wmptm 1897

Roman Duda, *O pojęciu wymiaru*, Biblioteczka Matematyczna, tom 31, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1972, str. 152, cena zł 20.—

Książka zawiera zarys teorii wymiaru i jest jednocześnie wykładem tej teorii dla czytelników, którzy z tej książki mają dowiedzieć się m. in. czym jest przekrój zbiorów i odległość punktów na płaszczyźnie; wykładem bez dowodów, ale z argumentacją popartą przykładami, których kolekcja może zadowolić także matematyka. Są w niej dane biograficzne, daty, cytaty z prac oryginalnych, fragmenty listów i rysunki (62). Bibliografia ma 87 pozycji; przeważają prace specjalne; prace bardzo specjalne są nie mniej liczne niż poglądowe i popularyzujące: cytuje się *Kalejdoskop matematyczny* Steinhausa, ale i dwie prace Roya. Zatem rzeczy interesujące znajdzie w tej książce każdy. Ale Autor pisze, że książka jest napisana tak, „by mógł ją czytać każdy". Trudne to zamierzenie Autora, jeśli, jak zobaczymy, chce on napisać o wymiarze wszystko.

O twierdzeniu Brouwera o niezmienniczości obszaru pisze się w tej książce, że ma „do dziś dużą wartość", a o krzywej Peany, że jej odkrycie „ujęciu Jordana zadało cios śmiertelny". Akcenty rozmieszczone są w książce nierówno: dużo ekspresji przy opisach osobliwości, a nawet nieregularności, i wręcz skąpy komentarz w sytuacjach geometrycznych, np. kiedy się pisze o sympleksie. Książka jest więc napisana tendencyjnie. Zdaniem recenzenta właściwa byłaby tendencja przeciwna.

Teoria wymiaru z późnych lat trzydziestych, taka jaką widać z *Dimension theory* Hurewicza i Wallmana i obu tomów *Topologie* Kuratowskiego, jest teorią wewnętrznie sharmonizowaną o konsekwentnej linii rozwoju: od twierdzenia Brouwera o niezmienniczości obszaru, sformułowania wymiaru pokryciowego i dowodu, że jest on równy wymiarowi geometrycznemu dla przestrzeni euklidesowych, do twierdzenia Mengera i Nöbelinga o zanurzeniu w przestrzeń euklidesową wymiaru $2n+1$ i twierdzeń Hurewicza o odwzorowaniach obniżających i podnoszących wymiar. Zakresem teorii były przestrzenie metryczne zwarte. Wśród nich znalazły się i paradoksalne, nie burzące teorii, lecz uwidaczniające niebanalność zjawisk: pary przestrzeni 2-wymiarowych zbudowanych przez Pontriagina o produkcie mającym wymiar mniejszy niż 4, i z ostatnich lat, ale w tej samej linii rozwoju, przykład Hendersona przestrzeni wymiaru nieskończonego bez podprzestrzeni domkniętych wymiaru skończonego, różnego od 0.

Wiele pojęć (np. zwartość) zyskało na stosowaniu ich w sytuacjach ogólniejszych. Ale nie wymiar. Kolejne modyfikacje dwu jego głównych wariantów, pokryciowego (dim) i indukcyjnego (ind i Ind), okazywały się niedopasowane do tych ogólnych sytuacji: dziesięć albo więcej konkurujących ze sobą pojęć wymiaru i brak zgody na któreś z nich — oto obraz teorii wymiaru poza zakresem przestrzeni metrycznych ośrodkowych.

Autor nie rezygnuje z teorii wymiaru przestrzeni ogólnych i nie waha się nawet przed omawianiem koncepcji, które zawiodły. Jest to niewątpliwa korzyść dla niektórych czytelników. Postawmy się jednak na razie w roli tych innych.

