ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIX (1975)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

KAZIMIERZ KURATOWSKI (Warszawa)

O selektorach w topologii i teorii miary

Odczyt im. Wacława Sierpińskiego wygłoszony w dniu 8. III. 1974

Wstęp. Przy stosowaniu aksjomatu wyboru w topologii nasuwa się często w sposób naturalny pytanie, czy istnieje zbiór „wybrany" (tzw. *selektor*) o pewnych pożądanych z punktu widzenia topologicznego własnościach. Np. gdy dany jest rozkład przestrzeni topologicznej na zbiory domknięte, rozłączne i niepuste, można postawić pytanie czy istnieje selektor domknięty tego rozkładu, lub — jeśli to nie jest możliwe — czy istnieje selektor klasy G_δ itp.

Podobnie, gdy dane jest przekształcenie $F : X \to 2^Y$, przyporządkowujące każdemu punktowi $x \in X$ zbiór domknięty niepusty $F(x) \subset Y$, wiadomo na podstawie aksjomatu wyboru, że istnieje odwzorowanie $f : X \to Y$ takie, że $f(x) \in F(x)$ (które nazywamy *selektorem przekształcenia* F). Powstaje pytanie czy istnieje selektor ciągły, I klasy, mierzalny itp. (przy odpowiednich założeniach o przekształceniu F).

W obu wypadkach zagadnienie, do którego prowadzi aksjomat wyboru, przybiera charakter topologiczny (lub wkracza w teorię miary). Celem niniejszego wykładu jest przedstawienie — bez podawania dowodów — niektórych wyników tak pojętej teorii selektorów. Będzie to więc niejako aspekt topologiczny badań nad aksjomatem wyboru, któremu tak wiele uwagi poświęcił prof. Sierpiński.

Dodajmy, że wiele twierdzeń nazywanych dawniej twierdzeniami o *uniformizacji* — które również stanowiły obiekt zainteresowań prof. Sierpińskiego — wchodzi obecnie do teorii selektorów (np. twierdzenia Kondô i Kunugui omawiane w części II; por. też [29]).

Zaznaczmy wreszcie, że w wykładzie niniejszym ograniczamy się do selektorów dla rodzin zbiorów domkniętych. Zagadnienia selektorów dla zbiorów niedomkniętych (np. zagadnienie selektorów dla kompozant continuów nierozkładalnych, lub zagadnienie selektorów dla rozkładu Vitaliego) wymagają zupełnie innych metod (por. [16]).

Część I. Selektory rozkładów. O przestrzeni X zakładać będziemy, że jest to przestrzeń *polska* (tj. metryczna, ośrodkowa i zupełna).

Literą $\mathcal{Q}$ oznaczać będziemy *rozkład* przestrzeni X na zbiory domknięte rozłączne i niepuste; ten sam znak oznaczać też będzie rodzinę tych zbiorów.

Mając daną rodzinę $\boldsymbol{R}$ podzbiorów przestrzeni X, mówić będziemy, że rozkład $\boldsymbol{Q}$ jest *typu* $\boldsymbol{R}^-$, jeśli spełniony jest warunek

$$(1) \qquad \left\{\bigcup_E E \in \boldsymbol{Q} : E \cap G \neq \emptyset\right\} \in \boldsymbol{R}$$

dla każdego zbioru otwartego $G \subset X$.

Podobnie: $\boldsymbol{Q}$ jest *typu* $\boldsymbol{R}^+$, jeśli

$$(2) \qquad \left\{\bigcup_E E \in \boldsymbol{Q} : E \cap K \neq \emptyset\right\} \in (-\boldsymbol{R})$$

dla każdego zbioru domkniętego $K \subset X$ (przy czym $(-\boldsymbol{R})$ oznacza rodzinę zbiorów postaci $X-Z$, gdzie $Z \in \boldsymbol{R}$).

W wypadku, gdy $\boldsymbol{R}$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów *otwartych* przestrzeni X, warunek $\boldsymbol{R}^-$ oznacza *półciągłość dolną* rozkładu $\boldsymbol{Q}$, zaś $\boldsymbol{R}^+$ oznacza *półciągłość górną* tego rozkładu.

