jakąś ładną, elementarną aksjomatykę, choćby taką, jaką podaje R. Hartshorne w *Foundations of projective geometry*, i zamieścić ją raczej na początku książki.

Są to jednak drobne usterki, a książka tak przejrzyście ukazuje geometrię rzutową, że warto ją polecić uwadze prowadzących zajęcia fakultatywne z matematyki.

Jerzy Bednarczuk

Tadeusz Rumak, *Równania różnicowe*, Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Rzeszów 1972, str. 152, cena zł 10.—

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Recenzowany skrypt powstał, jak to zaznacza w przedmowie Autor, w oparciu o wykłady i seminaria z równań różnicowych prowadzone w latach 1967–1971 na ostatnich latach studiów matematycznych w WSP w Rzeszowie. Skrypt zawiera sześć następujących rozdziałów: 1. Wstępne wiadomości z rachunku różnicowego. 2. Równania różnicowe — rozważania wstępne i zagadnienia podstawowe. 3. Równania liniowe. 4. Układy liniowe równań różnicowych. 5. Nierówności różnicowe. 6. Stabilność rozwiązań równań różnicowych.

Pierwsze cztery rozdziały stanowiące około 60% objętości skryptu mają klasyczne tytuły i klasyczną zawartość; jedynie tytuł § 18 „Układy liniowe równań różnicowych o współczynnikach okresowych" oraz tytuły dwóch ostatnich rozdziałów odbiegają od szablonu większości „Wstępów do równań różnicowych" i zawierają pewne własne opracowania Autora. Z wypowiedzi Autora na str. 4 i str. 96 wynika, że za najcenniejsze w skrypcie uważa on opracowanie własne dotyczące: stabilności układów równań różnicowych, układów równań różnicowych okresowych, nierówności różnicowych oraz dyskretnych odpowiedników lematu Gronwalla i jego uogólnień.

W rozdziale I zawierającym elementarne i dość szczupłe wiadomości z rachunku różnicowego nie podano nawet w postaci ćwiczenia takiego podstawowego przekształcenia, jakim jest niewątpliwie wzór Abela na sumowanie przez części, który stanowi odpowiednik różnicowy wzoru na całkowanie przez części.

W rozdziale II już na samym początku zdefiniowano w sposób wysoce nieprecyzyjny dyskretne równanie różnicowe zwyczajne rzędu m $(m \in N)$ jako relację postaci

$$F(k, y(k), \Delta y(k), \Delta^2 y(k), \ldots, \Delta^m y(k)) = 0, \tag{1}$$

gdzie $F(k, u_0, u_1, \ldots, u_m)$ jest znaną funkcją określoną w pewnym zbiorze Q przestrzeni $(m+2)$-wymiarowej, zaś $\{y(k)\}_{k \in J}$ $(J \subset C)$ jest szukaną funkcją. W myśl tej definicji równanie różnicowe liniowe

$$2y(k)+3\Delta y(k)-\Delta^3 y(k) = k \Leftrightarrow 3y(k+2)-y(k+3) = k \tag{2}$$

byłoby równaniem trzeciego rzędu, podczas gdy w rzeczywistości jest ono rzędu pierwszego, zgodnie z ogólnie przyjętą definicją.

W rozdziale III zawierającym standardowe wiadomości o równaniach różnicowych liniowych dużo miejsca poświęcono równaniom o stałych współczynnikach i ograniczono się wyłącznie do zagadnienia Cauchy'ego. Nie ma tam natomiast nawet wzmianki o interesującej i płodnej tematyce zagadnień brzegowych dla równań różnicowych liniowych, która zajęła już dawno poczesne miejsce w literaturze przedmiotu. Na str. 39 znajdujemy nieścisłą definicję równania różnicowego liniowego rzędu m. Ilustracja metody uzmienniania stałych na str. 56–57 na niezbyt trafnie wybranym przykładzie równania liniowego o stałych współczynnikach

$$y(k+3)-9y(k+2)+24y(k+1)-20y(k) = 3k+1 \tag{3}$$

prowadzi do żmudnych rachunków i dość skomplikowanego i co gorsza błędnego wyniku. Wydaje się, że lepiej byłoby zilustrować tę metodę na przykładzie równania liniowego o zmiennych współczynnikach, figurującego w ćwiczeniu 1 na str. 57, ponieważ w tym przypadku do wyznaczenia

rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego nie można zastosować metody nieoznaczonych współczynników.

