wmptm 1897 263

rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego nie można zastosować metody nieoznaczonych współczynników.

W rozdziale IV Autor poświęca wiele uwagi układom liniowym równań różnicowych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach, a w § 18 przedstawia pewne wyniki własne stanowiące tylko przypadki szczególne odpowiednich twierdzeń z prac Masłowskiej i Kowala z lat 1957–1958, które nie są cytowane w skrypcie. Przy lekturze rozdziału V traktującego o układach nierówności różnicowych pierwszego rzędu i dyskretnych odpowiednikach niektórych wersji lematu Gronwalla odniosłem wrażenie, że Autor skryptu nie zna bibliografii przeszło 50 oryginalnych prac o nierównościach różnicowych i ich zastosowaniach, które ukazały się w latach 1947–1971. Nic więc dziwnego, że wyniki § 20 uważane przez Autora za nowe są tylko szczególnymi wnioskami z odpowiednich twierdzeń Tieptina z 1960 r., wyniki zaś § 21 — z prac Jonesa, Willeta i Wonga z lat 1964–1965. W rozdziale tym pozostawiają do życzenia definicja rzędu nierówności różnicowej i definicja rozwiązania takiej nierówności, która brzmi: „Przez rozwiązanie na zbiorze S nierówności różnicowej będziemy rozumieć każdą funkcję, która spełnia na zbiorze S daną nierówność różnicową". Zgodnie z tą definicją funkcja $u = \varphi(k) = k^2+1$ określona dla $k \geqslant 0$ jest rozwiązaniem na zbiorze $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ nierówności różnicowej

$$u(k+1)+(k^2+1)u(k) > 0 \quad \text{dla} \quad k \in C, \tag{4}$$

ponieważ mamy

$$\varphi(k+1)+(k^2+1)\varphi(k) = (k+1)^2+1+(k^2+1)^2 > 0 \quad \text{dla } k = 0, 1, \ldots$$

Biorąc teraz pod uwagę rozwiązanie $y = y(k)$ odpowiadającego nierówności (4) równania różnicowego

$$y(k+1)+(k^2+1)y(k) = 0 \tag{5}$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$ widzimy, że rozwiązanie to przyjmuje następujące wartości $y(1) = -1$, $y(2) = 2$, $y(3) = -10$, $y(4) = 100$, zaś funkcja porównawcza $u = \varphi(k)$ spełniająca ten sam warunek początkowy $\varphi(0) = 1$ i nierówność (4) przyjmuje wartości $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 5$, $\varphi(3) = 10$, $\varphi(4) = 17$, a więc mamy $y(k) < \varphi(k)$ dla $k = 1, 2, 3$, ale $y(4) > \varphi(4)$.

Przykład ten wskazuje, że definiowanie rozwiązania nierówności różnicowej w oderwaniu od związanego z nią ściśle rozwiązania równania różnicowego i warunków początkowych (lub brzegowych) nie ma większego sensu i może prowadzić do nieporozumień.

W rozdziale VI przeważają opracowania własne Autora, które uważa on za ogólniejsze w stosunku do wyników klasycznych już prac O. Perrona i W. Hahna cytowanych w skrypcie. Jak łatwo się o tym przekonać, prace wielu autorów (Bellmam (1947), Harris i Sibuya (1964), Kowal (1955, 1957), Masłowskaja (1966), Panow (1960), Sugiyama Shohei (1971)), zapewne nie znane wcale Autorowi, zawierają znacznie ogólniejsze twierdzenia na ten temat. W szczególności dyskretny odpowiednik funkcji Lapunowa podany w § 25 można znaleźć w pracy Kowala (1955) w ogólniejszej postaci. Reasumując należy stwierdzić, że w swojej obecnej postaci recenzowany skrypt nie jest pomocą naukową godną polecenia szerszemu ogółowi Czytelników zainteresowanych równaniami różnicowymi i ich zastosowaniami.

Rościsław Rabczuk

K. Hinderer, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1972, str. 247.

Napisany przez profesora Instytutu Stochastyki (!; στοχαζεσθαι — domyślać się czegoś, zgadywać coś, odgadywać) Matematycznej Uniwersytetu w Hamburgu i bardzo starannie wydany w serii Hochschultexte (Podręczniki Uniwersyteckie) podręcznik jest przeznaczony przede wszystkim dla studentów matematyki i matematyzujących studentów innych specjalności. Pomimo rzucającego się w oczy i zapewne znaczącego podobieństwa tytułów, książka nie zawiera tak głębokich

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

twierdzeń, jak wydany przed czterdziestu laty przez to samo wydawnictwo 60-stronicowy traktat Kołmogorowa[1]). Nie robię z tego zarzutu, bo książka daje to, co we wstępie obiecuje Autor, jest z pewnością bardzo pożyteczna dla początkujących adeptów probabilistyki (szczególnie dla osób bez głębszego przygotowania z funkcji rzeczywistych) i moim zdaniem prowadzi ich we właściwym kierunku. Autor nie sili się w niej na finezyjne twierdzenia i uogólnienia, ale robi robotę elegancką i precyzyjną matematycznie oraz przemyślaną dydaktycznie.

