ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIX (1975)

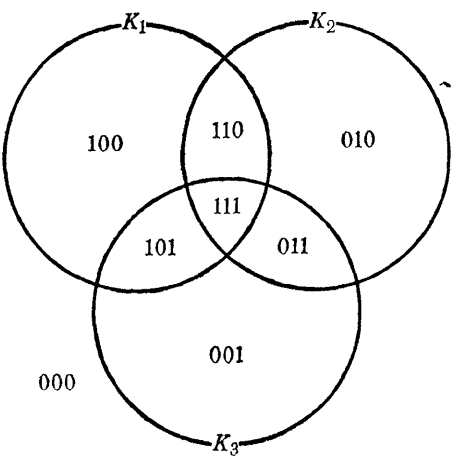
wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

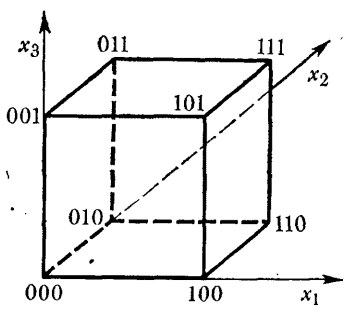
PRZEMYSŁAW NOWICKI (Warszawa)

Koniczynka *n*-listna

Ilustrując działania na zbiorach rysujemy zwykle tzw. „koniczynkę", czyli trzy odpowiednio przecinające się okręgi, co pozwala bardzo prosto i poglądowo przedstawić dowolne wyrażenie boole'owskie z trzema zmiennymi (rys. 1). Użyty tu termin koniczynka — odpowiednik francuskiego „feuille de trèfle" — wydaje się trafny i dość sugestywny.



Rys. 1



Rys. 2

Składowe obszaru, który powstaje przez wycięcie z płaszczyzny trzech okręgów koniczynki, będziemy nazywać po prostu *składowymi koniczynki*. Jest ich osiem. Jeżeli oznaczymy je tak, jak na rys. 1, łatwo zauważymy pewne analogie między koniczynką a sześcianem (rys. 2). Trójwyrazowe ciągi „zero-jedynkowe" można uważać za współrzędne wierzchołków sześcianu w odpowiednim układzie współrzędnych. Możliwa jest jednak inna interpretacja tych ciągów: każdy możemy uważać za odpowiedzi na kolejne trzy pytania o położenie odpowiedniego wierzchołka. Pytania stawiane obserwatorowi, który widzi sześcian tak, jak na rys. 2, mogą brzmieć następująco: Czy wierzchołek leży na prawej ścianie? Czy leży na

dalszej ścianie? Czy leży na górnej ścianie? Notując odpowiedzi za pomocą zer i jedynek (1 przy odpowiedzi „tak" i 0 przy odpowiedzi „nie") otrzymamy ciąg współrzędnych danego wierzchołka.

Jeśli ponumerujemy trzy okręgi koniczynki (np. K_1, K_2, K_3), to będziemy mogli postawić analogiczne pytania: Czy dana składowa zawiera się we wnętrzu pierwszego okręgu? Czy zawiera się we wnętrzu drugiego okręgu? Czy zawiera się we wnętrzu trzeciego okręgu? Odpowiedzi na te pytania podane są na rys. 1.

Odnotujmy dalsze analogie między koniczynką z rys. 1 a sześcianem z rys. 2. Dwa wierzchołki sześcianu są końcami wspólnej krawędzi, gdy odpowiadające im ciągi współrzędnych różnią się na dokładnie jednym miejscu, a na dwóch pozostałych miejscach są identyczne. Podobnie, dwa ciągi różnią się na dokładnie jednym miejscu wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im składowe koniczynki „sąsiadują" ze sobą, to znaczy ich domknięcia przecinają się wzdłuż pewnego niezdegenerowanego łuku.

Nasuwa się pytanie, czy można narysować koniczynkę n-listną, na której równie prosto i poglądowo dawałoby się ilustrować wyrażenia boole'owskie z n zmiennymi. Sprecyzujemy jednak pojęcie takiej koniczynki.

