ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIX (1975)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Zadania

Wszelką korespondencję dotyczącą zadań (rozwiązania zadań, nowe zadania itp.) należy kierować pod adresem: Piotr Mankiewicz, Instytut Matematyczny PAN, skr. poczt. 137, 00-950 Warszawa, ul. Śniadeckich 8. Ciekawsze rozwiązania będą publikowane.

221. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1. Udowodnić, że istnieje stała C_k taka, że dla dowolnych $\alpha_i \geqslant 0$; $i = 1, 2, \ldots, N$; gdzie $N \geqslant k$, zachodzi nierówność

$$\Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\Big)^k \leqslant C_k \Big(\sum_{\substack{i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_k \\ 1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant N}} \alpha_{i_1} \cdot \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_k} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^k \Big).$$

Wyznaczyć najlepszą taką stałą C_k dla $k = 2, 3, \ldots$

P. Wojtaszczyk (Warszawa)

222. Niech odwzorowanie T podzbioru K płaszczyzny euklidesowej R^2 spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1 (tzn. $||Tx-Ty|| \leqslant ||x-y||$ dla $x, y \in K$). Pokazać, że T można przedłużyć do odwzorowania R^2 w R^2 spełniającego warunek Lipschitza ze stałą 1.

W. Nitka (Wrocław)

223. Udowodnić, że jeżeli T jest odwzorowaniem płaszczyzny euklidesowej R^2 w siebie spełniającym warunek:

$$||x-y|| = 1 \quad \text{pociąga za sobą} \quad ||Tx-Ty|| = 1,$$

to T jest izometrią.

A. Mąkowski (Warszawa)

224. Niech $Q = \{(\alpha_i)_{i=1}^{\infty} : \alpha_i \in [-1, 1] \text{ dla } i = 1, 2, \ldots\}$ będzie kostką Hilberta (z metryką $\varrho(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-1}|\alpha_i - \beta_i|$ dla $\alpha = (\alpha)_{i=1}^{\infty}$, $\beta = (\beta_i)_{i=1}^{\infty} \in Q$) i niech operator T będzie dany wzorem

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (\alpha_2, \alpha_3, \ldots).$$

Czy istnieje kontinuum $C \subset Q$, rozłączne z przekątną kostki Q (tzn. $C \cap \{(\alpha_i)_{i=1}^{\infty} \in Q: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots\} = \emptyset$) i takie, że $T(C) \subset C$?

K. Sieklucki (Warszawa)

225. Pokazać, że jeżeli φ jest funkcją afiniczną (tzn. zachowującą kombinacje wypukłe) ze zbioru wypukłego A na zbiór wypukły B, oraz f jest funkcją afiniczną na A o wartościach rzeczywistych, to funkcja

$$f^{\uparrow}(y) = \sup\{f(x) : x \in \varphi^{-1}(y)\}, \quad y \in B,$$

jest wklęsła, ale nie musi być afiniczna. Udowodnić analogiczne twierdzenie, w którym sup został zastąpiony przez inf.

Z. Semadeni (Warszawa)

226. Udowodnić, że istnieje stała dodatnia c taka, że z warunku $(n+t)! = n!m!$ wynika, że

$$t < c \log\log n.$$

P. Erdös (Budapeszt)

227. Na płaszczyźnie R^2 umieszczony jest trójkąt, którego wierzchołki leżą w punktach kratowych (elementach $\mathbf{Z}^2$), a żaden inny punkt kratowy nie należy do trójkąta. Pokazać, że pole trójkąta wynosi $\frac{1}{2}$.