Zachodzi twierdzenie następujące (ob. [17], § 3, oraz [3], str. 144 i [7])

TWIERDZENIE I.1. *Dla każdego półciągłego rozkładu (bądź dolnie, bądź górnie) przestrzeni polskiej istnieje selektor klasy* G_δ.

Twierdzenie to daje się uogólnić w sposób następujący (ob. [17], § 3):

TWIERDZENIE I.2. *Niech* $\boldsymbol{R}$ *będzie polem podzbiorów przestrzeni polskiej* X (tj. działania $\cup$, $\cap$, $-$, nie wyprowadzają poza rodzinę $\boldsymbol{R}$). *Oznaczmy przez* $\boldsymbol{R}_\sigma$ *σ-strukturę generowaną przez* $\boldsymbol{R}$ (tj. rodzinę wszystkich sum przeliczalnych zbiorów należących do $\boldsymbol{R}$). *Niech* $\boldsymbol{Q}$ *będzie rozkładem przestrzeni* X *typu* $\boldsymbol{R}^-$ *lub* $\boldsymbol{R}^+$, *niech przy tym zbiory otwarte należą do* $\boldsymbol{R}_\sigma$. *Wówczas istnieje dla* $\boldsymbol{Q}$ *selektor klasy* $\boldsymbol{R}_\delta$ (tzn. przeliczalny iloczyn zbiorów należących do $\boldsymbol{R}$).

Jak widać, twierdzenie I.1 wynika z twierdzenia I.2 przez podstawienie na $\boldsymbol{R}$ rodziny wszystkich zbiorów, które są równocześnie F_σ i G_δ.

Ogólniej, podstawiając na $\boldsymbol{R}$ rodzinę zbiorów, które są jednocześnie klasy $\alpha+1$ addytywnej i multyplikatywnej, wnosimy, że *jeśli rozkład* $\boldsymbol{Q}$ *jest typu* $\boldsymbol{B}^+$ *lub* $\boldsymbol{B}^-$, *gdzie* $\boldsymbol{B}$ *jest rodziną zbiorów addytywnej klasy* α, *to istnieje selektor multyplikatywnej klasy* $\alpha+1$.

WNIOSEK. *Jeśli pole* $\boldsymbol{R}$ *jest σ-algebrą* (tzn., że nie tylko skończone, ale również przeliczalne działania dodawania i mnożenia nie wyprowadzają poza $\boldsymbol{R}$), *to każdy rozkład typu* $\boldsymbol{R}^-$ (czyli, jak mówimy, „$\boldsymbol{R}^-$ *mierzalny*") *ma selektor* $\boldsymbol{R}$*-mierzalny, tj. należący do* $\boldsymbol{R}$.

Uwaga. Przy założeniach twierdzenia 2 istnieje — na ogół biorąc — nie jeden selektor klasy $\boldsymbol{R}_\delta$ dla rozkładu $\boldsymbol{Q}$ — lecz selektorów takich jest nieskończenie wiele. Można więc oczekiwać, że istnieją selektory klasy $\boldsymbol{R}_\delta$ spełniające „dodatkowe warunki" przez nas postawione. W szczególności zachodzi twierdzenie następujące (ob. [17], § 4):

TWIERDZENIE I.3. *Niech* $\boldsymbol{B}$ *oznacza rodzinę podzbiorów borelowskich danej przestrzeni (polskiej)* X *i niech* $\boldsymbol{Q}$ *będzie nieprzeliczalnym rozkładem typu* $\boldsymbol{B}$ *przestrzeni* X *na zbiory zwarte. Niech* $\boldsymbol{Y}$ *będzie analitycznym podzbiorem przestrzeni* $\boldsymbol{C}(X)$ (tj.

przestrzeni wszystkich podzbiorów zwartych przestrzeni X), *spełniającym warunek*

$$A \cap E \neq \emptyset \quad \text{dla każdego} \quad A \in \boldsymbol{Y} \text{ oraz } E \in \boldsymbol{Q}.$$

Wówczas istnieje borelowski selektor S dla $\boldsymbol{Q}$ taki, że $S \cap A \neq \emptyset$ dla każdego $A \in \boldsymbol{Y}$.

Uwaga o przestrzeni $C(X)$. Przestrzeń ta jest przestrzenią metryczną (z odległością Hausdorffa); co więcej, jest to przestrzeń polska przy założeniu, że X jest przestrzenią polską.