We wstępie jest kilka stronic o rozwoju geometrii od starożytności po początki Analysis Situs. Potem idzie rozdział o zbiorach, mający charakter roboczy; recenzent nie znalazł jednak w książce miejsca, gdzie Autor korzysta z własności trychotomii dla liczb kardynalnych (pisze się o niej na str. 22) lub ze stwierdzenia (str. 23), że „... istnieje nieskończenie wiele zbiorów nieprzeliczalnych, z których żadne dwa nie są równoliczne". Rozdział o topologii (str. 23) zaczyna się od nawiązania do Eulera, książki Listinga i do Poincarégo. A zaraz potem: „ Podstawowe dla topologii jest pojęcie przestrzeni topologicznej", i do końca rozdziału (str. 34) o niczym poza ogólnymi przestrzeniami topologicznymi się nie pisze. Topologia ogólna dostarcza formalizmu działom geometrycznym topologii (nie przeszkadza to temu, że gdzie indziej przeżywa ona w ostatnich latach prawdziwy renesans, dochodząc do granic subtelności w badaniach podstaw teorii zbiorów). Formalizmy matematyczne służą do opisu zjawisk, nie prowadzą do odkryć zjawisk ani nawet do ich dowodów, chyba że zjawisko dotyczy samego formalizmu. Zrozumienie przykładu (rys. 11, str. 25) topologii na zbiorze dwupunktowym, która jest jedynie klasy $T_0$, w niczym nie pomoże w rozumieniu twierdzeń Brouwera, ani żadnych innych twierdzeń z tej książki. Powiedzenie, że otwartość „chwyta najgłębsze treści leżące u podstaw przestrzeni geometrycznych" (str. 24) może wzbudzić niepotrzebne nadzieje u niedoświadczonego czytelnika.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

O wymiarze zaczyna się pisać na str. 34. Na razie o książce Abotta o krainie płaskości z kilkustronicowym cytatem i rysunkiem. Opowieści o płaszczakach, podobne do tej, często się spotyka u autorów książek popularnych z teorii względności: dość dobrze przygotowują do zrozumienia czwartego wymiaru. Że to się tu może przydać, recenzent nie jest przekonany.

Następują przykłady zbioru Cantora, dywanu i krzywej trójkątowej Sierpińskiego oraz krzywej Peany ilustrujące trudności w określeniu wymiaru 0 i 1. Krzywa Peany ilustruje trudności określenia linii przez przedstawienie parametryczne. Ale kiedy na str. 53 przedstawienie parametryczne jest z założenia homeomorfizmem, cały tekst z wyjątkiem niejasnych zastrzeżeń sugeruje czytelnikowi (chodzi teraz przeważnie o powierzchnie), że sprawa jest załatwiona. Czytamy (str. 53): „Przestrzeń $M$ ma wymiar $n$ gdy dla każdego punktu $p \in M$ istnieje homeomorfizm $f$ między $n$-wymiarową kostką otwartą $Q_n$ a pewnym otoczeniem w $M$ punktu $p$ ... Podzbiór $f(Q_n)$ nazywamy mapą na $M$ w otoczeniu $p$, ... Czy określenie to jest poprawne? Nie przesądzając w tej chwili kwestii, zauważmy ..." Pytanie następuje po definicji mapy, ale zaraz potem autor wyjaśnia, że wątpliwość dotyczy wymiaru; zgadzamy się. Dlaczego jednak zamiast wyrażenia nieokreślonych wątpliwości Autor nie napisał po prostu, że takie określenie wymiaru linii, powierzchni, i ogólnie rozmaitości $n$-wymiarowej byłoby jawnie niepoprawne, gdyby się okazało, że przestrzenie euklidesowe różnych wymiarów mogą być homeomorficzne. Twierdzenie Brouwera negujące tę możliwość jest przed czytelnikiem długo trzymane w tajemnicy; sformułowane jest na str. 64; dla mniej uważnego czytelnika ginie w tekście między wierszami (41 innych twierdzeń jest wyodrębnionych z tekstu i opatrzonych nagłówkiem „Twierdzenie" grubym drukiem). Mimo wyrażonych przez Autora wątpliwości co do poprawności określenia rozmaitości $n$-wymiarowej, mówi się o nich dalej jako o czymś dobrze ugruntowanym, co może sugerować czytelnikowi, że te wątpliwości nie są może takie ważne. Inna uwaga: butelka Kleina, płaszczyzna rzutowa etc. to ciekawe powierzchnie (5 rysunków na str. 55), ale dla dalszego ciągu wykładu znaczenia nie mają.

Rozdział o homojach w sensie Frécheta zwraca uwagę czytelnika jeszcze w inną stronę. Potem następuje rozdział zatytułowany „Spostrzeżenie Lebesgue'a".

