych i ich izomorfizmach świadczyć by mógł o wręcz przeciwnej tendencji. Ale te paragrafy wyglądają obco i nie harmonizują ze stylem książki; ponadto Autor nie osiągnął w nich ścisłości, mimo widocznych usiłowań. Oto, co sam pisze o tym w przedmowie: „Starałem się jednak wykazać w tej książce, że to dążenie do ogólności i abstrakcji jest usprawiedliwione różnorodnością zastosowań i nie jest celem samym w sobie, lecz służy przede wszystkim lepszemu rozumieniu i opracowaniu doskonalszych metod badania własności pewnych konkretnych obiektów algebraicznych (w szczególności liczb)". Zdaniem moim Autor nie w pełni ten cel osiągnął.

Recenzent ma ochotę posarkać, z subiektywizmem nieodłącznym od każdej recenzji. Z książki A. Białynickiego-Biruli można się dobrze nauczyć elementów algebry, a nawet więcej. Spróbuję jednak dalej wykazać, że zakładając miejscami nieco wyższą, a miejscami nieco niższą inteligencję u czytelnika można było tę algebrę wyłożyć w sposób bardziej zachęcający. Mimo oscylacji Autor raczej zniża się par force do poziomu przeciętnego studenta, co jednakże przeciętnemu studentowi nie jest potrzebne. Lekturę utrudniają w wielu miejscach omyłki i niedopatrzenia (recenzent zna dobrze z własnego doświadczenia autorskiego nieprzyjemną świadomość, że się je popełniło).

Na początku Autor zakłada, że czytelnik równocześnie poznaje teorię zbiorów w oparciu o *Wstęp do matematyki współczesnej* H. Rasiowej. Lektura tej obszernej książki wcale nie jest potrzebna do zrozumienia książki A. Białynickiego-Biruli; wystarczą elementy teorii mnogości z programu szkoły. Wprowadziwszy pojęcie działania i systemu algebraicznego, Autor przechodzi od razu do ciał, choć po takiej podbudowie można się spodziewać definicji kilku klas mniej wyspecjalizowanych. Wśród przykładów ciał figuruje $Q(\sqrt{2})$, a także $Q(\sqrt[3]{2})$, określone jako zbiór liczb postaci $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, gdzie a, b i c są liczbami wymiernymi. Dowód, że to jest ciało, jest kłopotliwy. Zatajono przed czytelnikiem, że jest także niepotrzebny, a można było powiedzieć tu nawet, że algebra służy m. in. do tego, żeby takich dowodów nie przeprowadzać. Potem mówi się o ciałach Z_p zakładając (na str. 27) zbyt optymistycznie, że czytelnik zna zasadnicze twierdzenie arytmetyki (zna zapewne, ale nie jako twierdzenie). Autor pisze, że dowód znaczenie ogólniejszego rezultatu podany będzie na str. 200 i 201. Tam jest kilka rezultatów, ale z żadnego z nich nie wynika wprost, że Z_p jest ciałem, lub choćby dziedziną całkowitości. Że jest dziedziną całkowitości, napisano na str. 107, ale uzasadniono to tym, że Z_p jest ciałem. Jeszcze wypadnie mi do tego wrócić. Między Z_p a pojęcie ciała prostego i charakterystyki wstawiony jest paragraf o izomorfizmie ciał i izomorfizmie systemów algebraicznych. Lepiej było ograniczyć się tutaj do izomorfizmu ciał, ponieważ nie ma jeszcze materiału, na którym można by dobrze zilustrować ogólne pojęcie izomorfizmu. Powiedziałbym, że w całym kursie nie ma potrzeby wprowadzania tego pojęcia, które jest zbyt formalistyczne. Ostatecznie można wspomnieć o nim przy końcu, ale nie widać, jaką korzyść mógłby odnieść czytelnik z takiej definicji na str. 31: „Przekształcenie φ zbioru elementów systemu S w zbiór elementów systemu T (których działania i elementy wyróżnione są oznaczone tymi samymi symbolami bądź symbolami różniącymi się tylko wskaźnikami) nazywamy izomorfizmem, gdy φ jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym oraz zachowuje odpowiadające sobie działania i wyróżnione elementy (przy założeniu, że odpowiadają sobie zgodnie z przyjętą umową te działania i wyróżnione elementy, których oznaczenia różnią się najwyżej o wskaźniki)". Pisownia jest tu aprioryczna w stosunku do treści. Jeśli odpowiadające sobie elementy nazywają się np. A i a lub a i $\tilde{a}$, to nie różnią się wskaźnikami; i co wtedy? Uwagi, które poprzedzają tę definicję, nie ratują jej ścisłości, a u krytycznego czytelnika mogą obudzić wątpliwości np. takie: czy przy izomorfizmie ciał dodawanie może przechodzić na mnożenie i na odwrót? Pytania tego rodzaju prowadzą czasami do nietrywialnych twierdzeń, ale przecież nie o takie wyrafinowane rozważania tu chodzi. Ponadto ten ogólny aparat jest za ciężki do udowodnienia (na str. 33), że lista własności definiujących izomorfizm ciał (na str. 28) jest za długa, a innych zastosowań na razie nie widać.

