wmptm 1897

nad znakiem sumy m zamiast n. Zauważmy, że błędnie użytym symbolom M i m nadano już w tym samym dowodzie inne znaczenie niż znakom N i n, co utrudnia spostrzeżenie, że błąd jest zecerski.

Przejdźmy do sprawy interpretacji geometrycznej. Jak może ona być pożyteczna, zauważmy na przykładzie dwu twierdzeń, których dowody naszkicowano w ostatnim dodatku. Twierdzenie Sierpińskiego–Younga łatwo zapamiętać, jeżeli zauważy się, że jest to twierdzenie o przeliczalności zbioru ostrzy wykresu. Dla interpretacji twierdzenia Denjoy–Younga–Saksa przydatne jest pojęcie kontyngensów zbioru w punkcie p. Jest to zbiór tych wszystkich półprostych o początku w punkcie p, które są granicami półprostych o tym samym początku, przechodzących przez inne punkty zbioru dążące do p. Twierdzenie Denjoy–Younga–Saksa głosi, że we wszystkich punktach wykresu funkcji, z wyłączeniem punktów, których odcięte tworzą zbiór miary zero, kontyngens wykresu albo pokrywa całą płaszczyznę, albo jest zawarty w półpłaszczyźnie, którą pokrywa, albo składa się z dwu półprostych tworzących styczną do wykresu. Współczynniki kierunkowe półprostych tworzących kontyngens to liczby pochodne funkcji. Samo twierdzenie najczęściej podaje się w postaci związków pomiędzy skrajnymi liczbami pochodnymi, pochodnymi Diniego. Tak też robili autorzy twierdzenia, zwracając jednak uwagę na jego treść geometryczną. Autor książki podał je w takiej postaci: „$D_+f = D^-f$ skończone prawie wszędzie w zbiorach $\{D_+f > -\infty\}$ i $\{D^-f < \infty\}$ (i tak samo dla pary D_-f, D^+f)". Nawet jeżeli czytelnik pokona trudności składni tego zapisu i zrozumie sens twierdzenia, to jak przypuszczam tylko w wyjątkowych wypadkach skojarzy je z prostą i piękną intuicją, która przyświecała autorom twierdzenia.

Wydaje się, że Autor — dbając niewątpliwie o ścisłość sformułowań — mniej troszczy się o ich przystępność i zrozumiałość. Stąd takie sformułowanie twierdzeń, że nie zawierają wszystkich założeń. Trzeba ich szukać w tekście wcześniejszym. Jest to poprawne, ale może prowadzić do przeoczeń. O niedbałym formułowaniu twierdzeń świadczy też zbędne powtarzanie. Oto w tezie twierdzenia 3 na str. 127 czytamy, że funkcja $\lambda(A) = \int_A f d\mu$ jest miarą i dalej: „Jeżeli $E = \bigcup_i E_i$ jest sumą rozłączną, skończoną lub przeliczalną zbiorów mierzalnych, to

$$\int_E f d\mu = \sum_i \int_{E_i} f d\mu \qquad (E_i \cap E_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j)".$$

Mamy tu zbędne powtórzenie warunku przeliczalnej addytywności miary, a w nim samym warunku rozłączności zbiorów.

Przejdźmy w końcu do sprawy dwu uogólnień. Pierwszym jest wprowadzone przez Autora pojęcie liczby granicznej. Jest ono dogodne, pozwala jednolicie traktować zarówno granice funkcji, jak i granicę występującą w definicji całki. Nie widzę jednak celu określenia ogólnej s-różniczkowalności, gdy jedynym przykładem s-pochodnej, który autor oferuje czytelnikowi, jest zwykła pochodna, znana jeszcze ze szkoły średniej.

Recenzowana książka jest drugą obok książki R. Sikorskiego dostępną obecnie czytelnikowi pozycją w języku polskim poświęconą funkcjom rzeczywistym. Weszły do niej te części teorii, których użyteczność sprawdziła się w zastosowaniach do innych działów matematyki. Zdaje się, że może ona znaleźć czytelników właśnie wśród osób uprawiających te działy, przede wszystkim różne działy analizy, szukających ścisłych, pełnych i zwięźle przedstawionych informacji z podstawowego zakresu funkcji rzeczywistych.

