wmptm 1897

Stanisław Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Biblioteka Matematyczna tom 46, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1973, str. 231, cena zł 36.—

Książka zawiera: przedmowę Autora, wstęp, 7 rozdziałów, zbiór zadań opracowanych przez profesorów W. Mlaka i Z. Opiala, wykaz literatury, skorowidz terminów i spis treści. Nie zawiera wykazu symboli.

W krótkiej przedmowie Autor informuje, że książka jest nieznacznie zmodyfikowanym i uzupełnionym wydaniem skryptu, który ukazał się w 1957 i 1964 r. nakładem Uniwersytetu Jagiellońskiego, a treść jej to materiał wykładów, które prowadził w tym uniwersytecie. Od czytelnika wymaga znajomości elementów teorii mnogości, topologii oraz rachunku różniczkowego i całkowego. Wykład ma być prowadzony jednolicie, dla przestrzeni metrycznych, pozostawiając dociekliwości czytelnika możliwość wprowadzenia innej topologii. Zobaczymy jednak, że autor w wielu przypadkach sam wskazuje odpowiednie przestrzenie. Materiał ma być klasyczny i przedstawiony zwięźle.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Wstęp rozpoczyna określenie działań i topologii na rozszerzonej prostej liczbowej. Dalej następuje szereg twierdzeń o kresach, dość ogólna definicja liczby granicznej, pozwalająca ująć jednolicie zarówno granice funkcji, jak i granice sum całkowych, oraz granice w punktach niewłaściwych. Kończy go przekątniowa metoda wyboru.

Rozdział I zatytułowany „Funkcje o wahaniu skończonym" zawiera też najważniejsze informacje o całce Riemanna–Stieltjesa. Omówiono związek wahania funkcji z prostowalnością krzywej, rozkład kanoniczny Jordana, działania na funkcjach o wahaniu skończonym. Istnieniu całki Riemanna–Stieltjesa poświęcono więcej miejsca niż w innych książkach wydanych w języku polskim. Oczywiście rozdział zawiera twierdzenia o całkowaniu przez części, o zmianie funkcji całkującej, o przejściu do granicy pod znakiem całki wraz z twierdzeniem Helly'ego.

Rozdział II „Aproksymacja funkcji ciągłych przez wielomiany" rozpoczyna twierdzenie Weierstrassa dowodzone dwukrotnie, naprzód metodą wielomianów Tonelliego, a potem Bernsteina. Szkicowo przestawiono przypadek aproksymacji funkcji klasy C^p w przestrzeni R^n. Rozdział kończą twierdzenia Stone'a i Stone'a–Weierstrassa, oba sformułowane dla przestrzeni metrycznych zwartych, z zaznaczeniem, że dowód nie wykorzystuje metryczności.

Rozdział III „Funkcje w przestrzeniach metrycznych" zaczynają własności funkcji ciągłych i ciągów takich funkcji. Między innymi omówiono związki między zbieżnością jednostajną a zbieżnością ciągłą. Paragraf o rodzinach równociągłych kończy twierdzenie Ascoliego. Są też w tym rozdziale elementy tak zwanej opisowej teorii funkcji: funkcje półciągłe, warunki konieczne dla zbioru punktów nieciągłości, funkcje pierwszej klasy Baire'a, punktowa nieciągłość, twierdzenie Baire'a charakteryzujące funkcje pierwszej klasy na przestrzeniach zupełnych.

Trzy następne rozdziały poświęcone są teorii miary i całki. Pierwszy z tej serii: „Ciała zbiorów i funkcje mierzalne" zawiera ogólne twierdzenia o ciałach i sigma-ciałach generowanych, o iloczynach kartezjańskich ciał i o klasach monotonicznych. Klasa zbiorów Borela jest jedynym przykładem ilustrującym te pojęcia. Po podstawowych twierdzeniach o funkcjach mierzalnych względem ciała wprowadzono klasyfikację Baire'a i wskazano na związki między klasami funkcji a odpowiednimi klasami zbiorów Borela.