Na początku rozdziału III niepokoi zdanie „Wiadomo z geometrii, że po ustaleniu na linii prostej współrzędnych (tj. określeniu początku układu i odcinka jednostkowego) zbiór jej punktów może być utożsamiony ze zbiorem liczb rzeczywistych". Z jakiej geometrii to wiadomo? Odwołanie się do intuicji i znajomej interpretacji byłoby słuszne, do teorii — nie. Coś podobnego zjawia się na stronicy 52: „Oprzemy się na następującym twierdzeniu z trygonometrii: Dla każdej pary liczb rzeczywistych a, b czyniących zadość równaniu $a^2+b^2 = 1$ istnieje liczba rzeczywista α taka, że $a = \cos\alpha$ i $b = \sin\alpha$". Deus ex machina ta trygonometria. Nie powinno się korzystać z pomocy dobrych demonów w książce, w której metoda aksjomatyczna odgrywa z natury rzeczy doniosłą rolę. Na str. 64 takim demonem jest znów „geometria analityczna".

Układy równań liniowych to tytuł jedynego rozdziału poświęconego algebrze liniowej i niemal jedyna jego treść. Pojęcie przestrzeni liniowej jest jakby służebne wobec teorii równań (same równania potraktowane są jako elementy przestrzeni liniowej równań). Tak samo pojęcie macierzy, którego nie wiąże się z przekształceniem liniowym. W ogóle nie ma nic o przekształceniach liniowych. Czytelnik może odnieść wrażenie, że macierz to tylko macierz układu równań i do niczego innego nie służy. Autor dowodzi (nieco skrótowo) twierdzenia o równości rzędu „wierszowego" i „kolumnowego" bez pomocy wyznaczników, a opierając się tylko na pojęciu równoważnych układów równań (tj. takich, które powstają jeden z drugiego przez kombinacje liniowe). Sądzę, że ma w tym rację, bo wyznaczniki są aparatem za trudnym do tego celu. Natomiast wydaje mi się, że niezgodnie z intuicją i przyzwyczajeniem szkolnym definiuje się układ sprzeczny jako taki, że pewna kombinacja liniowa jego lewych stron znika, a taka sama kombinacja prawych stron nie znika. Jest to robione „pod twierdzenie" Kroneckera–Capelliego, a istnienie rozwiązań układów niesprzecznych potem dopiero z tego właśnie twierdzenia i z innych rzeczy wynika.

Wyznaczniki i twierdzenie Cramera występują później. Wyznacznik potrzebny jest czy pożyteczny z pozoru tylko w teorii równań. Definiuje się go tylko „aksjomatycznie" (indukcyjnie), niezależnie od pojęcia permutacji, co powoduje pewne trudności w dowodzie prostych własności, np. że przy przestawieniu wierszy zmienia się znak.

Nasuwa się przypuszczenie, że Autor tak bardzo chciał uniknąć wczesnego wprowadzenia pojęcia grupy, w szczególności grupy permutacji, że decydował się raczej na żmudne dowody. Bardzo pouczająca wydaje mi się uwaga, że jeśli układ równań liniowych o współczynnikach z ciała K ma rozwiązanie w jakimś ciele zawierającym K, to ma je także w K.

Mnożenia macierzy się nie wprowadza (odkłada się do algebry II), więc nie można napisać układu równań w postaci macierzowej, a szkoda. W ogóle nie rozumiem, dlaczego w tej książce (czy też w programie Algebry I, któremu ona ma służyć) tak okrawa się teorię macierzy, gdy przekształcenia zdobyły taką wysoką pozycję w programie szkolnym.