Niech $\mathfrak{K}$ oznacza rodzinę wszystkich krzywych Jordana (krzywych płaskich homeomorficznych z okręgiem). Jeżeli $K \in \mathfrak{K}$, to K rozcina płaszczyznę na dwa obszary: ten, który jest ograniczony (wnętrze krzywej) oznaczać będziemy symbolem K^1, drugi zaś (nieograniczony, tzn. zewnętrze krzywej) oznaczać będziemy symbolem K^0.

Koniczynką n-listną nazywać będziemy każdy ciąg $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ (gdzie $K_i \in \mathfrak{K}$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots, n$) spełniający następujące warunki:

(1) Krzywe K_i przecinają się tylko w skończonej liczbie punktów, przy czym żadne trzy krzywe nie mają punktu wspólnego,

(2) Zbiory

$$S(s_1, s_2, \ldots, s_n) = K_1^{s_1} \cap K_2^{s_2} \cap \ldots \cap K_n^{s_n}$$

(gdzie $s_i = 0, 1$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$) są wszystkie niepuste, spójne i rozłączne. Inaczej mówiąc, zbiór

$$R^2 \setminus (K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n)$$

zawiera dokładnie 2^n składowych postaci $S(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ (będziemy je nazywać *składowymi* koniczynki n-listnej).

Przykład koniczynki czterolistnej podany jest na rys. 3.

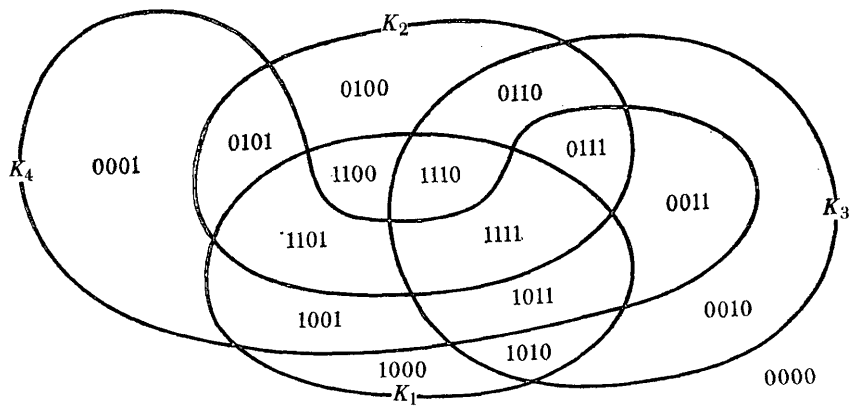
Koniczynka ta powstała z koniczynki trójlistnej przez dorysowanie czwartej krzywej K_4. Dorysowanie w odpowiedni sposób czwartej krzywej — jeśli się to robi po raz pierwszy — nie jest wcale oczywiste. Czytelnikom proponowalibyśmy samodzielne dorysowanie do powyższych czterech krzywych następnej, piątej krzywej, w taki sposób, żeby otrzymać koniczynkę pięciolistną.

Zwróćmy uwagę na pewną własność krzywej K_4 z rys. 3. Krzywa ta rozcinając składowe koniczynki trójlistnej (K_1, K_2, K_3) nie „obiega" ich w sposób zupełnie

dowolny: po każdej składowej następną jest zawsze składowa sąsiednia. Zauważmy, że odpowiada to obieganiu wierzchołków sześcianu z zachowaniem warunku, że od wierzchołka do następnego przechodzić wolno wyłącznie po krawędziach.

Możemy postawić następne pytanie: Czy zauważone dotychczas analogie między sześcianem a koniczynką trójlistną są prawdziwe dla koniczynki n-listnej i n-wymiarowej kostki?