Zauważmy, że 2^X nie jest przestrzenią metryczną (z topologią Vietorisa), jeśli X nie jest przestrzenią zwartą (por. J. Keesling, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), str. 618).

Tłumaczy to, dlaczego w twierdzeniu 3 rozważamy przestrzeń $C(X)$ zamiast 2^X.

Innym przykładem twierdzenia o selektorach z dodatkowym warunkiem jest twierdzenie następujące (ob. [24]):

TWIERDZENIE I.4. *Niech $\boldsymbol{Q}$ będzie nieprzeliczalnym półciągłym górnie rozkładem zwartej metrycznej przestrzeni X. Wówczas istnieje selektor S klasy G_δ, który przecina każdy zbiór domknięty A taki, że $A \cap E \neq \emptyset$ dla każdego $E \in \boldsymbol{Q}$.*

Część II. Selektory przekształceń wielowartościowych. W tej części X oznaczać będzie dowolny zbiór, Y zaś przestrzeń polską. 2^Y oznacza przestrzeń wszystkich domkniętych niepustych podzbiorów przestrzeni Y; jest to przestrzeń topologiczna (z topologią Vietorisa, ob. [14] t. I, str. 160).

Rozważać będziemy przekształcenia „wielowartościowe" $F: X \to 2^Y$. *Selektorem* takiego przekształcenia jest każde przekształcenie $f: X \to Y$ spełniające warunek $f(x) \in F(x)$ dla każdego $x \in X$.

Mając daną rodzinę $\boldsymbol{R}$ podzbiorów przestrzeni X mówimy, że F jest typu $\boldsymbol{R}^-$ lub $\boldsymbol{R}^+$ jeśli spełniony jest warunek (por. (1) i (2)):

$$\{x : F(x) \cap G \neq \emptyset\} \in \boldsymbol{R} \quad \text{dla każdego } G \text{ otwartego } \subset Y, \tag{3}$$

albo

$$\{x : F(x) \cap K \neq \emptyset\} \in (-\boldsymbol{R}) \quad \text{dla każdego } K \text{ domkniętego } \subset Y. \tag{4}$$

Mówimy też, że przekształcenie $f: X \to Y$ jest typu $\boldsymbol{R}$,

$$\text{jeśli } f^{-1}(G) \in \boldsymbol{R} \quad \text{dla każdego } G \text{ otwartego } \subset Y. \tag{5}$$

W szczególności, gdy $\boldsymbol{R}$ jest rodziną wszystkich podzbiorów *otwartych* przestrzeni topologicznej X, to warunek $\boldsymbol{R}^-$ oznacza *półciągłość dolną*, zaś warunek $\boldsymbol{R}^+$ — *półciągłość górną* przekształcenia F. Wreszcie typ $\boldsymbol{R}$ dla f oznacza *ciągłość f*.

Zachodzi następujące twierdzenie podstawowe (ob. [19], str. 398):

TWIERDZENIE II.1. *Niech $\boldsymbol{L}$ będzie polem podzbiorów przestrzeni X. Niech $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{L}_\sigma$ i niech F będzie typu $\boldsymbol{R}^-$. Wówczas istnieje dla F selektor f typu $\boldsymbol{R}$.*

WNIOSEK. *Dla każdego półciągłego przekształcenia F istnieje selektor* I *klasy* (tu zakładamy, że przestrzeń X jest metryczna).

W dowodzie przyjmujemy, że $\boldsymbol{L}$ jest polem zbiorów, które są równocześnie F_σ i G_δ (ob. [19], str. 401).

Wniosek ten stanowi szczególny przypadek twierdzenia orzekającego, że gdy $\boldsymbol{L}$ oznacza pole zbiorów, które są równocześnie klasy α addytywnej i multyplikatywnej ($\alpha > 0$), wówczas *istnieje selektor* $f: X \to Y$ *klasy* α. Dodajmy, że jeśli przestrzeń X zawiera przeliczalną bazę złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych (jeśli X jest przestrzenią ośrodkową 0-wymiarową), to dla każdego dolnie półciągłego F istnieje selektor ciągły.

Twierdzenie II.1 ma interesujące zastosowanie do przekształceń mierzalnych.