Rozdziały V–X traktują o pierścieniach i zawierają zasób wiedzy stosunkowo znacznie większy niż poprzednie. Jest cechą szczególną tego podręcznika, że faworyzuje pierścienie i ciała w porównaniu z algebrą liniową i teorią grup.

Pierścienie rozpatruje się tylko przemienne z jednością (niesłusznie zwaną jedynką). Jeden z początkowych paragrafów rozdziału V poświęcony jest pierścieniom Z_m. Dowodzi się w szczególności, że równanie $mx+ny = r$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy $(m, n)/r$ (Autor nie pisze (m, n), lecz NWD(m, n)). W dowodzie Autor powołuje się na przykład 5, w którego objaśnieniu się twierdzi, że w pierścieniu Z_m elementy odwracalne, to są elementy względnie pierwsze z m, powołując się przy tym na twierdzenie 2.5 (w pierścieniu skończonym odwracalne są te elementy, które nie dzielą zera) i „uwagę końcową przykładu 2" na stronicy 107, a uwaga polega na tym, że jeśli $(m, n) = 1$ i $m|nn_1$, to $m|n_1$, co należy przyjąć z kolei na podstawie uwagi na str. 27, gdzie mówi się to samo i też bez dowodu, tylko z dodatkiem słów, że czytelnik zapewne dobrze o tym wie. Taka prosta rzecz, a tyle okrucieństwa!

W tym samym paragrafie rozdziału V dowodzi się (twierdzenie 3.4), że jeśli równanie o współczynnikach całkowitych ma rozwiązanie w Z, to także w Z_m i zapowiada się, że w paragrafie 3 rozdziału VII udowodnione będzie znacznie ogólniejsze twierdzenie. Ale ono jest udowodnione w paragrafie 2, a nie 3, a przed nim znajduje się uwaga, że to jest uogólnienie twierdzenia 3.5 z rozdziału V (zamiast 3.4).

W definicji podpierścienia zbytecznie omawia się rzekomą dwuznaczność terminu pochodzącą stąd, że działania w podpierścieniu można rozumieć jako zwężenia działań w pierścieniu lub też nie rozumieć ich w ten sposób. Takie subtelności wymagają albo więcej uwag semantycznych (dobrze, że ich nie ma), albo usunięcia w następnym wydaniu.

W rozdziale VI wprowadza się wielomiany jednej i wielu zmiennych jako ciągi i ich uproszczoną notację za pomocą „nieoznaczonych" (ale jeszcze przed tym używa się oznaczenia $P[x_1, \ldots, x_n]$). Dowodzi się, że w $P[x_1, \ldots, x_n]$ nie ma dzielników zera, jeśli w P ich nie ma, wprowadza się algorytm Euklidesa (nie nazywając go tak) i dowodzi się kilku twierdzeń o pierwiastkach wielomianów jednej zmiennej, zwłaszcza o pierwiastkach z jedności. W dowodzie twierdzenia o krotności pierwiastków równania $x^n = b$ brak definicji użytego tam symbolu r, a w dowodzie twierdzenia 7.12 opuszczono słowo „pierwotnym" (w pierwszym zdaniu). Ciekawe są uwagi ogólne o zagadnieniach geometrii algebraicznej i algebraicznej teorii liczb (petitem na str. 146–147). Rozdział nabiera przez to więcej oddechu. Przyjemnie jest, gdy Autor zaczyna poważniej traktować czytelnika, ale np. na str, 140 jest zdanie „dla dzieci": wśród znanych nam ciał jedynym przykładem ciała algebraicznie domkniętego (powinno być „zamkniętego"; skąd ta powszechna awersja do tego słowa?) jest ciało liczb zespolonych.

Rozdział VII zawiera elementarne wiadomości o homomorfizmach i ideałach. Nie wiem, dlaczego Autor ignoruje pierścienie bez jedności. Są one tak samo ważne, jak pierścienie z jednością. Konsekwentnie Autor odmawia nazwy podpierścienia wszelkim zbiorom nie zawierającym jedności. W rozdziale VII szczególnie to przeszkadza, gdyż wobec tego żaden ideał właściwy nie jest podpierścieniem. Twierdzenia o rozszerzaniu ideału do ideału maksymalnego Autor dowodzi tylko dla pierścieni przeliczalnych, bojąc się, jak widać, lematu Kuratowskiego–Zorna, chociaż należy on do kursu I roku (*Wstęp do matematyki*).