M. Misiurewicz (Warszawa)

228. Udowodnić równoważność twierdzenia Borsuka o antypodach z następującym twierdzeniem:

TWIERDZENIE. *Sfery* $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ *nie można podzielić na trzy zbiory o średnicy mniejszej niż średnica sfery.*

M. Misiurewicz (Warszawa)

229. TWIERDZENIE. *Dla każdego szeregu zbieżnego* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o wyrazach dodatnich istnieje jego podszereg zbieżny do liczby niewymiernej*:

Znaleźć błąd w następującym dowodzie:

Niech α będzie liczbą niewymierną zawartą między zerem a sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Skonstruujemy podszereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zbieżny do α. W tym celu stosujemy indukcję: $a_n^{(0)} = a_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k+1)}$ otrzymujemy z szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}$ przez wyrzucenie największego (ewentualnie jednego z największych, jeśli jest ich kilka) wyrazu szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}$ takiego, że suma pozostałego podszeregu będzie nie mniejsza niż α. Jeżeli wyraz

taki nie istnieje, oznacza to, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} = \alpha$ i kładziemy $b_n = a_n^{(k)}$. Jeżeli indukcja będzie nieskończona, to b_n będzie n-tym spośród niewyrzuconych wyrazów szeregu. Pokażemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha$. Oczywiście $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \geqslant \alpha$. Gdyby istniało $\varepsilon > 0$, takie że $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \geqslant \alpha + \varepsilon$, to ponieważ dla pewnego n_0 mamy $b_{n_0} < \varepsilon$, więc $\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} b_n \geqslant \alpha$. W szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ istnieje tylko skończona ilość wyrazów większych lub równych b_{n_0}, a zatem wyraz b_{n_0} musiał być wyrzucony w pewnym kroku indukcyjnym, co daje sprzeczność.

M. Krych (Warszawa)

230. Niech $x > 0$, $a_1 = x$, $a_{n+1} = x^{a_n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Dla jakich x ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny?

M. Krych (Warszawa)

Rozwiązania zadań

36. Niech f będzie funkcją określoną na przestrzeni metrycznej X, o wartościach w dowolnej przestrzeni metrycznej. Dowieść, że na to by funkcja f była ciągła potrzeba i wystarcza, by spełniona była inkluzja

$$(*) \qquad f(\operatorname{Ls} A_n) \subset \operatorname{Ls} f(A_n) \quad \text{dla dowolnych } A_n \subset X,\ n = 1, 2, \ldots,$$

gdzie $\operatorname{Ls} A_n$ oznacza górną granicę ciągu zbiorów A_n (K. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1952, str. 243).

Wykazać ponadto, że jeżeli X jest przestrzenią metryczną zwartą, to inkluzja $(*)$ staje się równością dla każdej funkcji ciągłej f i że równość ta charakteryzuje przestrzenie zwarte spośród wszystkich przestrzeni metrycznych.

R. Duda (Wrocław)

Rozwiązanie. Zgodnie z określeniem, mamy:

$$\operatorname{Ls} A_n = \{x \in X : \liminf \varrho(x, A_n) = 0\}$$

dla dowolnego ciągu podzbiorów przestrzeni X (K. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1952, str. 243).

Udowodnimy najpierw, że

$$(1) \qquad \operatorname{Ls} A_n = \bigcap_{n=0} \overline{\bigcup_{k=0} A_{n+k}}.$$

Załóżmy najpierw, że $p \in \operatorname{Ls} A_n$. Istnieje więc ciąg $\{a_{n_k}\}$ taki, że $a_{n_k} \in A_{n_k}$, dla $k = 1, 2, \ldots$, zbieżny do p. Weźmy dowolne otoczenie U punktu p. Istnieje więc kula otwarta $K(p, r) \subset U$, gdzie $r > 0$. Znajdując następnie $k_0 = k(r)$ takie, że $\varrho(a_{n_k}, p) < r$ dla $k > k_0$, stwierdzamy, że $U \cap \bigcup_{k=0} A_{n+k}$

jest zbiorem niepustym dla dowolnego n. Tym samym punkt p należy do zbioru $\bigcap_{n=0} \overline{\bigcup_{k=0} A_{n+k}}$. Przypuśćmy odwrotnie, że punkt p należy do zbioru wymienionego po prawej stronie wzoru (1). Biorąc w charakterze otoczeń punktu p kule otwarte $K(p, 1/n)$ dla $n = 1, 2, \ldots$ i wykorzystując założenie, otrzymamy ciąg zbiorów niepustych: $K(p, 1/n) \cap \bigcup_{k=0} A_{n+k}$, $n = 1, 2, \ldots$ Oznaczając przez a_{n_k} elementy tych zbiorów, znajdujemy ciąg $\{a_{n_k}\}$ taki, że $a_{n_k} \in A_{n_k}$ oraz $\varrho(a_{n_k}, p) < 1/k$. Wobec tego, ciąg ten jest zbieżny do punktu p; tym samym $p \in \operatorname{Ls} A_n$.