Przykład koniczynki czterolistnej (rys. 3) wskazuje, że nie można na ogół mówić o jednojednoznacznej odpowiedniości między parą wierzchołków o wspólnej krawę-



Rys. 3

dzi w n-wymiarowej kostce a parą składowych sąsiednich w koniczynce n-listnej. Na przykład składowe (1100) i (1000) nie są wcale sąsiednimi, chociaż przyporządkowane im ciągi różnią się na dokładnie jednym miejscu, a więc odpowiednie wierzchołki czterowymiarowej kostki mają wspólną krawędź. Jak jednak łatwo sprawdzić, ciągi odpowiadające dowolnym dwóm składowym sąsiednim różnią się na dokładnie jednym miejscu. Można więc pytać, czy jest to fakt ogólny i czy wobec tego poprowadzenie krzywej rozcinającej w odpowiedni sposób koniczynkę n-listną nie wyznacza jednocześnie pewnego zamkniętego obiegu po krawędziach wszystkich wierzchołków n-wymiarowej kostki. Wykażemy, że tak rzeczywiście jest. Przedtem jednak będziemy musieli dokładniej sprecyzować, jak rozumieć określenie składowych sąsiednich koniczynki n-listnej.

Dwie składowe S i U koniczynki $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ nazwiemy *sąsiednimi*, jeśli są one różne oraz jeśli istnieje taki punkt p płaszczyzny, który spełnia następujące warunki:

$$p \in \overline{S} \cap \overline{U}, \tag{3}$$

$$p \notin K_i \cap K_j \quad \text{przy wszystkich } i \neq j, \tag{4}$$

gdzie $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

W tym sensie składowe (100) i (111) koniczynki trójlistnej z rys. 1 nie są sąsiednimi, gdyż jedyny punkt płaszczyzny, który spełnia warunek (3) nie spełnia warunku (4).

LEMAT 1. *Jeśli składowe S i U koniczynki n-listnej $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ są sąsiednie, to ciągi odpowiadające tym składowym różnią się na dokładnie jednym miejscu.*

Dowód. Jeśli ciągi składowych S i U nie różnią się na żadnym miejscu, wówczas składowe te są identyczne (bo w koniczynce n-listnej zbiory $S(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ są spójne). Wystarczy więc pokazać, że ciągi składowych S i U różnią się co najwyżej na jednym miejscu. Przypuśćmy, że tak nie jest i że składowe S i U są sąsiednimi, a ich ciągi różnią się na co najmniej dwóch miejscach: miejscu i-tym oraz różnym od niego miejscu j-tym. Weźmy teraz pod uwagę punkt p, o którym mówi określenie sąsiedztwa. Zgodnie z warunkiem (3), $p \in \bar{S} \cap \bar{U}$. Ponieważ jedna ze składowych S i U zawiera się w K_i^0, podczas gdy druga zawiera się w K_i^1 (ich ciągi różnią się na miejscu i-tym), więc $p \in \bar{K}_i^0 \cap \bar{K}_i^1 = K_i$. Podobnie otrzymamy zależność: $p \in K_j$. Punkt p musiałby więc jednocześnie należeć do dwóch różnych krzywych, co jest sprzeczne z warunkiem (4). W ten sposób teza lematu została wykazana.

Koniczynkę n-listną zdefiniowaliśmy jako ciąg krzywych, a nie po prostu jako zbiór krzywych, gdyż rola krzywych K_i nie jest wcale symetryczna. Przykładem niech będzie koniczynka czterolistna (K_1, K_2, K_3, K_4) przedstawiona na rys. 3. Jak łatwo sprawdzić, ciąg (K_1, K_2, K_3) określa pewną trójlistną koniczynkę, natomiast ciąg (K_1, K_2, K_4) nie. W tym ostatnim wypadku zbiór $R^2 \setminus (K_1 \cup K_2 \cup K_4)$ ma nie osiem, lecz dziesięć składowych, gdyż zbiory odpowiadające ciągom (011) i (001) są niespójne.

Zauważmy dalej, że krzywa K_4 w koniczynce (K_1, K_2, K_3, K_4) ma tę własność (różniącą ją od krzywej K_3), że rozcina każdą ze składowych zbioru $R^2 \setminus (K_1 \cup K_2 \cup K_3)$ na dokładnie dwie części. Okazuje się, że własność ta jest równoważna poprzedniej:

LEMAT 2. *Niech $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ będzie koniczynką n-listną i $n \geqslant 2$. Ciąg $(K_1, K_2, \ldots, K_{n-1})$ określa koniczynkę $(n-1)$-listną wtedy i tylko wtedy, kiedy krzywa K_n rozcina każdą ze składowych zbioru*

$$R^2 \setminus (K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_{n-1}) \tag{5}$$

na dokładnie dwie części.

