ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XX (1976)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

TADEUSZ MOSTOWSKI (Warszawa)

Analityczne zastosowania twierdzeń o rozstrzygalności*

W artykule niniejszym sformułujemy dwa twierdzenia dotyczące rozstrzygalności elementarnych teorii niektórych ciał i podamy ich zastosowania do analizy.

Przypomnimy kilka najelementarniejszych definicji z logiki. *Systemem relacyjnym* nazywamy każdą parę postaci $\mathfrak{A} = (A, \{R_i\})$, gdzie A jest zbiorem, a R_i są (z reguły wieloargumentowymi) relacjami w A. Np. rozpatrując elementarną teorię ciał często rozważa się systemy relacyjne $(K, \{R_1, R_2\})$, gdzie zbiór K jest ciałem, a R_1, R_2 są trójargumentowymi relacjami zdefiniowanymi następująco: $R_1(x, y, z) \Leftrightarrow (x+y = z)$, $R_2(x, y, z) \Leftrightarrow (xy = z)$. Formuły postaci $R_i(x, y, \ldots)$ nazywają się *formułami atomowymi*; łącząc je ze sobą za pomocą operacji logicznych (koniunkcji, alternatywy, itp.), a także stosując kwantyfikatory otrzymujemy klasę formuł elementarnych. Wyraz „elementarny" jest tu użyty dla podkreślenia, że zmienne interpretujemy jedynie jako elementy A; używając formuł elementarnych nie możemy więc mówić np. o podzbiorach A.

Badając nie jeden ustalony system relacyjny, lecz całą klasę systemów, wygodniej jest wprowadzić klasę formuł elementarnych w sposób czysto formalny; mamy wtedy pewną ilość symboli relacyjnych R_i, z których, jak poprzednio, możemy tworzyć formuły. Jeśli każdemu symbolowi relacyjnemu R_i odpowiada pewna relacja (oznaczana tym samym symbolem R_i) w jakimś zbiorze A, to możemy mówić o interpretacji formuł w systemie relacyjnym $\mathfrak{A} = (A, \{R_i\})$; w tym kontekście $\mathfrak{A}$ nazywamy *modelem*.

Zdaniem nazywamy taką formułę, w której nie występują zmienne wolne (tzn. każda zmienna jest poprzedzona kwantyfikatorem). Każde zdanie α jest prawdziwe lub fałszywe w danym modelu $\mathfrak{A}$; symbol $\mathfrak{A} \models \alpha$ oznacza, że α jest spełnione w interpretacji w $\mathfrak{A}$.

Modele $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ nazywają się *elementarnie równoważne*, jeśli dla każdego zdania α

$$\mathfrak{A} \models \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathfrak{B} \models \alpha.$$

Teoria Σ jest to dowolny zbiór zdań. Model $\mathfrak{A}$ jest modelem dla Σ, jeśli każde zdanie $\alpha \in \Sigma$ jest spełnione w $\mathfrak{A}$.

* Artykuł ten jest nieznacznie rozszerzonym tekstem referatu wygłoszonego przez autora na Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego w Szczecinie, w czerwcu 1975 r.

Teoria Σ jest *rozstrzygalna*, jeśli istnieje efektywna metoda sprawdzania czy dane zdanie jest konsekwencją Σ. Nie będziemy precyzowali, w jakim sensie rozumiemy tutaj efektywność; dowody ważnych dla nas twierdzeń polegają na jawnym skonstruowaniu takiej metody.

Każdy system relacyjny określa swoją teorię; składa się ona ze wszystkich zdań spełnionych w tym systemie.

Pierwsze z ważnych dla nas twierdzeń o rozstrzygalności dotyczy rozstrzygalności teorii ciał rzeczywiście domkniętych. Przypomnijmy, że *ciało rzeczywiście domknięte* jest to ciało uporządkowane, w którym są spełnione następujące warunki:

1° każdy element nieujemny jest kwadratem: $\forall x\,[(x \geqslant 0) \Rightarrow \exists y\,(x = y^2)]$,

2° każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek.