Rozdział VIII mówi o pierścieniu ilorazowym i o ciele ułamków. W poprzednim rozdziale udowodniono, że jądro homomorfizmu jest ideałem, a dopiero teraz dowodzi się, że każdy ideał wyznacza homomorfizm, którego jest jądrem. Autor tworzy w tym celu selektor z warstw i na nim określa działania (modulo ideał) dowodząc, że ten selektor staje się wtedy pierścieniem. Nie nazywa się go jeszcze pierścieniem ilorazowym. To pojęcie wprowadza się dopiero w następnym paragrafie, w tradycyjnym ujęciu, elementami pierścienia ilorazowego są więc warstwy (a nie pojedyncze elementy z nich wyjęte). Wydaje mi się, że tylko ta metoda jest słuszna, bo interpretacja obrazu homorficznego jako selektora prowadzi do innych działań na elementach tego samego (danego) pierścienia, a więc może mylić, a poza tym może potem utrudnić zrozumienie rozkładu na sumę prostą. Posługiwanie się obiema metodami i porównywanie ich, przy drobiazgowym przeprowadzaniu dowodów, czyni rozdział VIII rozwlekłym i nieprzejrzystym. Informacje na końcu o ciele funkcji wymiernych, twierdzeniu Lürotha (wydrukowano Lurotha) i problemach wokół niego są zbyt zwięzłe i nie dość jasne.

Rozdział IX o rozkładach elementów pierścienia na czynniki zawiera pojęcie dziedziny z jednoznacznością rozkładu i teorię pierścieni głównych (inaczej dziedzin ideałów głównych) i pierścieni euklidesowych. Jest to rozdział ciekawy, ale w niektórych miejscach zbyt formalistyczny. Lepiej nie pisać „wielomian P jest nierozkładalny, a więc istnieje jego rozkład na iloczyn wielomianów nierozkładalnych", choć pod względem logicznym to jest w porządku. Na str. 201 słowo „nie" w wierszu 12 trzeba wykreślić.

W rozdziale X mowa jest o elementach algebraicznych, rozszerzaniu izomorfizmów, ciałach rozkładu i rozwiązalności równań przez pierwiastniki. Podano tu też dowód twierdzenia Steinitza o rozszerzaniu ciała do ciała algebraicznie zamkniętego. W niektórych miejscach są rozwlekłości, np. niepotrzebnie dowodzi się przeliczalności pierścienia $K[x]$ nad przeliczanym ciałem K (od czego *Wstęp do matematyki*?). W dowodzie twierdzenia 5.1 występuje nie wyjaśniony symbol j. Dobrze na końcu wyjaśniono pojęcie rozwiązalności równania przez pierwiastniki i jego rolę.

Wreszcie w ostatnim, XI rozdziale wprowadza się grupy, zaczynając od grup automorfizmów (pierścieni, ciał, systemów algebraicznych). Jest to raczej historyczne i ideologiczne niż dydaktyczne ujęcie problemu Potem własności działań i różne przykłady grup. Potem podgrupy, homomorfizmy i ich powiązanie z dzielnikami normalnymi. Znów, jak dla pierścieni, najpierw selektory