Rozdział V „Miara i funkcje mierzalne" rozpoczyna definicja miary. Autor określa miarę jako funkcję rzeczywistą na ciele przeliczalnie addytywnym, która jest 1° nieujemna, 2° znika na zbiorze pustym, 3° jest przeliczalnie addytywna. Jest to definicja o węższym zakresie niż podana w monografii Halmosa, która określa miary na ciałach skończenie addytywnych. Takie ograniczenie ma pewne walory dydaktyczne, Określono miarę zupełną i podano metodę uzupełniania miary przez dołączanie do ciała podzbiorów zbiorów miary zero. Poznajemy metodę Carathéodory'ego zawężania miary zewnętrznej do miary zupełnej. Jako przykład miary zewnętrznej metrycznej wymieniono miarę Hausdorffa. Miarę Lebesgue'a w R^n określono rozszerzając zawartość przedziału do miary zewnętrznej, a następnie zawężając ją do klasy zbiorów mierzalnych w sensie Carathéodory'ego. Po różnych warunkach koniecznych i dostatecznych dla mierzalności w sensie Lebesgue'a

następują twierdzenia o mierze obrazu przy przekształceniach liniowych i niezmienniczości przy przekształceniach ortogonalnych, znajdujemy dowód Vitaliego istnienia zbiorów niemierzalnych w sensie Lebesgue'a i informację o skończenie addytywnej mierze Banacha w ciele wszystkich podzbiorów prostej i płaszczyzny.

Podane w tym rozdziale twierdzenia o funkcjach mierzalnych dotyczą przede wszystkim mierzalności w sensie Lebesgue'a. Są to klasyczne twierdzenia Frécheta, Łuzina i Vitaliego. Zbieżność według miary potraktowana jest ogólnie, tak samo, jak twierdzenia Jegorowa i Riesza.

Całkę, której poświęcono rozdział VI określa się naprzód dla funkcji nieujemnej, jako kres górny sum całkowych dolnych. Sumy te różnią się od sum Lebesgue'a tym, że mają nieskończenie wiele składników. Są to więc szeregi nieskończone. Po określeniu całki z funkcji sumowalnej i dowodach podstawowych twierdzeń, omówiono związek miary i całki Lebesgue'a z całką Riemanna. Teraz dopiero określono iloczyn kartezjański miar. Twierdzenie Fubiniego podano w wersji ogólnej dla funkcji nieujemnej i dla funkcji sumowalnej, a następnie powtórzono dla całki Lebesgue'a. Dla tej ostatniej bezpośredni dowód zamieszczono w jednym z dodatków. Rozdział kończy twierdzenie Riesza o ogólnej postaci funkcjonału liniowego na przestrzeni funkcji ciągłych.

Najobszerniejszy, bo zajmujący jedną czwartą tekstu, jest rozdział ostatni „Różniczkowalność". Na początku jest to różniczkowalność nieujemnej addytywnej funkcji przedziału. Dowód, że jest ona różniczkowalna prawie wszędzie, poprzedzono twierdzeniem Vitaliego o pokryciu i twierdzeniem Lebesgue'a o punktach gęstości. Określono też ciągłość aproksymatywną i wykazano, że funkcja mierzalna w sensie Lebesgue'a jest prawie wszędzie aproksymatywnie ciągła. Z ważniejszych pojęć odnotujmy pojęcie punktu Lebesgue'a, a z twierdzeń, twierdzenie Rademachera o istnieniu prawie wszędzie różniczki funkcji spełniającej warunek Lipschitza. Rozkłady kanoniczne Jordana i Lebesgue'a podano naprzód dla funkcji przedziału, a potem zastosowano do funkcji jednej zmiennej. Wracamy tu do poruszonej w pierwszym rozdziale sprawy prostowalności krzywej. Obecnie możemy już porównywać jej długość z wartością znanego wzoru całkowego (twierdzenie Tonelliego). O związkach między pochodnymi Diniego mówią twierdzenia Denjoy–Younga–Saksa i Sierpińskiego–Younga, w tym rozdziale tylko sformułowane, a dowodzone szkicowo w ostatnim z dodatków. Na nierównościach dla pochodnych Diniego oparto pewne kryteria monotoniczności.