Czego można się z niej nauczyć? Książka zaczyna się od 70-stronicowego rozdziału o dyskretnych (przeliczalnych) przestrzeniach probabilistycznych, którego początek to niebagatelna dawka heurezy, usprawiedliwiającej wprowadzenie modelu Kołmogorowa i krótka, pobieżna historia przedmiotu. Potem trochę kombinatoryki, dyskretne zmienne losowe oraz rozkłady, prawdopodobieństwa warunkowe, warunkowe gęstości i produkty, niezależność, wartość oczekiwana i wariancja, ładny paragraf o funkcjach tworzących i na zakończenie przegląd najważniejszych rozkładów dyskretnych spotykanych w „życiu" (chyba probabilisty). 60-stronicowy drugi rozdział jest poświęcony wyłożeniu pomocniczych narzędzi z teorii miary i całki. Wykład jest tutaj dość standardowy, ale ściśle dostosowany do potrzeb probabilistyki. Autor unika teoriomiarowego baroku, ale chwilami widać, że proza funkcji rzeczywistych mu nie wystarcza, bo co pewien czas ulega pokusie zacytowania czegoś wyjątkowego, jak np. wyniku Solovaya (Ann. of Math. 1970) o istnieniu modelu teorii mnogości, w którym każdy zbiór na prostej jest mierzalny według Lebesgue'a. Trzeci rozdział (100 str.) nosi tytuł „Ogólne przestrzenie probabilistyczne" i, *mutatis mutandis*, jest rozplanowany podobnie jak rozdział pierwszy. Oczywiście zamiast funkcji tworzących mamy tutaj transformatę Laplace'a i funkcje charakterystyczne, ale prawdę mówiąc Autor nie robi z tych narzędzi zbyt wielkiego użytku, bo w kończącym właściwy tekst 15-stronicowym paragrafie o zadaniach związanych z nieskończonymi rodzinami zmiennych losowych znajdujemy tylko graniczne twierdzenie Moivre'a–Laplace'a (i garść faktów o prostych procesach stochastycznych).

Podręcznik unika twierdzeń trudniejszych. Czytelnik nie znajdzie tutaj ani twierdzenia Kołmogorowa o granicach odwrotnych przestrzeni z miarą, ani twierdzenia Bochnera, ani mocnych praw wielkich liczb, ani ogólnych twierdzeń granicznych, ani nawet lematu Borela–Cantelliego czy twierdzenia o trzech szeregach. Autor uczciwie nie ukrywa ich istnienia, ale wzmianki o nich usuwa do Uzupełnień. Zawarte w nich dane bibliograficzne, ogromna ilość dokładnie przerachowanych przykładów, jak i zamieszczane po każdym paragrafie zadania są integralnymi składnikami tekstu. Spis literatury zawiera 109 pozycji (w tym tylko 9 prac oryginalnych — reszta to monografie i podręczniki) i daje bardzo dobre pojęcie o tym, co należałoby czytać po przestudiowaniu recenzowanej książki. Książkę kończą indeks rzeczowy i dość użyteczny w tym wypadku spis symboli. $\circ\!\!=$ znaczy w książce „bez zmniejszania ogólności" (Ohne Einschränkung der Allgemeinheit) i wprowadzenie takiego poręcznego symbolu zachęcającego do jego (nad)używania można uznać za jedyną zresztą metodyczną niestosowność. Reszta to solidna robota.

Wojbor A. Woyczyński

Gerhard Preuss, *Allgemeine Topologie*, Hochschultext, Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1972; str. IX+488.

Książka jest zapisem rocznego wykładu, jaki Autor prowadził (pierwszy raz w 1970 r.) dla studentów Uniwersytetu w Berlinie. Treścią są główne pojęcia topologii ogólnej z akcentem na ujęcie kategoryjne. Spis rozdziałów: Preliminaria. Przestrzenie topologiczne i odwzorowania ciągłe. Filtry. Zupełność kategorii przestrzeni topologicznych. Aksjomaty oddzielania. Spójność.

([1]) Traktat Kołmogorowa był wydany w serii Ergebnisse der Mathematik (Osiągnięcia matematyki), był krótką monografią, która stworzyła fundamenty teorii prawdopodobieństwa (*przyp. red.*).