Jeśli chodzi o ścisłość, Autorowi nie można nic zarzucić. Lebesgue nie wprowadził pojęcia wymiaru, zwanego dzisiaj pokryciowym, i rzeczywiście zrobił jedynie spostrzeżenie, że przestrzeń euklidesową $n$-wymiarową można pokryć zbiorami domkniętymi o średnicy mniejszej od z góry danej liczby i tak, by krotność tego pokrycia nie przekraczała $n+1$; jego dowód, że liczby $n+1$ nie da się zastąpić mniejszą, miał lukę. Czas nie zostawia rzeczy przeszłych niezmiennymi: odkrycia bywają zapominane, a spostrzeżenia nabierają rangi odkryć. Tak było ze spostrzeżeniem Lebesgue'a. Jeśli obecnie mówi się wymiar, bez przymiotnika, to jeśli nie myśli się o wymiarze przestrzeni euklidesowej, to myśli się o wymiarze, którego idea idzie od Lebesgue'a, a sformułowanie pochodzi od Čecha. Wymiarowi pokryciowemu Autor nigdy nie oszczędza przymiotnika; dokładny w podawaniu szczegółów biograficznych Autor ogranicza się do informacji, że „spostrzeżenie Lebesgue'a postanowiono ... (kto? kiedy? — przyp. J. M.) potraktować jako definicję".

Z tą lakonicznością kontrastują rozdziały o wymiarze indukcyjnym. Recenzent nie chciałby się jednak wdawać w polemikę co do wagi odkryć znakomitych autorów. Poprzestańmy na stwierdzeniu, że Autor używa dość dużego zasobu przymiotników wartościujących: wspaniały, niewielkie (znaczenie), pięknie napisana, wielki, ogromna (wartość), elegancki (dowód), wybitny, etc., co do takich polemik prowokuje.

Rozdział „Rozwiązanie Mengera ..." zawiera m. in. doświadczenie myślowe z punktami „bryły (przestrzeni 3-wymiarowej)", z której otoczenie tego punktu ma być wycinane piłą (recenzentowi się wydaje, że trudności techniczne, które widać, mogą odwrócić uwagę mało doświadczonego czytelnika od trudności matematycznych, których może nawet nie dostrzeże). Z tekstu, który zajmuje 2 stronice (str. 71–73) wynika, że chodzi o rozumowanie motywacyjne, a nie o dowód. Czy jednak nie znajdą się czytelnicy, na których to rozumowanie sprawi wrażenie szkicu dowodu, że wymiar indukcyjny bryły jest 3? Przyczynia się do tego używanie tego samego terminu przestrzeni 3-wymiarowej dla bryły, gdzie wymiar to wymiar euklidesowy, i dla przestrzeni $n$-wymiarowej, gdzie $n$ znaczy wymiar indukcyjny. Jeśli tekst jest pisany dla matematyków, to nie ma biedy; co prawda jest wtedy zbędny.

Najwięcej informacji o wymiarze jest w rozdziale „Teoria wymiaru Mengera–Urysohna" (str. 82–95), gdzie streszcza się *Dimensionstheorie* Mengera z 1930 r. Później, kiedy podobnie streszczana jest *Dimension theory* Hurewicza i Wallmana, Autor pisze o książce Mengera, że sprawia „wrażenie jakby trochę przypadkowego zbioru rozmaitych wyników". Rzeczywiście, rozdział ten polega na wymienieniu pod rząd 17 twierdzeń różnej wagi: i o tym, że każda przestrzeń słabo jednowymiarowa jest dziedziczna niespójna (dziesiąte) i że każdy podzbiór $n$-wymiarowej przestrzeni euklidesowej zawierający zbiór otwarty ma wymiar $n$ (czternaste).

Rozdział „Teoria krzywych (linii)" (str. 96–101) jest dygresją: problematyka ta „żyje życiem od teorii wymiaru prawie niezależnym". Na nieco więcej niż stronicy pisze się o krzywej uniwersalnej Sierpińskiego, o kontinuum dziedzicznie nierozkładalnym Knastera, o krzywej Whyburna będącej dziedzicznym przekrojem płaszczyzny i o krzywej Andersona i Choqueta nie zawierającej swoich obrazów homeomorficznych.