Zauważmy również, że jeśli $A_n = A$ dla $n = 1, 2, \ldots$, to $\operatorname{Ls} A_n = \bar{A}$. Niech teraz f oznacza dowolną funkcję, zaś $\{v_t : t \in T\}$ indeksowaną za pomocą zbioru T rodzinę zbiorów. Zanotujemy inkluzję:

$$f[\bigcap_{t \in T} V_t] \subset \bigcap_{t \in T} f[V_t]. \tag{2}$$

Jeśli założymy dodatkowo, że funkcja f jest ciągłym przekształceniem przestrzeni topologicznych, to mamy również inkluzję

$$f[\overline{V}] \subset \overline{f[V]}, \tag{3}$$

dla dowolnego zbioru V, zawartego w dziedzinie funkcji f.

Przechodząc do dowodu tez podanych w zadaniu, załóżmy, że dla pewnej funkcji odwzorowującej przestrzeń metryczną X w przestrzeń metryczną Y inkluzja (*) zachodzi dla dowolnego ciągu podzbiorów przestrzeni X. Kładąc w szczególności $A_n = A$ otrzymamy, wykorzystując wspomnianą uprzednio uwagę:

$$f[\operatorname{Ls} A_n] = f[\bar{A}] \subset \operatorname{Ls} f[A_n] = \overline{f[A]}. \tag{4}$$

Wobec dowolności zbioru A dowodzi to, iż funkcja f jest ciągła. Wiadomo bowiem (por. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 1965, str. 132, ćwicz. 2), że inkluzja (4) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym dla ciągłości funkcji.

Załóżmy z kolei, że funkcja f jest ciągłym odwzorowaniem przestrzeni X w przestrzeń Y. Korzystając z udowodnionych własności operacji Ls oraz wzoru (2) otrzymamy:

$$f[\operatorname{Ls} A_n] = f[\bigcap_{n=0} \overline{\bigcup_{k=0} A_{n+k}}] \subset \bigcap_{n=0} f[\overline{\bigcup_{k=0} A_{n+k}}]. \tag{5}$$

Zastosowanie inkluzji (3) daje zaś:

$$f[\overline{\bigcup_{k=0} A_{n+k}}] \subset \overline{f[\bigcup_{k=0} A_{n+k}]}. \tag{6}$$

Zestawiając inkluzje (5) i (6) otrzymujemy natychmiast:

$$f[\operatorname{Ls} A_n] \subset \bigcap_{n=0} \overline{\bigcup_{k=0} f[A_{n+k}]}. \tag{7}$$

Wystarczy zauważyć, że po prawej stronie wzoru (7) występuje zbiór $\operatorname{Ls} f[A_n]$ (co wynika ze wzoru (1)), aby inkluzja (*) była udowodniona.

W dowodzie inkluzji (7) korzystaliśmy także z równości:

$$f[\bigcup_{t \in T} V_t] = \bigcup_{t \in T} f[V_t], \tag{8}$$

prawdziwej dla dowolnej funkcji f i dowolnej rodziny zbiorów $\{V_t : t \in T\}$.

Dowód drugiej tezy zadania poprzedzimy następującą uwagą dotyczącą przestrzeni metrycznych zwartych.