Dla sformalizowania teorii ciał rzeczywiście domkniętych wprowadzamy trzeci symbol relacyjny R_3 (R_1 i R_2 zostały wprowadzone na początku artykułu); formułę $R_3(x, y)$ interpretujemy jako $x \leqslant y$. Do znanych aksjomatów ciał uporządkowanych dodajemy dwa wyżej sformułowane; drugi z nich, podany w postaci nieformalnej, prowadzi przy formalizacji do nieskończonego układu aksjomatów.

TWIERDZENIE TARSKIEGO. *Teoria ciał rzeczywiście domkniętych jest rozstrzygalna, a każde dwa jej modele są elementarnie równoważne.*

Twierdzenie to udowodnił Tarski metodą eliminacji kwantyfikatorów, co ma duże znaczenie dla zastosowań. Często bowiem badamy równania algebraiczne o współczynnikach zależnych od parametrów; ważne jest wtedy umieć podać warunki na parametry gwarantujące istnienie rozwiązań.

Nad zastosowaniami twierdzenia Tarskiego nie będziemy się dłużej zatrzymywali. Należą do nich proste dowody (słuszne tylko w przypadku wielomianów) nierówności typu nierówności Łojasiewicza; warto również zacytować następujące twierdzenie E. Artina, będące rozwiązaniem 17 problemu Hilberta.

TWIERDZENIE. *Niech $f(x_1, \ldots, x_n)$ będzie wielomianem o współczynnikach wymiernych lub rzeczywistych przyjmującym tylko nieujemne wartości. Wówczas f jest sumą kwadratów funkcji wymiernych o współczynnikach wymiernych lub rzeczywistych.*

Twierdzenie Artina może być uzyskane dla przypadku rzeczywistego jako bezpośredni wniosek z twierdzenia Tarskiego. Zwróćmy uwagę, że rozumowanie Artina jest czysto algebraiczne; jakkolwiek analogiczny problem można postawić np. dla funkcji analitycznych, to analiza dowodu Artina nie daje żadnych wskazówek do rozwiązania takiego zagadnienia.

Ze względu na wspomniane zastosowania jest rzeczą interesującą zbadać problem rozstrzygalności elementarnych teorii innych typów ciał. Bardzo łatwo dowodzi się, że teoria ciał algebraicznie domkniętych ustalonej charakterystyki jest teorią rozstrzygalną. Również teoria każdego ciała skończonego jest rozstrzygalna.

Natomiast J. Robinson udowodniła, że elementarna teoria ciała liczb wymiernych nie jest rozstrzygalna. Po odkryciu tego faktu Tarski wyraził przypuszczenie, że każde ciało, prowadzące do teorii rozstrzygalnej, jest albo rzeczywiście domknięte,

albo algebraicznie domknięte, albo skończone. Hipoteza ta okazała się jednak fałszywa; Ax i Kochen udowodnili twierdzenie, z którego wynikają dalsze przykłady ciał, prowadzących do teorii rozstrzygalnych: ciała liczb p-adycznych $\boldsymbol{Q}_p$ oraz ciała szeregów Laurenta jednej zmiennej o współczynnikach z ciała o teorii rozstrzygalnej.

Wynik Axa i Kochena dotyczy ciał z waluacją dyskretną. Przypomnijmy, że waluacja dyskretna v ciała K jest funkcją

$$v\colon K \setminus \{0\} \to \boldsymbol{Z};$$

liczby całkowite są tu traktowane jako addytywna grupa uporządkowana. Teoria elementarna ciał z waluacją dyskretną jest oczywiście bogatsza od teorii dowolnych ciał. Oprócz zmiennych $x, y, \ldots$, interpretowanych jako elementy ciała, dysponujemy zmiennymi $n_1, n_2, \ldots$, interpretowanymi jako liczby całkowite. Oprócz symboli relacyjnych R_1, R_2 występują trzy dalsze, interpretowane następująco:

$$R_3(n_1, n_2) \Leftrightarrow (n_1 \leqslant n_2), \quad R_4(n_1, n_2, n_3) \Leftrightarrow (n_1 + n_2 = n_3),$$
$$R_5(x, n) \Leftrightarrow \big(v(x) = n\big).$$