Jan Stanisław Lipiński

Tadeusz Gerstenkorn, Tadeusz Śródka, *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1972, str. 432, cena zł 48.—

Zakres książki obejmuje treść podstawowego wykładu rachunku prawdopodobieństwa obowiązującego studentów matematyki wszystkich kierunków. Część I (kombinatoryka) składa się z dwóch rozdziałów: rozdział 1 zawiera informacje o wzorze Stirlinga, funkcjach gamma i beta

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

oraz współczynnikach Newtona. Rozdział 2 zawiera elementy kombinatoryki: wariacje, permutacje i kombinacje, z powtórzeniami i bez powtórzeń.

Część II książki składa się z siedmiu rozdziałów i dotyczy rachunku prawdopodobieństwa. Algebra zdarzeń wprowadzona jest w rozdziale 3; klasyczna i aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa, oraz najprostsze własności w rozdziale 4; podstawowe schematy (Bernoulliego, Poissona, Pascala, Pólya, Bayesa) stanowią treść rozdziału 5. Rozdział 6 dotyczy jednowymiarowych, a rozdział 7 wielowymiarowych zmiennych losowych. Wreszcie, w rozdziale 8 wprowadzone są funkcje charakterystyczne i w rozdziale 9 twierdzenia graniczne (lokalne i integralne twierdzenie de Moivre'a–Laplace'a, oraz najprostsze prawa wielkich liczb. Mocne prawo wielkich liczb rozważane jest jedynie dla przypadku schematu Bernoulliego). Każdy rozdział zawiera sporą liczbę zadań do samodzielnego rozwiązania; na końcu książki zebrane są odpowiedzi do zadań.

Jeżeli chodzi o zakres i sposób ujęcia, można by zrobić zastrzeżenie, że materiał książki nie jest zbyt nowoczesny; zwłaszcza twierdzenia graniczne potraktowane są troszkę po macoszemu. Nie jest to jednak zarzut poważny, jeżeli zważyć, że książka przeznaczona jest nie tylko dla matematyków, lecz również (a może przede wszystkim?) dla studentów innych kierunków oraz dla nauczycieli.

Materiał książki przedstawiony jest na ogół jasno, przejrzyście, z zachowaniem odpowiedniego stopnia ścisłości; zasadniczy tekst jest bogato ilustrowany przykładami. Te ostatnie zresztą powodują, że mimo stosunkowo skromnego zakresu, książka liczy aż 432 strony.

W związku z tym nasuwa się pewna uwaga o charakterze dydaktycznym, dotycząca, najogólniej rzecz biorąc, rozsądnego kompromisu między tym, co powoduje, że tekst jest trudny (a więc m. in. zwięzłością), a tym co go ułatwia (a więc m. in. przykładami, objaśnianiem przejść w dowodach, itp.).

Nie trzeba chyba nikogo przekonywać, że na to, aby czytelnikowi po przeczytaniu tekstu miało coś pozostać w głowie, materiał powinien stawiać pewien opór; w przeciwnym razie zostaje on zapomniany równie szybko, jak został przyswojony. Dlatego w podręcznikach umieszcza się zadania, studenci muszą przerabiać ćwiczenia do wykładu, itp. W pewnym sensie więc, im trudniejszy (w rozsądnych granicach) tekst, tym lepiej dla czytelnika. Nie oznacza to oczywiście, że zależność ta rozciąga się na całą skalę trudności: na drugim krańcu znajdują się teksty dydaktycznie chybione, zniechęcające większość czytelników, w których każde zdanie stanowi swoistą szaradę. Na pewno nie istnieje tu żadne uniwersalne optimum: stopień trudności tekstu powinien zależeć przede wszystkim od tego, dla kogo książka jest przeznaczona.