LEMAT. *Przestrzeń metryczna jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{Ls} A_n \neq \emptyset$ *dla dowolnego ciągu* $\{A_n\}$ *podzbiorów tej przestrzeni takich, że* $A_n \neq \emptyset$ *dla* $n = 1, 2, \ldots$

Dowód lematu. Załóżmy, że rozważana przestrzeń metryczna jest zwarta. Weźmy dowolny ciąg $\{A_n\}$ niepustych podzbiorów tej przestrzeni. Wybierzmy więc elementy a_n tak, aby $a_n \in A_n$. Ponieważ przestrzeń jest zwarta, więc istnieje zbieżny podciąg ciągu $\{a_n\}$; oznaczając jego granicę przez a_0, mamy $\varrho(a_0, A_{n_k}) \leqslant \varrho(a_0, a_{n_k})$, gdzie $\{a_{n_k}\}$ oznacza ciąg zbieżny do a_0. Stąd $\liminf \varrho(a_0, A_n) = 0$ i $a_0 \in \operatorname{Ls} A_n$ na podstawie definicji. Zbiór $\operatorname{Ls} A_n$ jest więc niepusty, co należało okazać.

Odwrotnie, zakładając, że warunek ten jest spełniony, weźmy dowolny ciąg elementów przestrzeni $\{a_n\}$. Kładąc $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ otrzymamy ciąg niepustych podzbiorów przestrzeni. Zgodnie z założeniem, istnieje element należący do zbioru $\operatorname{Ls} A_n$. Ponieważ oczywiście jest to również granica pewnego ciągu $\{a_{n_k}\}$, gdzie a_{n_k} należy do zbioru A_{n_k}, więc ciąg $\{a_n\}$ zawiera podciąg zbieżny i tym samym przestrzeń jest zwarta.

Niech teraz X oznacza przestrzeń zwartą. Mamy dowieść inkluzji:

$$\operatorname{Ls} f[A_n] \subset f[\operatorname{Ls} A_n] \tag{9}$$

dla dowolnej ciągłej funkcji f oraz dowolnego ciągu podzbiorów przestrzeni X.

Weźmy dowolne $y \in \operatorname{Ls} f[A_n]$. Wobec tego istnieje ciąg $\{y_{n_k}\}$ taki, że $y_{n_k} \in f[A_{n_k}]$ dla $k = 1, 2, \ldots$, zbieżny do y. Przyjmując $y_{n_k} = f(x_{n_k})$, $k = 1, 2, \ldots$, znajdujemy ciąg elementów przestrzeni zwartej X. Ciąg ten zawiera więc podciąg zbieżny; załóżmy dla uproszczenia notacji, że zbieżny jest sam rozpatrywany ciąg $\{x_{n_k}\}$. Oznaczając przez x jego granicę, stwierdzamy natychmiast, że $x \in \operatorname{Ls}[A_n]$. Z drugiej strony, wobec ciągłości funkcji f, ciąg $f(x_{n_k})$ jest zbieżny do $f(x)$. Stąd mamy $y = f(x)$ i tym samym $y \in f[\operatorname{Ls} A_n]$, co kończy dowód inkluzji (9).

Udowodniona inkluzja (9) wraz z prawdziwą zawsze inkluzją (*) dają żądaną równość.

Niech teraz X oznacza ustaloną, zaś Y dowolną przestrzeń metryczną. Załóżmy, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f: X \to Y$ oraz dla dowolnego ciągu $\{A_n\}$ podzbiorów przestrzeni X zachodzi równość:

$$f[\operatorname{Ls} A_n] = \operatorname{Ls} f[A_n]. \tag{10}$$

Wobec dowolności wyboru przestrzeni Y możemy założyć, że Y jest przestrzenią zwartą. Weźmy dowolny ciąg $\{A_n\}$ niepustych podzbiorów przestrzeni X. Możemy założyć również nie zmniejszając ogólności rozważań, że zbiór punktów przestrzeni Y jest niepusty. Wówczas otrzymamy ciąg niepustych podzbiorów przestrzeni Y, $\{f[A_n]\}$. Mamy więc $\operatorname{Ls} f[A_n] \neq \emptyset$, gdyż Y jest przestrzenią zwartą (na podstawie lematu). Lecz z założonej równości (10) wynika, że wtedy istnieje również element w zbiorze $f[\operatorname{Ls} A_n]$. Oznaczając ten element przez y, mamy $y = f(x)$, gdzie x jest elementem zbioru $\operatorname{Ls} A_n$. Tym samym $\operatorname{Ls} A_n \neq \emptyset$, więc przestrzeń X jest zwarta, c.b.d.o.