Niech, mianowicie, $\boldsymbol{R}$ ($= \boldsymbol{L}$) będzie *σ-algebrą podzbiorów przestrzeni* X (tzn. rodziną zbiorów domkniętą ze względu na operacje odejmowania i przeliczalnego dodawania). Zbiory należące do $\boldsymbol{R}$ nazwijmy *mierzalnymi*; wówczas przekształcenie $F: X \to 2^Y$ nazywamy *mierzalnym*, jeśli przeciwobraz każdego zbioru otwartego w 2^Y jest zbiorem mierzalnym. Ponieważ zbiór $\{A \in 2^Y : A \cap G \neq \emptyset\}$ jest zbiorem otwartym w 2^Y (dla każdego zbioru otwartego $G \subset Y$), a zatem, jeśli F jest przekształceniem mierzalnym, to spełniony jest warunek (3) (jak również (4)).

Wynika stąd na mocy twierdzenia II.1 następujące

TWIERDZENIE II.2. *Dla każdego mierzalnego wielowartościowego przekształcenia* $F: X \to 2^Y$ (*lub ogólniej: spełniającego warunek* (3)) *istnieje selektor mierzalny.*

Twierdzenie to ma liczne zastosowania do teorii równań różniczkowych, teorii optymalnego sterowania i innych. Ob. np. [4], [6], [10], [12], [22], [26].

Przekształcenia postaci $F = f^{-1}$. Niech $f: Y \to X$ będzie przekształceniem ciągłym Y na X. Ze względu na ciągłość zbiór $f^{-1}(x)$ jest domknięty i niepusty dla każdego $x \in X$. Mamy więc $F: X \to 2^Y$.

Zanotujemy dwie proste konsekwencje założenia, że $F = f^{-1}$:

$$\{x : F(x) \cap A \neq \emptyset\} = f(A) \quad \text{dla dowolnego } A \subset Y \tag{6}$$

(skąd natychmiast wynika, że jeśli f jest przekształceniem domkniętym, a więc w szczególności, jeśli przestrzeń X jest zwarta, to F jest przekształceniem półciągłym górnie) oraz jeśli s jest selektorem dla F (tj. $s(x) \in F(x)$), to

$$f \circ s = 1, \quad \text{czyli } f[s(x)] = x \quad \text{dla każdego } x \in X. \tag{7}$$

Warunek (6) implikuje dla dowolnej polskiej przestrzeni X, że zbiór $\{x : F(x) \cap A \neq \emptyset\}$ jest analityczny przy założeniu, że A jest zbiorem domkniętym w Y (a więc też gdy A jest zbiorem otwartym).

Stąd (i na mocy twierdzenia II.1) otrzymujemy następujące

TWIERDZENIE II.3. *Niech X i Y będą przestrzeniami polskimi. Niech $\boldsymbol{L}$ oznacza pole generowane przez podzbiory analityczne przestrzeni X i niech f będzie przekształceniem ciągłym Y na X. Istnieje wówczas $\boldsymbol{L}_\sigma$-przekształcenie $s: X \to Y$ spełniające warunek* (7).

Mianowicie s jest *selektorem przekształcenia* f^{-1}.

W szczególności, jeśli X oznacza przestrzeń liczb rzeczywistych, to *funkcja s jest mierzalna w sensie Lebesgue'a* (bowiem zbiory analityczne, a więc i zbiory należące do $\boldsymbol{L}_\sigma$, są mierzalne).

Twierdzenie powyższe daje się łatwo uogólnić zastępując Y przez dowolny zbiór analityczny (ob. [21]). Otrzymujemy w ten sposób prosty dowód znanego *twierdzenia v. Neumanna.*

Zanotujemy tu jeszcze dwa inne ważne twierdzenia, które podpadają pod teorię selektorów (których jednak — jak dotychczas — nie udało się wyprowadzić z twierdzenia II.1).

TWIERDZENIE KONDÔ (ob. [14], t. I, str. 491). *Jeśli f jest ciągłym przekształceniem określonym na zbiorze klasy CA (zawartym w przestrzeni polskiej), to istnieje selektor tejże klasy dla przekształcenia* f^{-1}.