Dowód. Wykażemy dla przykładu, że warunek jest konieczny. Koniczynka $(K_1, K_2, \ldots, K_{n-1})$ ma dokładnie 2^{n-1} składowych, a koniczynka $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ dokładnie 2^n składowych. Gdyby krzywa K_n rozcinała jedną ze składowych $S(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ na więcej niż dwie części, wówczas co najmniej jeden ze zbiorów $S(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, 0)$ albo $S(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, 1)$ byłby niespójny, co jest sprzeczne z określeniem koniczynki n-listnej. Z kolei, gdyby krzywa K_n nie rozcinała pewnej składowej, wówczas koniczynka $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ miałaby mniej nż 2^n składowych, co jest również sprzeczne z określeniem koniczynki. A więc krzywa K_n rozcina każdą ze składowych koniczynki $(K_1, K_2, \ldots, K_{n-1})$ na dokładnie dwie części.

Podobne rozumowanie prowadzi do następującego stwierdzenia:

LEMAT 3. *Niech* $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ *będzie koniczynką n-listną. Jeśli krzywa Jordana* K_{n+1} *rozcina każdą ze składowych koniczynki* $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ *na dokładnie dwie części, przecina się z krzywymi koniczynki* $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ *tylko w skończonej liczbie punktów oraz nie zawiera żadnego punktu, w którym przecinają się dwie różne krzywe tej koniczynki, to wówczas ciąg* $(K_1, K_2, \ldots, K_n, K_{n+1})$ *jest koniczynką* $(n+1)$*-listną.*

Wobec tego, zamiast pytać o istnienie koniczynki n-listnej udowodnimy twierdzenie mocniejsze.

TWIERDZENIE. *Istnieje nieskończony ciąg krzywych Jordana* (K_n) *o następujących własnościach:*

(6) (K_1, K_2) *jest koniczynką dwulistną,*

(7) *każdy ciąg skończony* $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ *spełnia warunek* (1) *z określenia koniczynki n-listnej,*

(8) *dla każdego* $n \geqslant 3$ *krzywa* K_n *rozcina każdą ze składowych zbioru* (5) *na dokładnie dwie części.*

Z powyższego twierdzenia wynika następujący wniosek:

WNIOSEK 1. *Nieskończony ciąg krzywych* (K_n)*, o którym mówi twierdzenie, ma tę własność, że przy każdym n ciąg skończony* $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ *jest koniczynką n-listną.*

Dowód twierdzenia. Nieskończony ciąg (K_n) wyznaczymy efektywnie. Idea konstrukcji tego ciągu polega na tym, by każdą kolejną krzywą przeplatać odpowiednio z krzywą poprzednią. Konstruując kolejną krzywą K_{n+1} będziemy zakładać, że krzywa K_n rozcina wszystkie składowe zbioru (5) na dokładnie dwie części w porządku zgodnym z pewnym zamkniętym obiegiem, na przykład: $S_1, S_2, \ldots, S_r$. Odnotujmy, że $r = 2^n$. Krzywą K_{n+1} skonstruujemy w ten sposób, by miała analogiczną własność. Natomiast krzywa K_2 będzie miała tę własność w sposób oczywisty.