Z. K. Charzyński (Kielce)

49. Oznaczmy przez o początek układu współrzędnych i niech p, q i r będą punktami elipsoidy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

takimi, że wektory $\overrightarrow{op}$, $\overrightarrow{oq}$, $\overrightarrow{or}$ są prostopadłe. Dowieść, że

$$|o-p|^2 + |o+q|^2 + |o-r|^2 \leqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

Uogólnić ten wynik na przestrzeń euklidesową n-wymiarową.

A. Pełczyński (Warszawa)

Rozwiązanie. Udowodnimy od razu ogólniejszą wersję tezy zadania, tj. wykażemy, że jeżeli $p_1,\ldots,p_n$ są punktami $(n-1)$-wymiarowej elipsoidy o równaniu:

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^2=1 \tag{1}$$

takimi, że wektory $\overrightarrow{op_k}$ oraz $\overrightarrow{op_l}$ są ortogonalne dla $k\neq l$ $(k,\ l=1,\ldots,n)$, to zachodzi nierówność:

$$|o-p_1|^2+\ldots+|o-p_n|^2\leqslant (a_1)^2+\ldots+(a_n)^2. \tag{2}$$

Zauważmy najpierw, że ponieważ funkcja $f(u)=1/u$ jest wypukła, gdy $u>0$, to dla dowolnego układu $u_1,\ldots,u_m$ liczb dodatnich zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{b_1u_1+\ldots+b_mu_m}\leqslant b_1\frac{1}{u_1}+\ldots+b_m\frac{1}{u_m}, \tag{3}$$

gdzie $b_1,\ldots,b_m$ oznaczają liczby nieujemne, takie że $b_1+\ldots+b_m=1$.

Rozważmy układ, złożonych z n prostych wychodzących z punku o. Niech prosta o numerze $l=1,\ldots,n)$ ma równanie postaci:

$$x_k=t\alpha_k^{(l)};\quad k=1,\ldots,n;\quad -\infty<t<+\infty, \tag{4}$$

gdzie $(\alpha_1^{(l)})^2+(\alpha_2^{(l)})^2+\ldots+(\alpha_n^{(l)})^2=1$. Wówczas mamy $|o-p|^2=t^2$ dla dowolnego punktu p leżącego na tej prostej. Oznaczmy przez p_l punkt przecięcia prostej o numerze l z elipsoidą o równaniu (1). Podstawiając wartości spełniające (4) w równaniu (1) i wykorzystując uczynioną wyżej uwagę, otrzymamy:

$$|o-p_l|^2=t_l^2=\frac{1}{\dfrac{(\alpha_1^{(l)})^2}{(a_1)^2}+\ldots+\dfrac{(\alpha_n^{(l)})^2}{(a_n)^2}}.$$

Korzystając z kolei z nierówności (3) otrzymamy dla $l=1,\ldots,n$ nierówności:

$$|o-p_l|^2\leqslant(\alpha_1^{(l)})^2\,(a_1)^2+\ldots+(\alpha_n^{(l)})^2\,(a_n)^2. \tag{5}$$

Dodając stronami nierówności (5) dla $l=1,\ldots,n$ otrzymamy nierówność:

$$|o-p_1|^2+\ldots+|o-p_n|^2\leqslant \tag{6}$$
$$\leqslant[(\alpha_1^{(1)})^2+\ldots+(\alpha_1^{(n)})^2]\,(a_1)^2+\ldots+[(\alpha_n^{(1)})^2+\ldots,+(\alpha_n^{(n)})^2]\,(a_n)^2.$$