W przypadku recenzownej książki, wydaje się, że Autorzy posunęli się trochę za daleko w swoim dążeniu do jasności i przejrzystości wykładu, w rezultacie czego książka jest zbyt rozwlekła. Przykłady są rozwiązywane w tekście nadmiernie szczegółowo; to samo zresztą, choć w mniejszym stopniu, dotyczy dowodów twierdzeń. Działa to nużąco i pozbawia czytelnika nawet drobnej satysfakcji choćby mikroskopijnych samodzielnych „odkryć", których dokonuje się czytając teksty matematyczne. Ponadto, przy takim przedstawieniu materiału czytelnikowi trudno odróżnić to co w danym przykładzie czy dowodzie jest istotne i ważne, od pozostałych fragmentów.

Uwag szczegółowych jest stosunkowo niewiele. Pierwsza z nich dotyczy rozdziału 3 (zdarzenia), który jest niezbyt udany. Sam pomysł prezentacji nie jest może dydaktycznie całkiem chybiony: o ile dobrze zrozumiałem myśl Autorów, chcieli oni wyjść od intuicyjnego pojęcia zdarzenia, używając milcząco jako pojęcia pierwotnego „zajścia" zdarzenia określić równość, inkluzję, sumę itp. zdarzeń, i *zdefiniować* zdarzenia elementarne jako „atomy" odpowiedniej algebry, dochodząc do reprezentacji zdarzeń jako zbiorów. Przy tym podejściu zdarzenia elementarne byłyby zdarzeniami, w odróżnieniu od tradycyjnego ujęcia, w którym zdarzenia elementarne są zdarzeniami tylko wtedy, gdy zbiory jednoelementowe należą do algebry zdarzeń.

Przedstawienie tego podejścia wymaga jednak dość dużej staranności w rozróżnianiu elementów zbiorów (na których nie można wykonywać operacji mnogościowych) od zbiorów jednoelementowych, które można dodawać. Ponadto, ma ono jeszcze tę wadę, że trudno jest w sposób naturalny wprowadzić pojęcie algebry zbiorów różnej od algebry wszystkich podzbiorów. Autorzy sami wpadli tu w nastawione przez siebie pułapki; nawet jednak gdyby taką koncepcję roz-

działu zrealizować nienagannie, byłaby ona chyba trudniejsza od używanej tradycyjnie, wymagając od czytelnika większej dorzałości matematycznej.

W notce na stronie 60 piszą Autorzy, że w teorii prawdopodobieństwa zdarzenie elementarne jest pojęciem pierwotnym, oni jednak „...rezygnują z takiego ścisłego ujęcia na rzecz intuicyjnego zrozumienia omawianych pojęć". Określona zostaje najpierw równość, inkluzja i suma zdarzeń (w definicjach używa się pojęcia „zajścia" zdarzenia). Następnie, zdarzenie elementarne A definiowane jest jako takie, które nie daje się rozłożyć na sumę składników różnych od A (skąd m. in. wynika, że zbiór pusty jest zdarzeniem elementarnym, wobec czego 3 strony dalej robi się zastrzeżenie, że zdarzenia niemożliwego nie zaliczamy do zdarzeń elementarnych). Zdarzenie traktowane jest w dalszym ciągu tekstu niekiedy jako suma zdarzeń elementatnych, a niekiedy jako podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych (przy czym używane są dwa rodzaje zapisów; por. str. 61 i 62). Zamieszanie powoduje dodatkowo fakt, że Autorzy nie wprowadzają żadnych specjalnych oznaczeń dla rozróżnienia zdarzeń elementarnych i zdarzeń; w efekcie zarówno zbiory, jak i ich elementy oznaczane są tym samym rodzajem symboli i nie robi się rozróżnienia między elementami a zbiorami jednoelementowymi.