Krzywa K_n, jak założyliśmy, rozcina dowolną składową S_i zbioru (5) na dokładnie dwie części, z których jedna należy do K_n^0, natomiast druga do K_n^1. Wprowadzimy oznaczenia:

$$S_i^0 = S_i \cap K_n^0 \quad \text{oraz} \quad S_i^1 = S_i \cap K_n^1.$$

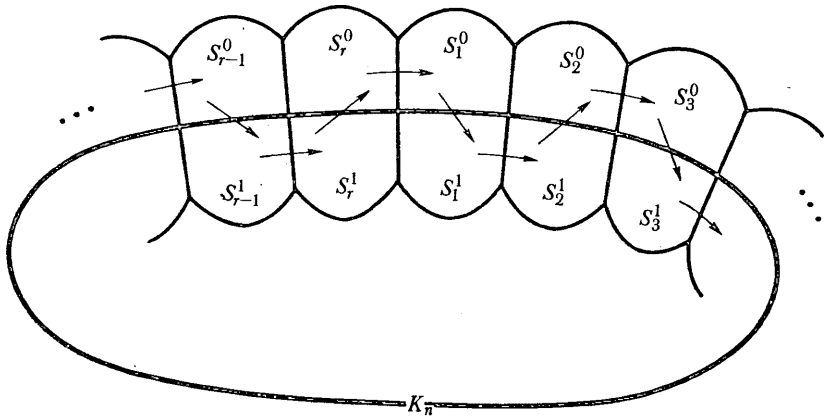
Zbiory S_i^1, S_i^0 są wszystkimi składowymi zbioru $R^2 \setminus (K_1 \cup K_2 \cup \ldots K_n)$. Krzywa K_{n+1}, którą będziemy konstruować, ma rozcinać te składowe w następującej kolejności (rys. 4):

$$(9) \qquad S_1^0, S_1^1, S_2^1, S_2^0, S_3^0, \ldots, S_{2i}^1, S_{2i}^0, S_{2i+1}^0, S_{2i+1}^1, \ldots, S_r^1, S_r^0, S_1^0, \ldots$$

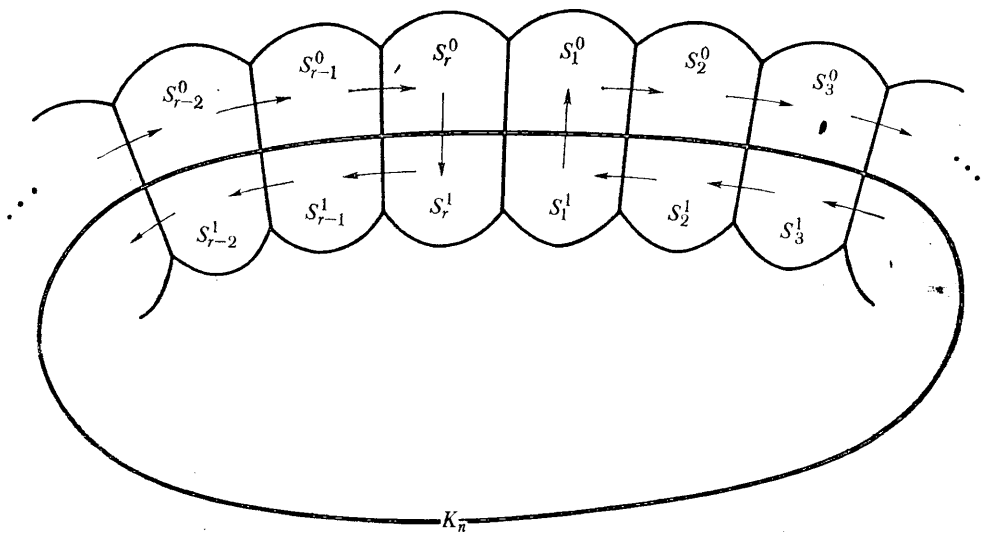
Inną możliwość poprowadzenia krzywej K_{n+1} pokazuje rys. 5. Zgodnie ze schematem pokazanym na tym rysunku, krzywa K_{n+1} rozcina te składowe w takiej kolejności:

$$(10) \qquad S_1^0, S_2^0, S_3^0, \ldots, S_r^0, S_r^1, S_{r-1}^1, S_{r-2}^1, \ldots, S_1^1, S_1^0, S_2^0, \ldots$$

W obu uporządkowaniach: (9) i (10), wszystkie składowe wystąpią dokładnie raz, po czym cały cykl rozpocznie się od nowa w tej samej kolejności. Oznacza to, że krzywa K_{n+1} może być poprowadzona według zamkniętego obiegu. Zauważmy



Rys. 4



Rys. 5

również, że przy obu uporządkowaniach każde dwie kolejne składowe są sąsiednimi.