TWIERDZENIE KUNUGUI (ob. [13] i [1], str. 94). *Jeśli f jest ciągłym przekształceniem określonym na zbiorze borelowskim (zawartym w przestrzeni polskiej) i jeśli zbiory* $f^{-1}(y)$ *są zwarte dla wszystkich y, to istnieje selektor borelowski dla przekształcenia* f^{-1}.

Funkcje wyboru. Jedną z postaci aksjomatu wyboru jest tzw. *ogólna zasada wyboru,* orzekająca, że dla każdej rodziny $\boldsymbol{R}$ zbiorów niepustych istnieje funkcja, która każdemu zbiorowi $K \in \boldsymbol{R}$ przyporządkowuje element zbioru K.

Niech więc Y będzie przestrzenią polską i niech $\boldsymbol{R} = 2^Y$. Zachodzi następujące

TWIERDZENIE II.4. *Istnieje funkcja wyboru klasy* 1.

Tak więc istnieje funkcja $f: 2^Y \to Y$ taka, że $f(K) \in K$ dla każdego $K \in 2^Y$ oraz $f^{-1}(G)$ jest F_σ dla każdego otwartego $G \subset Y$.

Ponadto, jeśli $\dim Y = 0$, to istnieje ciągła funkcja wyboru.

Twierdzenie II.4 jest szczególnym przypadkiem twierdzenia II.1; mianowicie, gdy podstawimy $X = 2^Y$, $\boldsymbol{L} =$ pole podzbiorów przestrzeni 2^Y, które są równocześnie F_σ i G_δ, oraz F jest identycznością określoną na 2^Y.

Uwaga 1. Niech Y będzie dowolną przestrzenią metryczną ośrodkową (nie koniecznie zupełną) i niech — jak poprzednio — $\boldsymbol{C}(Y)$ oznacza przestrzeń podzbiorów zwartych przestrzeni Y. Na mocy twierdzenia II.4 dowodzimy z łatwością (zanurzając Y w przestrzeń zupełną), że istnieje na $\boldsymbol{C}(Y)$ funkcja wyboru klasy I.

Wynik ten można też uzyskać w sposób bardziej bezpośredni (ob. [15], por. też [28]). Mianowicie — ponieważ każda przestrzeń metryczna ośrodkowa daje się zanurzyć w kostkę Hilberta H — wystarczy rozpatrywać jedynie wypadek, gdy $Y = H$. Niech $g: I \to H$ będzie ciągłym przekształceniem odcinka I na H. A zatem $g^{-1}: H \to 2^I$ jest przekształceniem półciągłym górnie, a więc ([14], t. II, str. 70) przekształceniem klasy I. Niech wreszcie $h: 2^I \to I$ będzie ciągłą funkcją wyboru na 2^I (np. $h(A)$ oznacza pierwszy punkt zbioru $A \in 2^I$). Wówczas funkcja $f = g \circ h \circ g^{-1}$ jest funkcją wyboru klasy I dla 2^H.

Uwaga 2. Z punktu widzenia topologii jest rzeczą interesującą wiedzieć, *kiedy*

istnieje ciągła funkcja wyboru dla przestrzeni 2^Y. Jak widzieliśmy, jest tak, gdy $\dim Y = 0$. Oczywiście jest tak, gdy Y jest odcinkiem (domkniętym) linii prostej (punktem wybranym z podzbioru domkniętego jest jego pierwszy punkt).

Istnieją jednak bardzo proste przykłady przestrzeni zwartych, dla których nie istnieje ciągła funkcja wyboru. Tak jest na przykład dla okręgu koła. Co więcej, jeśli ograniczymy rozważane podzbiory okręgu do dwupunktowych zbiorów złożonych z końców średnic, to — jak łatwo dowieść — nie można w sposób ciągły wyróżnić żadnego z tych końców.

Ogólniej, jeśli na continuum metrycznym istnieje ciągła funkcja wyboru (dla wszystkich jego podzbiorów domkniętych), to continuum to jest homeomorficzne z odcinkiem (ob. [18]).

Na ogół *selektory ciągłe występują w topologii jedynie przy bardzo silnych założeniach o przestrzeni* (np. gdy przestrzeń ta jest podzbiorem odcinka). Znanych jest natomiast wiele twierdzeń o ciągłych selektorach w przestrzeniach Banacha, lokalnie wypukłych itp. (ob. np. [23]); twierdzenia te wykraczają jednak poza topologię i — tym samym — poza ramy tego wykładu.