Po kilku stronach definicji różnych operacji na zdarzeniach i wielu przykładach, Autorzy na str. 68 wracają jeszcze raz do problemu zdarzeń elementarnych, pisząc „Niech dana będzie skończona przestrzeń zdarzeń elementarnych I. Weźmy pod uwagę dwa zdarzenia: A i B oraz odpowiadające im zbiory zdarzeń elementarnych A' i B'". Brak jest wyjaśnienia czym są zdarzenia A i B: przez kilka poprzedzających stron były one właśnie owymi zbiorami A' i B'. Można się jedynie domyślać, że A i B to jakieś deskrypcje, w rodzaju „Suma oczek na dwóch kostkach równa 8", „Mąż wyższy od żony" itp., podczas gdy A' i B' to zbiory w odpowiednio skonstruowanych przestrzeniach. Zresztą Autorzy natychmiast rezygnują z oznaczeń primowanych, pisząc że terminów *zbiór* i *zdarzenie* można używać wymiennie i od tego momentu oficjalnie niejako sankcjonują utożsamienie zbiorów i zdarzeń.

Następuje wykład teorii zbiorów, wychodzący z aksjomatyki Boole'a; przez blisko 5 stron dowodzi się podstawowych praw, takich jak przechodniość relacji inkluzji czy prawa de Morgana.

Wreszcie Autorzy wprowadzają pojęcia ciała zbiorów, pisząc (str. 73): „Niech dany będzie zbiór I dowolnych elementów. Z elementów tych tworzymy zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Zbiór utworzony z tych zbiorów oznaczmy symbolem R. Przynależność zbioru np. A_i do R będziemy oznaczać symbolem „ϵ", a zapis $A_i \epsilon R$ odczytywać: A_i należy do R. Zbiór R nazywać będziemy algebrą lub *ciałem* i oznaczać literą S, jeżeli w zbiorze tym wykonalne są działania dodawania i dopełnienia spełniające podane uprzednio aksjomaty Boole'a, tzn. ...". Tu po raz pierwszy pojawia się relacja ϵ; nazwiasem mówiąc, zarówno w tej, jak i w następnej definicji zbiór R oznaczany jest przez R, a nie przez S; przy określeniu σ-ciała nie ma żadnego wyjaśnienia, czym jest suma nieskończona zbiorów. Autorzy podają natomiast informację, że „Algebra borelowska zdarzeń również w przestrzeni o nieskończonej liczbie elementów jest izomorficzna (1) z algebrą borelowską zbiorów", a w odsyłaczu piszą: „Izomorfizm = odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna. Twierdzenie, o którym mowa, udowodnił w 1936 r. M. H. Stone."

Wreszcie, na zakończenie rozdziału następuje seria twierdzeń: orzekają one m. in., że każde dwa różne zdarzenia elementarne są rozłączne, oraz że „każde zdarzenie nieelementarne B, które jest elementem skończonej algebry zdarzeń daje się przedstawić jako suma zdarzeń elementarnych" (dowodzi się tu zresztą również jednoznaczności, która nie jest zapowiedziana w twierdzeniu), i na koniec twierdzenia: „Jeżeli algebra zdarzeń złożona jest z n zdarzeń elementarnach, to można utworzyć 2^n zdarzeń należących do tej algebry".

Wątpliwe jest, czy czytelnik odniesie wiele pożytku z tego rozdziału, a zwłaszcza z ostatnich jego partii dotyczących pojęć ciała i σ-ciała. Nawiasem mówiąc, podczas gdy wszystkie pojęcia dotyczące np. operacji na zdarzeniach i zbiorach są ilustrowane wieloma przykładami, w ostatniej części rozdziału nie ma ani jednego przykładu. Szkoda też, że Autorzy nie uznają innych symboli niż litery alfabetu łacińskiego i greckiego składane zwykłym drukiem, rezygnując z wygody używania innego rodzaju symboli dla elementów, innego dla zbiorów, itp.