Przystąpimy teraz do konstrukcji ciągu (K_n). Wprowadźmy w tym celu na płaszczyźnie prostokątny układ współrzędnych oraz ciąg siatek kwadratowych (M^n) taki, że osie układu współrzędnych pokrywają się z dwiema liniami każdej siatki M^n, a odległości między sąsiednimi równoległymi liniami każdej z siatek M^n są równe $\frac{1}{3}n$.

Będziemy też rozważać odległość „maksimum", to znaczy każdej parze punktów płaszczyzny $\big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big)$ przyporządkujemy liczbę:

$$r\big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) = \max\,(|a_1 - b_1|,\ |a_2 - b_2|).$$

Krzywe K_n będą łamanymi złożonymi z odcinków siatki M^n, ale nie będą miały żadnych odcinków wspólnych z siatką M^{n-1}. Określimy je indukcyjnie.

Krzywa K_1 składa się z odcinków:

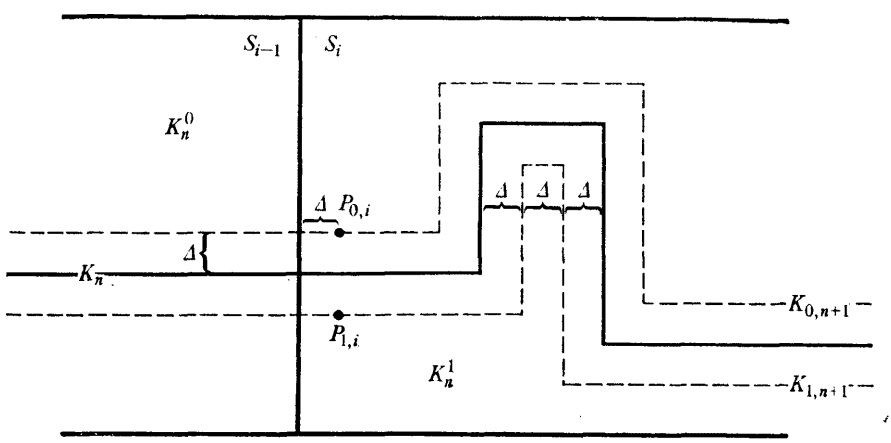
$$\overline{(0,0)(0,\tfrac{1}{3})},\quad \overline{(0,\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})},\quad \overline{(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{3},0)},\quad \overline{(\tfrac{1}{3},0)(0,0)}.$$

Krzywa K_2 składa się z odcinków:

$$\overline{(\tfrac{2}{9},\tfrac{2}{9})(\tfrac{2}{9},\tfrac{5}{9})},\quad \overline{(\tfrac{2}{9},\tfrac{5}{9})(\tfrac{5}{9},\tfrac{5}{9})}\quad \overline{(\tfrac{5}{9},\tfrac{5}{9})(\tfrac{5}{9},\tfrac{2}{9})},\quad \overline{(\tfrac{5}{9},\tfrac{2}{9})(\tfrac{2}{9},\tfrac{2}{9})}.$$

Oczywiście ciąg (K_1, K_2) jest koniczynką dwulistną, przy czym krzywa K_2 rozcina każdą (z dwu) składową koniczynki jednolistnej (K_1) na dokładnie dwie części.