Uogólnieniem pochodnej jest s-pochodna oparta na abstrakcyjnej s-zbieżności. Autor daje ogólną metodę konstrukcji funkcji ciągłej o danym z góry module ciągłości, która nie jest nigdzie s-różniczkowalna.

Ostatni paragraf poświęcony jest przeliczalnie addytywnym funkcjom zbioru. Zgodnie z zapowiedzią z przedmowy, zakres jego jest klasyczny: twierdzenie Hahna o rozkładzie przestrzeni wyznaczonym przez funkcję, przedstawienie samej funkcji jako różnicy miar, postać kanoniczna funkcjonału liniowego i ciągłego określonego na przestrzeni funkcji ciągłych o zwartych nośnikach, związki między funkcją przedziału a funkcją zbioru, ze specjalnym omówieniem związków między całką Riemanna–Stieltjesa a całką Lebesgue'a–Stieltjesa. Wykład kończą twierdzenie Radona–Nikodyma o całkowej postaci funkcji bezwzględnie ciągłej, rozkład funkcji przeliczalnie addytywnej na część bezwzględnie ciągłą i część osobliwą, dowód, że pochodna Radona–Nikodyma jest — zgodnie z nazwą — prawie wszędzie pochodną funkcji przedziału, i twierdzenie o zamianie zmiennej w całce Lebesgue'a.

72 zadania to przeważnie lematy i twierdzenia przeznaczone do samodzielnego dowodzenia. Niektóre z nich mogą służyć jako ćwiczenia z topologii i analizy funkcjonalnej i wskazują na związek tych dyscyplin z teorią funkcji rzeczywistych.

Otrzymaliśmy książkę bogatą w treść, ze zwięzłymi dowodami. Zwięzłość wyraża się też brakiem uwag o powiązaniach z innymi dyscyplinami i dygresji tworzących intuicje. Jeżeli ma być ona przeznaczona do pierwszej lektury, to wymaga od czytelnika dużej spostrzegawczości i dobrej pamięci. Wymaga też przede wszystkim wprawy w samodzielnym uzupełnianiu szkicowo przedstawionych dowodów, a także poprawianiu błędów zecerskich. Są one zagęszczone właśnie w częściach trudniejszych. Dla przykładu w podstawowym dla pierwszego rozdziału twierdzeniu o istnieniu całki Riemanna–Stieltjesa, na połowie strony mamy trzy błędy: w wierszu 3 od dołu str. 31 jest M, a ma być N, w wierszu 1 str. 32 jest $\frac{1}{2}\varepsilon$ zamiast $\frac{1}{3}\varepsilon$, a w 11 tej samej strony umieszczono

nad znakiem sumy m zamiast n. Zauważmy, że błędnie użytym symbolom M i m nadano już w tym samym dowodzie inne znaczenie niż znakom N i n, co utrudnia spostrzeżenie, że błąd jest zecerski.