Pozostałych uwag jest już tylko kilka. Twierdzenie na str. 386 w przytocznym sformułowaniu

jest fałszywe. W twierdzeniu 9.6.2 na str. 393 oznaczenia wprowadzone w założeniu nie występują ani w tezie, ani w dowodzie. W twierdzeniu na str. 369 powinno być $\lim y_n = y$. Tekst wyjaśniający na początku paragrafu 9.6 (str. 392) jest mylący; podana jest najpierw definicja: „Prawem wielkich liczb nazywamy każde twierdzenie, które rozważa (?) zbieżność stochastyczną do zera pewnego ciągu zmiennych losowych", następnie wyjaśnienie, że ponieważ zbieżność stochastyczna do zera jest równoważna słabej zbieżności ciągu dystrybuant do rozkładu jednopunktowego, rozważane prawa wielkich liczb nazywane są *słabymi*, w odróżnieniu od praw *mocnych*, o których będzie mowa dalej. I wreszcie prawa wielkich liczb zalicza się do twierdzeń integralnych. Jak na 8 wierszy tekstu, to spora dawka niejasnych lub fałszywych informacji.

Kłopot pochodzi m. in. stąd, że we wstępie do rozdziału 9 (str. 367) autorzy wyróżniają jedynie dwa typy twierdzeń granicznych: lokalne i integralne, wobec czego muszą jakoś zaklasyfikować prawa wielkich liczb.

Na str. 191–192, przy okazji konstrukcji zmiennej losowej o zadanej dystrybuancie, znajduje się zdanie: „... polegającymi na tym, że zmienna (nie losowa, lecz której zachowanie się zależy od przypadkowego doboru punktu x) ...". W tytule paragrafu na str. 194 lepiej byłoby użyć liczby mnogiej (zamiast „Pewne rozkłady zmiennej losowej skokowej"), i podobnie na str. 204 dla zmiennych losowych typu ciągłego. Na str. 88 mówi się „... gdy n jest przeliczalne..."; na str. 247 zaś o „liczbach oderwanych" (chodzi o liczby niemianowane).

Na początku str. 232 rozważany jest problem: „Jak ustalić ciężar nominalny jednej puszki, aby sklep był sprawiedliwy w stosunku do siebie i klientów, tzn. aby nie stracił, ani nie zyskał na ciężarze po sprzedaniu całej partii towarów?". Autorzy sugerują, aby ciężar nominalny ustalić jako wartość przeciętną wagi zawartości puszki — co oczywiście (ponieważ wariancja jest różna od zera) prowadzi do oszukania części klientów: fakt, że inni klienci dostali towar za darmo, jest dla nich raczej wątpliwą pociechą.

Zadania kombinatoryczne mają tradycyjnie dziwaczną treść — iloma sposobami można rozsadzić gości przy stole, wyciągać skarpetki z szuflady itp; zadanie ze str. 30 jest jednak chyba przesadnie dziwne: „Sześć osób ma do dyspozycji 5 różnokolorowych kieliszków i 2 różne gatunki win. Iloma sposobami mogą się napić?".

Resumując, pomimo wszystkich przytoczonych uwag, zarówno ogólnych (dotyczących stopnia łatwości książki oraz niezbyt udanego rozdziału 3), jak i uwag szczegółowych, jest to bardzo pożyteczna i wartościowa książka, która może być wielką pomocą dla studentów różnych kierunków, w szczególności nie studiujących matematykę (dla studentów matematyki jest ona bowiem chyba zbyt łatwa), a zwłaszcza dla nauczycieli.

Sugerowałbym, aby w następnym wydaniu uzupełnić rozdziały o kombinatoryce, włączając na przykład problemy związane z błądzeniem przypadkowym, zasadą odbicia, itp., rozbudować rozdział o twierdzeniach granicznych, oraz (być może) dołączyć rozdział o łańcuchach Markowa.

Robert Bartoszyński

Eustachy Tarnawski, *Matematyka dla studiów technicznych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1972, str. 519, cena zł 58.—

Autor postawił sobie za cel podanie w jednotomowym podręczniku podstawowych wiadomości z matematyki, niezbędnych dla studiów technicznych różnych kierunków. Jest to w polskiej literaturze podręcznikowej jedna z niewielu prób zawarcia całej potrzebnej inżynierowi wiedzy matematycznej w jednym tomie. Większość podręczników z matematyki dla studiów technicznych to opracowania dwu-, trzy-, a nawet i czterotomowe.

Opiniowana książka została podzielona na 9 rozdziałów oraz 33 paragrafy, których numeracja jest niezależna od numeracji rozdziałów.