z warstw, a dopiero później grupa ilorazowa w zwykłym ujęciu. Złośliwy błąd graficzny na str. 247, przykład 5 (warstwy nierozłączne). Paragraf o kongruencjach systemów algebraicznych wygląda w tym rozdziale obco. Te ogólne rozważania są, jak widać, rozsiane po książce, a nadają się raczej do zebrania w jeden rozdział na końcu. Dalej czytamy o grupach cyklicznych, o grupach prostych i rozwiązalnych, wreszcie o grupach symetrycznych, i tu dopiero (na str. 267!) czytelnik dowiaduje się, co to jest permutacja i grupa permutacji. Książkę zamyka krótko informacyjny paragraf o teorii Galois. Autor słusznie odsyła tu czytelnika do książki Browkina *Wybrane zagadnienia algebry*. W rozdziale tym, podobnie jak w niektórych innych, spotyka się nużący werbalny formalizm. Niczemu nie służą, a tylko utrudniają, takie zdania jak: „Grupy, których rząd jest liczbą naturalną, nazywamy skończonymi „albo" Grupy, których rząd jest nieskończoną liczbą kardynalną, nazywamy nieskończonymi." Mimo woli wplata się tu trudności związane z pojęciem zbioru skończonego i liczby kardynalnej, gdy naprawdę chodzi o wyrażenie (niepotrzebnej) myśli, że grupa nazywa się skończona, gdy zbiór jej elementów jest skończony etc. A co innego mogłoby to znaczyć? Jeśli treść pojęcia jest jednoznacznie wyrażona przez jego nazwę zgodną z potocznym znaczeniem słów, wszelkie wyjaśnienia są zbędne, Tak samo źle (a nawet jeszcze gorzej) jest pisać „Układ nazywamy niesprzecznym, gdy nie jest sprzeczny" (str. 56). Równie dobrze mogłoby być: „Mówimy, że układ nie jest sprzeczny, gdy jest niesprzeczny". Mam też wątpliwości czy należy jeszcze dziś używać terminu „rząd grupy" zamiast „moc grupy". Raczej mówimy, że (nietrywialna) grupa jest rzędu 5, gdy $x^5 = 1$ stale.

Po każdym paragrafie są zadania „sprawdzające", przeważnie dobrze dobrane i łatwe, często z odpowiedziami. Do trudniejszych są wskazówki.

W wielu miejscach język jest nie dość staranny. Przykłady: skoro...więc lub „ponieważ... stąd" zamiast „ponieważ...więc", „dla każdego *b*...iloczyn...nie jest podzielny", „tak otrzymane ciało, choć nie jest identyczne z ciałem...to jednak jego własności...", „ma miejsce", „otrzymujemy, że", „następująco", w „oparciu o" zamiast „na podstawie", „ciała...są jednym z najprostszych przykładów", „dowodzone twierdzenie wykażemy", „utożsamiając każdy element z jego obrazem ciało *K* stanie się" (francuska konstrukcja gramatyczna), zbyt częste, a nieładne „warto zauważyć", „zapis" (np. addytywny) zamiast „pisownia" itd.

Stanisław Hartman

Uwagi A. Białynickiego-Biruli w związku z powyższą recenzją

Pragnę ustosunkować się do recenzji prof. Hartmana, gdyż w recenzji tej jest wiele nieporozumień i niewłaściwych interpretacji moich intencji. Nie oznacza to oczywiście, bym chciał odpierać wszystkie te zarzuty Recenzenta, z którymi w części lub nawet w całości się nie zgadzam, rozumiejąc, że znaczna doza subiektywizmu jest przywilejem każdego recenzenta. Ograniczę się jedynie do tych, które są stawiane z całą stanowczością (nie dopuszczającą innego punktu widzenia) oraz na tyle jasno, bym mógł je zrozumieć.

(a) W książce traktuję algebrę jako dział otwarty, nie unikając przykładów z innych działów i korzystając z pomocy analizy i geometrii (zwłaszcza tam, gdzie mowa o liczbach rzeczywistych). Natomiast zgodnie z uwagami Recenzenta należałoby unikać tej „demonicznej" pomocy, gdyż odwoływanie się do teorii niealgebraicznych nie jest jego zdaniem słuszne (nawet w przykładach!). Jestem zdania, że w podręcznikach algebry powinno się, jak najbardziej, nawiązywać oraz korzystać z twierdzeń analizy oraz geometrii i nie widzę argumentów przemawiających przeciw temu.

Inna sprawa to korzystanie z teorii mnogości. Tu Recenzent nie ma żadnych obiekcji. Wydaje się jednak, że przecenia możliwości i umiejętności studentów I roku. Nie jest prawdą, że do zrozumienia książki „wystarczą elementy teorii mnogości z programu szkoły". W programie tym nie ma ani pojęcia obrazu i przeciwobrazu zbioru przy przekształceniu, ani pojęć relacji równoważności, porządku, sum i iloczynów nieskończonych, itd. Oczywiście lektura całej książki H. Rasiowej *Wstęp do matematyki współczesnej* nie jest do zrozumienia *Algebry* potrzebna. Natomiast