W rozdziale IV Autor poświęca wiele uwagi układom liniowym równań różnicowych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach, a w § 18 przedstawia pewne wyniki własne stanowiące tylko przypadki szczególne odpowiednich twierdzeń z prac Masłowskiej i Kowala z lat 1957–1958, które nie są cytowane w skrypcie. Przy lekturze rozdziału V traktującego o układach nierówności różnicowych pierwszego rzędu i dyskretnych odpowiednikach niektórych wersji lematu Gronwalla odniosłem wrażenie, że Autor skryptu nie zna bibliografii przeszło 50 oryginalnych prac o nierównościach różnicowych i ich zastosowaniach, które ukazały się w latach 1947–1971. Nic więc dziwnego, że wyniki § 20 uważane przez Autora za nowe są tylko szczególnymi wnioskami z odpowiednich twierdzeń Tieptina z 1960 r., wyniki zaś § 21 — z prac Jonesa, Willeta i Wonga z lat 1964–1965. W rozdziale tym pozostawiają do życzenia definicja rzędu nierówności różnicowej i definicja rozwiązania takiej nierówności, która brzmi: „Przez rozwiązanie na zbiorze S nierówności różnicowej będziemy rozumieć każdą funkcję, która spełnia na zbiorze S daną nierówność różnicową". Zgodnie z tą definicją funkcja $u = \varphi(k) = k^2+1$ określona dla $k \geqslant 0$ jest rozwiązaniem na zbiorze $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ nierówności różnicowej

$$u(k+1)+(k^2+1)u(k) > 0 \quad \text{dla} \quad k \in C, \tag{4}$$

ponieważ mamy

$$\varphi(k+1)+(k^2+1)\varphi(k) = (k+1)^2+1+(k^2+1)^2 > 0 \quad \text{dla } k = 0, 1, \ldots$$

Biorąc teraz pod uwagę rozwiązanie $y = y(k)$ odpowiadającego nierówności (4) równania różnicowego

$$y(k+1)+(k^2+1)y(k) = 0 \tag{5}$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$ widzimy, że rozwiązanie to przyjmuje następujące wartości $y(1) = -1$, $y(2) = 2$, $y(3) = -10$, $y(4) = 100$, zaś funkcja porównawcza $u = \varphi(k)$ spełniająca ten sam warunek początkowy $\varphi(0) = 1$ i nierówność (4) przyjmuje wartości $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 5$, $\varphi(3) = 10$, $\varphi(4) = 17$, a więc mamy $y(k) < \varphi(k)$ dla $k = 1, 2, 3$, ale $y(4) > \varphi(4)$.

Przykład ten wskazuje, że definiowanie rozwiązania nierówności różnicowej w oderwaniu od związanego z nią ściśle rozwiązania równania różnicowego i warunków początkowych (lub brzegowych) nie ma większego sensu i może prowadzić do nieporozumień.

W rozdziale VI przeważają opracowania własne Autora, które uważa on za ogólniejsze w stosunku do wyników klasycznych już prac O. Perrona i W. Hahna cytowanych w skrypcie. Jak łatwo się o tym przekonać, prace wielu autorów (Bellmam (1947), Harris i Sibuya (1964), Kowal (1955, 1957), Masłowskaja (1966), Panow (1960), Sugiyama Shohei (1971)), zapewne nie znane wcale Autorowi, zawierają znacznie ogólniejsze twierdzenia na ten temat. W szczególności dyskretny odpowiednik funkcji Lapunowa podany w § 25 można znaleźć w pracy Kowala (1955) w ogólniejszej postaci. Reasumując należy stwierdzić, że w swojej obecnej postaci recenzowany skrypt nie jest pomocą naukową godną polecenia szerszemu ogółowi Czytelników zainteresowanych równaniami różnicowymi i ich zastosowaniami.

Rościsław Rabczuk

K. Hinderer, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1972, str. 247.

Napisany przez profesora Instytutu Stochastyki (!; στοχαζεσθαι — domyślać się czegoś, zgadywać coś, odgadywać) Matematycznej Uniwersytetu w Hamburgu i bardzo starannie wydany w serii Hochschultexte (Podręczniki Uniwersyteckie) podręcznik jest przeznaczony przede wszystkim dla studentów matematyki i matematyzujących studentów innych specjalności. Pomimo rzucającego się w oczy i zapewne znaczącego podobieństwa tytułów, książka nie zawiera tak głębokich