Bibliografia

[1] W. Arsenin i A. Ljapunov, *Teoria zbiorów A* (po rosyjsku), Uspiechi 5 (1950), zeszyt 5, str. 45–108.

[2] R. L. Aumann, *Integrals of set-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. 12 (1965), str. 1–12.

[3] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Ch. 9, Hermann, Paris 1958.

[4] C. Castaing, *Quelques problèmes de mesurabilité liés à la théorie de la commande*, C. R. Paris 262 (1966), str. 409–411.

[5] M. Čoban, *Wielowartościowe przekształcenia i zbiory borelowskie* (po rosyjsku), Dokłady Akad. Nauk ZSRR 182 (1968), str. 514–517.

[6] J. P. Dauer and F. S. Van Vleck, *Measurable selectors of multifunctions and applications*, Math. Syst. Th., str. 367–376.

[7] R. Engelking, *Selectors of the first Baire class for semicontinuous set-valued functions*, Bull. Polon. Acad. Sci. 16 (1968), str. 277–282.

[8] —, R. W. Heath and E. Michael, *Topological well-ordering and continuous selections*, Inventiones Math. 6 (1968), str. 150–158.

[9] R. J. Himmelberg, *Measurable relations*, Fund. Math. 87 (1975), str. 53–72.

[10] —, M. Q. Jacobs and F. S. Van Vleck, *Measurable multifunctions, selectors...*, J. Math. Anal. Appl. 25 (1969), str. 276–284.

[11] — F. S. Van Vleck, *Some selection theorems for measurable functions*, Canadian J. Math. 21 (1969), str. 394–399.

[12] — — *Some remarks on Filippov's lemma*, Proc. U.S.-Japan Seminar on diff. and funct. equations, Benjamin 1967.

[13] K. Kunugui, *Contributions à la théorie des ensembles boreliens et analytiques*, III, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 8 (1940), str. 79–108.

[14] K. Kuratowski, *Topology*, 2 vol., Academic Press – PWN, 1966–1968.

[15] — *On the selector problems for the partitions of Polish spaces and for the compact-valued mappings*, Ann. Polon. Math. 29 (1975), str. 421–427.

[16] — *On partitions of complete spaces which do not admit analytic selectors...*, Symposia Mathamatica XIX–11, Roma 1975, str. 67–74.

[17] — and A. Maitra, *Some theorems on selectors and their applications to semi-continuous decompositions*, Bull. Polon. Acad. Sci. 22 (1974), str. 877–881.

[18] —, S. Nadler and G. Young, *Continuous selections on locally compact separable metric spaces*, ibidem 18 (1970), str. 5–11.

[19] — and C. Ryll-Nardzewski, *A general theorem on selectors*, ibidem 13 (1965), str. 397.

[20] A. Maitra, *A note on bimeasurable functions*, ibidem 23 (1975), str. 131–134.

[21] — and B. V. Rao, *Selection theorems and the reduction principle*, Trans. Amer. Math. Soc. (w druku).

[22] E. J. McShane and R. B. Warfield, *On Filippov's implicit functions lemma*, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), str. 41–47.

[23] E. Michael, *A survey of continuous selections*, Lecture Notes No. 171 (1970), str. 54–58.

[24] — *G_δ selections and compact-covering maps*, Duke Math. J. 36 (1969), str. 125–127.

[25] J. v. Neumann, *On rings of operators*, Ann. of Math. 50 (1949), str. 401–485.

[26] C. Olech, *Existence theorems for optimal problems with vector-valued cost function*, Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969), str. 159–180.

[27] T. Parthasarathy, *Selection theorems and their applications*, Lecture Notes, No. 263, 1972.

[28] A. P. Robertson, *On measurable selectors*, Proc. R. Soc. Edinburgh 72 (1974), str. 1–7.

[29] M. Sion, *On uniformization of sets in topological spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 96 (1960), str. 237–245.

[30] E. Wesley, *Extensions of the measurable choice theorem by means of forcing*, Israel J. Math. 14 (1973), str. 104–114.

[31] M. de Wilde et C. Sunyah, *Un théorème de sélection pour des applications à graphe borélien*, C. R. Paris 269 (1969), str. 273–274.