Następnie (str. 101) pisze się o twierdzeniu Aleksandrowa zapewniającym dla każdej przestrzeni zwartej metrycznej $n$-wymiarowej i każdego $\varepsilon$ dodatniego istnienie $\varepsilon$-odwzorowania tej przestrzeni na wielościan $n$-wymiarowy. Rozdział ten ma nazwę „Wymiar metryczny". Wspomniane $\varepsilon$-odwzorowania są dostatecznie ważne i umieszczenie terminu $\varepsilon$-odwzorowanie w tytule skierowałoby uwagę czytelnika w dobrym kierunku. Nie szkodziłoby w tym rozdziale wspomnieć, i to szerzej, o odwzorowaniach w nerw pokrycia, głównej metodzie, poprzez którą teorię wymiaru stosuje się w topologii geometrycznej. Przestrzeń ma wymiar metryczny $n$, kiedy $n$ jest najmniejszą liczbą, dla której spełniona jest teza twierdzenia o $\varepsilon$-odwzorowaniach. Poza zakresem przestrzeni metrycznych zwartych może się zdarzyć (Sitnikow, 1953), że to najmniejsze $n$ jest mniejsze od wymiaru przestrzeni. Wśród matematyków kontrprzykłady są cenione bardzo wysoko: jeśli twierdzenia dają związki między zjawiskami, to (kontr)przykłady są samymi zjawiskami. Mimo to nie opatruje się rozdziału o postulatach teorii miary tytułem: zbiory niemierzalne.

Od str. 107, gdzie zaczyna się mówić o wymiarze homologicznym, książka przestaje być dla niematematyków: nie pomoże określenie brzegu łańcucha, ani określenie produktu dwu przestrzeni topologicznych dla zrozumienia wspomnianego już przykładu Pontriagina.

Porzuca się zakres przestrzeni metrycznych zwartych i przechodzi do przestrzeni metrycznych ośrodkowych, aby omówić (na str. 118–125) książkę Hurewicza i Wallmana (1941), która traktuje teorię wymiaru właśnie w tym zakresie. Formułuje się twierdzenie o przegródkach, o charakteryzacji wymiaru przez odwzorowania w sfery i o wymiarze produktu. Kolekcja wymiarów powiększyła się do trzech, dim, ind, i Ind ale w tym zakresie wszystkie są one równe.

Omówienie książki Nagaty *Modern dimension theory* (1965), traktującej o wymiarze przestrzeni metrycznych, zajmuje około pięć stronic i poprzedzone jest informacją o równości dim = Ind dla przestrzeni metrycznych i o przykładzie Roya przestrzeni metrycznej, dla której ind < dim. Jest wzmianka o przestrzeniach przeliczalnie wymiarowych i słabo nieskończenie wymiarowych.

Ostatni rozdział to „Posłowie", a przedostatni to „Uwagi końcowe", w którym jest mowa o próbach aksjomatyzacji wymiaru. Ale przedtem jest mowa o trudnościach wewnętrznych teorii wymiaru. Autor cytuje wypowiedź Nagaty z Sympozjum Praskiego z 1966 r. Pesymizm tej wypowiedzi jest wyraźny: teoria wymiaru powinna określić swoje cele, ograniczyć zakres przestrzeni, ustalić te własności, które powinien mieć wymiar, aby go nazwać wymiarem, a okazuje się, że po pięćdziesięciu latach istnienia teorii nie ma takich postulatów. Już po wyjściu książki R. Dudy została znaleziona aksjomatyka wymiaru dim w zakresie przestrzeni metrycznych (Szczepin, konferencja topologiczna w Tbilisi, 1972). Czy zadowoli specjalistów?

Posłowie jest wyrażeniem przekonań Autora. Kończy się zdaniem: „Z tego punktu widzenia teoria wymiaru jest jedną z najżywotniejszych obecnie teorii matematycznych". Wyciąga się ten wniosek z przekonania, że teoria, w której wszystko jest znane „jest martwa". Zgadzamy się z Autorem, że teoria wymiaru nie jest martwa; więcej, że trwają w niej gorączkowe poszukiwania. Ale dążeniem każdej teorii jest dążenie do zamknięcia się i ... stania się martwą. Wiele poważnych teorii spotkał ten los, a ludzie, którzy się do tego przyczynili, odeszli od nich z poczuciem spełnionego zadania. Czy nie stało się tak z algebrą Boole'a, fragmentem topologii ogólnej w zakresie przestrzeni całkowicie regularnych, z teorią kontinuów nieprzywiedlnych? Ożywienie wynikające

z niemożności rozsądnego zamknięcia teorii może nie oznaczać żywotności, lecz rozgorączkowanie problematyką, prowadzące do zniechęcenia i opuszczenia jej przez ludzi.