Przejdźmy do sprawy interpretacji geometrycznej. Jak może ona być pożyteczna, zauważmy na przykładzie dwu twierdzeń, których dowody naszkicowano w ostatnim dodatku. Twierdzenie Sierpińskiego–Younga łatwo zapamiętać, jeżeli zauważy się, że jest to twierdzenie o przeliczalności zbioru ostrzy wykresu. Dla interpretacji twierdzenia Denjoy–Younga–Saksa przydatne jest pojęcie kontyngensów zbioru w punkcie p. Jest to zbiór tych wszystkich półprostych o początku w punkcie p, które są granicami półprostych o tym samym początku, przechodzących przez inne punkty zbioru dążące do p. Twierdzenie Denjoy–Younga–Saksa głosi, że we wszystkich punktach wykresu funkcji, z wyłączeniem punktów, których odcięte tworzą zbiór miary zero, kontyngens wykresu albo pokrywa całą płaszczyznę, albo jest zawarty w półpłaszczyźnie, którą pokrywa, albo składa się z dwu półprostych tworzących styczną do wykresu. Współczynniki kierunkowe półprostych tworzących kontyngens to liczby pochodne funkcji. Samo twierdzenie najczęściej podaje się w postaci związków pomiędzy skrajnymi liczbami pochodnymi, pochodnymi Diniego. Tak też robili autorzy twierdzenia, zwracając jednak uwagę na jego treść geometryczną. Autor książki podał je w takiej postaci: „$D_+f = D^-f$ skończone prawie wszędzie w zbiorach $\{D_+f > -\infty\}$ i $\{D^-f < \infty\}$ (i tak samo dla pary D_-f, D^+f)". Nawet jeżeli czytelnik pokona trudności składni tego zapisu i zrozumie sens twierdzenia, to jak przypuszczam tylko w wyjątkowych wypadkach skojarzy je z prostą i piękną intuicją, która przyświecała autorom twierdzenia.

Wydaje się, że Autor — dbając niewątpliwie o ścisłość sformułowań — mniej troszczy się o ich przystępność i zrozumiałość. Stąd takie sformułowanie twierdzeń, że nie zawierają wszystkich założeń. Trzeba ich szukać w tekście wcześniejszym. Jest to poprawne, ale może prowadzić do przeoczeń. O niedbałym formułowaniu twierdzeń świadczy też zbędne powtarzanie. Oto w tezie twierdzenia 3 na str. 127 czytamy, że funkcja $\lambda(A) = \int_A f d\mu$ jest miarą i dalej: „Jeżeli $E = \bigcup_i E_i$ jest sumą rozłączną, skończoną lub przeliczalną zbiorów mierzalnych, to

$$\int_E f d\mu = \sum_i \int_{E_i} f d\mu \quad (E_i \cap E_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j)".$$

Mamy tu zbędne powtórzenie warunku przeliczalnej addytywności miary, a w nim samym warunku rozłączności zbiorów.

Przejdźmy w końcu do sprawy dwu uogólnień. Pierwszym jest wprowadzone przez Autora pojęcie liczby granicznej. Jest ono dogodne, pozwala jednolicie traktować zarówno granice funkcji, jak i granicę występującą w definicji całki. Nie widzę jednak celu określenia ogólnej s-różniczkowalności, gdy jedynym przykładem s-pochodnej, który autor oferuje czytelnikowi, jest zwykła pochodna, znana jeszcze ze szkoły średniej.

Recenzowana książka jest drugą obok książki R. Sikorskiego dostępną obecnie czytelnikowi pozycją w języku polskim poświęconą funkcjom rzeczywistym. Weszły do niej te części teorii, których użyteczność sprawdziła się w zastosowaniach do innych działów matematyki. Zdaje się, że może ona znaleźć czytelników właśnie wśród osób uprawiających te działy, przede wszystkim różne działy analizy, szukających ścisłych, pełnych i zwięźle przedstawionych informacji z podstawowego zakresu funkcji rzeczywistych.

Jan Stanisław Lipiński

Tadeusz Gerstenkorn, Tadeusz Śródka, *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1972, str. 432, cena zł 48.—

Zakres książki obejmuje treść podstawowego wykładu rachunku prawdopodobieństwa obowiązującego studentów matematyki wszystkich kierunków. Część I (kombinatoryka) składa się z dwóch rozdziałów: rozdział 1 zawiera informacje o wzorze Stirlinga, funkcjach gamma i beta