Załóżmy teraz, że zostały już skonstruowane krzywe $K_1, K_2, \ldots, K_n$ i rozważmy zbiór punktów płaszczyzny, dla których odległość maksimum od krzywej K_n jest równa $\frac{1}{3}(n+1)$. Zbiór ten jest sumą mnogościową (złączeniem) dwóch łamanych poprowadzonych po liniach siatki M^{n+1}. Obie te łamane są krzywymi Jordana i nie mają wspólnych odcinków z siatką M^n. Jedną z tych łamanych, tę, która zawiera się w obszarze K_n^1, oznaczymy symbolem $K_{1,n+1}$, drugą natomiast (tę, która zawiera się w obszarze K_n^0) oznaczymy symbolem $K_{0,n+1}$. Obie te łamane przecinają się z krzywymi $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$ tylko w skończonej liczbie punktów i nie przechodzą przez żaden punkt wspólny dwóch spośród krzywych $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$. Obie łamane rozcinają wszystkie składowe zbioru $R^2 \setminus (K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_{n-1})$ na dokładnie dwie części w takim samym zamkniętym obiegu, w jakim rozcinała je krzywa K_n.



Rys. 6

W każdej składowej S_i zbioru $R^2 \setminus (K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_{n-1})$ wybierzemy dwa punkty: $P_{0,i}$ oraz $P_{1,i}$ w ten sposób, żeby spełnione były następujące warunki:

(11) $P_{0,i} \in K_{0,n+1} \cap S_i^0$ oraz $P_{1,i} \in K_{1,n+1} \cap S_i^1$,

(12) punkty $P_{0,i}$ oraz $P_{1,i}$ mają jedną ze współrzędnych taką samą,

(13) punkty $P_{0,i}$ oraz $P_{1,i}$ znajdują się w węzłach siatki M^{n+1}, ale żaden z nich nie jest w węźle siatki M^n.

Z założeń odnośnie do wyboru punktów $P_{1,i}$ oraz $P_{0,i}$ wynika, że odcinek $c_i = \overline{P_{0,i}P_{1,i}}$ jest odcinkiem siatki M^{n+1}, ale nie jest odcinkiem siatki M^n. Odcinek ten ma jeden punkt wspólny z krzywą K_n, natomiast nie przecina żadnej krzywej K_i jeśli $i \leqslant n-1$. Punkty takie można wyznaczyć, i to nawet efektywnie, według ścisłego programu dla maszyny cyfrowej.

Dowód tego faktu pozostawiamy czytelnikowi. Przykładowy wybór punktów $P_{0,i}$ oraz $P_{1,i}$ pokazany został na rys. 6.

Krzywą K_{n+1} określimy teraz jako mnogościową sumę następujących łamanych: odcinek $c_1 = \overline{P_{0,1}P_{1,1}}$, część krzywej $K_{1,n+1}$ między punktami $P_{1,1}$ a $P_{1,2}$ (zgodnie z orientacją tej krzywej wyznaczoną przez kolejność rozcinania składowych S_i), odcinek c_2, część krzywej $K_{0,n+1}$ między punktami $P_{0,2}$ a $P_{0,3}$ (zgodnie z orientacją tej krzywej wyznaczoną przez kolejność rozcinania składowych S_i), odcinek c_3 i tak dalej według schematu (9) przedstawionego na rys. 4.

Podobną konstrukcję można wykonać według schematu (10) przedstawionego na rys. 5.

Czytelnik zechce samodzielnie uzupełnić wszystkie luki rozumowania, aby przedstawiony tu szkic konstrukcji mógł służyć za ścisły dowód twierdzenia. Proponujemy też zastanowić się nad następującym pytaniem, na które autor nie zna odpowiedzi: Czy istnieją koniczynki n-listne, których nie da się zbudować przedstawioną tu metodą rysowania kolejnych krzywych? Innymi słowy: czy istnieje koniczynka n-listna $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ taka, że żaden ciąg $(K_1, \ldots, K_{i-1}, K_{i+1}, \ldots, K_n)$ (gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$) nie jest koniczynką $(n-1)$-listną?

Na zakończenie tych rozważań sformułujemy pewien wniosek z twierdzenia oraz lematu 1:

WNIOSEK 2. *W nieskończonym ciągu krzywych Jordana (K_n), o którym mówi twierdzenie, każda krzywa K_{n+1} wyznacza pewien zamknięty obieg wszystkich wierzchołków n-wymiarowej kostki, przy czym obieg ten spełnia warunek, że przechodzenie od wierzchołka do wierzchołka odbywa się po krawędziach kostki.*