Zauważymy na koniec, że z założenia ortogonalności wektorów $\overrightarrow{op_k}$ oraz $\overrightarrow{op_l}$ dla $k\neq l$ oraz warunków $(\alpha_1^{(l)})^2+\ldots+(\alpha_n^{(l)})^2=1$, dla $l=1,\ldots,n$ wynika ortogonalność macierzy:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \ldots & \alpha_n^{(1)}\\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \ldots & \alpha_n^{(2)}\\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot\\ \alpha_1^{(n)} & \alpha_2^{(n)} & \ldots & \alpha_n^{(n)}\end{bmatrix}$$

Wobec tego mamy także:

$$(\alpha_l^{(1)})^2+\ldots+(\alpha_l^{(n)})^2=1 \tag{7}$$

dla $l=1,\ldots,n$. Tym samym, przy wymienionych założeniach, nierówność (6) jest równoważna zapowiedzianej nierówności (2), co kończy dowód.

Z. K. Charzyński (Kielce)

209. Niech a, b będą liczbami zespolonymi i niech

$$\varphi(a, b) = \sqrt{|a|^2+|b|^2+\sqrt{2|a|^2|b|^2+2\mathrm{Re}(a^2\bar{b}^2)}}.$$

Niech k, m, n będą liczbami naturalnymi takimi, że $2m(k-1) \equiv 0 \pmod n$ i $m(k-1) \not\equiv 0 \pmod n$. Pokazać, że przyjmując

$$\varepsilon = e^{2\pi i/n},$$

otrzymujemy

$$\sup_{s=0,\ldots,n-1} |a^{\varepsilon^{sm}}+b^{\varepsilon^{smk}}| = \varphi(a, b).$$

Z. Semadeni (Warszawa)

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że dla dowolnej funkcji rzeczywistej f, przyjmującej wartości nieujemne na pewnym zbiorze A, zachodzi równość:

$$\sup\{\sqrt{f(t)} : t \in A\} = \sqrt{\sup\{f(t) : t \in A\}}.$$

Niech a, b oznaczają dowolne liczby zespolone, zaś $\varepsilon_1 = e^{i\alpha}$, $\varepsilon_2 = e^{i\beta}$. Mamy wówczas:

$$|a\varepsilon_1+b\varepsilon_2|^2 = |ae^{i\alpha}+be^{i\beta}|^2 = (ae^{i\alpha}+be^{i\beta})\overline{(ae^{i\alpha}+be^{i\beta})} = (ae^{i\alpha}+be^{i\beta})(\bar{a}e^{-i\alpha}+\bar{b}e^{-i\beta}) =$$

$$= a\bar{a}+a\bar{b}e^{i(\alpha-\beta)}+\bar{a}be^{i(\beta-\alpha)}+b\bar{b} = |a|^2+|b|^2+a\bar{b}e^{i(\alpha-\beta)}+\overline{a\bar{b}e^{i(\alpha-\beta)}} = |a|^2+|b|^2+2\mathrm{Re}\,(a\bar{b}e^{i(\alpha-\beta)}).$$

Podstawiając $\alpha = smk\dfrac{2\pi}{n}$; $\beta = sm\dfrac{2\pi}{n}$, gdzie s oznacza dowolną z liczb $0,\ldots,n-1$ otrzymamy $\alpha-\beta = sm(k-1)\dfrac{2\pi}{n}$. Zgodnie z założeniem jest to całkowita wielokrotność liczby π. Zauważmy przy tym, że liczba $\dfrac{2m(k-1)}{n}$ nie może być parzysta, gdyż wówczas mielibyśmy, wbrew założeniu, $m(k-1) \equiv 0 \pmod n$. Ponieważ oczywiście $n \neq 2$, więc mamy $e^{i(\alpha-\beta)} = \pm 1$, przy czym dla $s = 0$ otrzymujemy wartość $+1$, zaś dla $s = 1$, zgodnie z poprzednią uwagą, wartość -1. Wobec tego:

$$|a\varepsilon^{sm}+b\varepsilon^{smk}|^2 = |a|^2+|b|^2+\sigma(\bar{a}b+a\bar{b}),$$

gdzie $\sigma = \pm 1$; $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Stąd, na podstawie uwagi wspomnianej na wstępie, otrzymujemy równość:

$$\sup_{s=0,\ldots,n-1} |a\varepsilon^{sm}+b\varepsilon^{smk}| = \sqrt{|a|^2+|b|^2+|\bar{a}b+a\bar{b}|}.$$