Była mowa, że książka zawiera wszystko o wymiarze. Jest prawie wszystko: brak jest omówienia wymiaru przestrzeni jednostajnych, a więc książki Isbella *Uniform spaces* (1964) oraz (z ważniejszych rzeczy) szerszych informacji o wymiarze nieskończonym. Ale to nie jest zarzut, bo granica tematyki objętej książką musi gdzieś przebiegać.

Z tego omówienia wynika, że książkę R. Dudy należy traktować poważnie. Recenzent rozumie ją jako zarys historii teorii wymiaru, szczegółowy i nie pomijający trudnych jej fragmentów, także tych, które straciły aktualność. Jest tendencyjny, tak jakby Autor chciał przeprowadzić dowód nierówności $\dim < \operatorname{ind}$ w sensie znaczenia. Ale wiele rzeczy, w których gotowiśmy widzieć tę tendencję, okazuje się przy dokładniejszym się im przyjrzeniu rezultatem skrupulatności w drążeniu prawdy historycznej, nie zawsze pokrywającej się z legendą rozpowszechnioną wśród matematyków. Ta książka powinna była być napisana dla matematyków. Wtedy i owe przymiotniki wartościujące byłyby zbędne (także przymiotniki takie, jak polski, francuski, szwajcarski przed nazwiskami matematyków), nie byłoby rozdziału o zbiorach, o zbiorach otwartych i domkniętych, a może i o opowieści Abotta. Szkoda, że tak się od razu nie stało, bo i tak, wbrew zapowiedzi Autora (ale może nie wbrew intencji), nie jest to książka dla każdego.

*Jerzy Mioduszewski*

Jerzy Browkin, *Przykłady pierścieni i ciał w programie szkolnym*, Biblioteczka Nauczyciela Matematyki, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1972, str. 64, cena zł 9.—

Książka Jerzego Browkina stanowi cenną pozycję Biblioteczki Nauczyciela Matematyki. Wyjaśnione są w niej pojęcia pierścienia i ciała przemiennego w związku z zagadnieniami znanymi uczniom z nauczania szkolnego. Książka napisana jest poprawnie i ściśle, przy tym sformułowania są proste, pisane w sposób zrozumiały nie tylko dla nauczyciela, ale i dla bardziej wyrobionego ucznia. Konstrukcja całości jest przejrzysta, podane przykłady interesujące, dowody jasne i nie potraktowane zbyt formalnie.

Opracowując dokładnie pierścienie i ciała Autor przypomina wiele podstawowych pojęć matematyki, jak np. izomorfizmu i klas abstrakcji oraz daje głębsze ujęcie „klasycznych" tematów szkolnych. Cenne jest zwrócenie uwagi na własności pewnych zbiorów funkcji, gdyż w szkole bada się na ogół tylko każdą funkcję z osobna. Ciekawe są dwa równologłe ujęcia teorii wielomianów: jako ciągów współczynników i jako funkcji zmiennej rzeczywistej; na specjalną uwagę zasługuje teoria funkcji wymiernych, z której ujęciem są w szkole trudności.

Język pracy jest łatwy i poprawny, nie wiem tylko, dlaczego Autor pisze „jedynka" zamiast „jedność" i, wbrew językoznawcom, „funkcja przyjmuje", a nie „funkcja przybiera" wartości.

Uważam recenzowaną pracę za bardzo dobrą, sądzę jednak, że byłaby bardziej przydatna, gdyby ją Autor nieco rozszerzył. Przede wszystkim potrzebne jest szersze opracowanie ciała liczb rzeczywistych.

Z punktu widzenia przystępności tekstu brakuje w nim przykładów wyjaśniających sens trudniejszych definicji. Aby rozwiązać zadania dotyczące jakiegoś nowego pojęcia, czytelnik musi nie tylko przyswoić jego definicję, ale również „wyobrazić sobie, co o chodzi". Na przykład dzielnik zera jest pojęciem zupełnie nieintuicyjnym dla kogoś, dla kogo działanie jest właściwie wyłącznie działaniem arytmetycznym w zakresie liczb rzeczywistych.

Poza tym bardzo potrzebne byłyby rozwiązania zadań na końcu książki. Zadania są ciekawe, dobrze dobrane i w gruncie rzeczy nietrudne. Jednakże wielu czytelników jeżeli nawet przeprowadzi żądany dowód, to nie będzie miało pewności, czy jest on pełny i poprawnie sformułowany.

Oba te braki można będzie usunąć w drugim wydaniu książki, którą należy gorąco polecić wszystkim nauczycielom matematyki w szkołach średnich.

*Aniela Ehrenfeucht*