Aby w pełni uzasadnić tezę zadania, wystarczy sprawdzić, że:

$$|\bar{a}b+a\bar{b}| = \sqrt{2|a|^2|b|^2+2\mathrm{Re}\,(a^2\bar{b}^2)}.$$

Otóż mamy:

$$|\bar{a}b+a\bar{b}|^2 = (\bar{a}b+a\bar{b})(a\bar{b}+\bar{a}b) = (a\bar{b}+\bar{a}b)^2 = (a\bar{b})^2+2a\bar{b}\bar{a}b+(\bar{a}b)^2 = 2|a|^2|b|^2+(a\bar{b})^2+\overline{(a\bar{b})^2} =$$

$$= 2|a|^2|b|^2+2\mathrm{Re}\,(a^2\bar{b}^2).$$

Na marginesie warto zauważyć, że zachodzi równość:

$$\varphi(a, b) = \max(|a+b|, |a-b|).$$

Z. K. Charzyński (Kielce)

210. Niech χ będzie charakterem na grupie abelowej G, takim że $\chi^{k-1} \neq 1$ i $\chi^{2(k-1)} = 1$. Pokazać, że dla dowolnych liczb zespolonych a, b zachodzi wzór

$$\sup_{g \in G} |a_\chi(g) + b\chi^k(g)| = \varphi(a, b).$$

Z. Semadeni (Warszawa)

Rozwiązanie. Niech $g \in G$. Oznaczając $\chi(g)$ przez z, rozważam dwa przypadki:

1° $z^{k-1} = 1$. Wówczas:

$$|a\chi(g) + b\chi^k(g)| = |z|\,|a + bz^{k-1}| = |a+b|,$$

2° $z^{k-1} \neq 1$. Wówczas, zgodnie z założeniem, $(z^{k-1})^2 = z^{2(k-1)} = 1$, skąd $z^{k-1} = -1$. Wobec tego:

$$|a\chi(g) + b\chi^k(g)| = |z|\,|a + bz^{k-1}| = |a-b|.$$

Ponieważ rozpatrzone przypadki wyczerpują wszystkie możliwości, zaś w grupie G istnieją zarówno elementy spełniające 1° (np. zero grupy G), jak też elementy spełniające 2° (na mocy założenia, że $\chi^{k-1} \neq 1$), więc ostatecznie otrzymujemy:

$$\sup_{g \in G} |a\chi(g) + b\chi^k(g)| = \max\{|a+b|, |a-b|\} = \varphi(a, b)$$

(na podstawie uwagi w rozwiązaniu zadania 209).

Z. K. Charzyński (Kielce)

Krótkie informacje

Medal i wykład imienia Wacława Sierpińskiego

Senat Uniwersytetu Warszawskiego podejmując inicjatywę Oddziału Warszawskiego PTM i Wydziału Matematyki UW uczczenia pamięci Wacława Sierpińskiego postanowił organizować co roku w rocznicę jego urodzin wykład imienia profesora Wacława Sierpińskiego oraz ufundować medal imienia Profesora.

Do wygłoszenia wykładu będzie zaproszona osoba wskazywana każdorazowo przez jury w składzie 6 osób, z których 3 wybierane będą przez Oddział Warszawski PTM, a 3 powoływane przez Rektora Uniwersytetu Warszawskiego spośród profesorów i docentów Wydziału Matematyki i Mechaniki UW. Jury wybierać będzie przewodniczącego ze swego grona. Regulamin postępowania jury ustali Rektor UW w porozumieniu z Oddziałem Warszawskim PTM.