Ciało $k\big((t)\big)$ szeregów Laurenta o współczynnikach z ciała k traktowane jest jako ciało z waluacją określoną wzorem

$$v\Big(\sum_{i=i_0}^{\infty} a_i t^i\Big) = \inf\{i\colon a_i \neq 0\}.$$

Nie będziemy formułować twierdzenia Axa i Kochena w pełnej ogólności; podamy jedynie przypadek ważny dla naszych zastosowań:

TWIERDZENIE. *Jeśli k jest algebraicznie domknięte lub rzeczywiście domknięte, to elementarna teoria ciała $k\big((t)\big)$ jest teorią rozstrzygalną.*

Ax i Kochen udowodnili swoje twierdzenie metodami teorii modeli, które nie są dostatecznie bezpośrednie dla zastosowań. Inny dowód twierdzenia, oparty na metodzie eliminacji kwantyfikatorów, podał P. J. Cohen. Metoda ta jest istotna dla dalszych dowodów.

Podamy obecnie dwa zastosowania powyższego twierdzenia.

Pierwsze z nich dotyczy niektórych lokalnych zagadnień analitycznych. Niech $k = \boldsymbol{C}$ lub $\boldsymbol{R}$. Podstawowym twierdzeniem będzie dla nas następujące twierdzenie M. Artina:

TWIERDZENIE. *Niech $f_i(x, y)$ będą kiełkami w 0 funkcji analitycznych $n+m$ zmiennych $(x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $i = 1, \ldots, p)$. Załóżmy, że dane jest m szeregów formalnych $\bar{y}(x) = \big(\bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_m(x)\big)$ spełniających równania*

$$f_i\big(x, \bar{y}(x)\big) = 0.$$

Wówczas dla każdej liczby naturalnej N istnieją takie szeregi zbieżne $y_N(x) = \big(y_1^{(N)}(x), \ldots, y_m^{(N)}(x)\big)$, że

$$f_i\big(x, y_N(x)\big) = 0 \quad \text{oraz} \quad D^q y_N(0) = D^q \bar{y}(0) \quad \text{dla} \quad |q| \leqslant N.$$

Twierdzenie to oznacza więc, że każde rozwiązanie formalne układu równań analitycznych można aproksymować w topologii Krulla rozwiązaniami zbieżnymi.

W zastosowaniach bardzo często zdarza się, że szeregi formalne $\bar{y}(x)$ nie zależą od wszystkich zmiennych x; dokładniej, szereg $\bar{y}_j(x)$ zależy tylko od zmiennych x_i, gdzie $i \in A_j \subset \{1, \ldots, n\}$. Artin postawił więc problem: czy w takiej sytuacji można wybrać aproksymujące szeregi $y_N(x)$ w taki sposób, żeby $y_j^{(N)}(x)$ też zależały tylko od zmiennych x_i, $i \in A_j$.

W ogólnym przypadku problem ten ma rozwiązanie negatywne.

Zagadnienie to jednak daje się zbadać dokładniej dzięki metodom rozstrzygalności. Wymaga to uogólnienia twierdzenia Cohena na przypadek szeregów wielu zmiennych.

Rozpatrzmy więc pierścień szeregów formalnych $k[[x_1, \ldots, x_n]]$ i jego podpierścień $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ złożony ze wszystkich szeregów zbieżnych (lub, co na jedno wychodzi, z kiełków w 0 funkcji analitycznych). Celowe jest wprowadzić jeszcze podpierścień $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \subset k\{x_1, \ldots, x_n\}$ złożony ze wszystkich kiełków w 0 funkcji Nasha; kiełek f funkcji analitycznej nazywa się *kiełkiem funkcji Nasha*, jeśli spełnia nietrywialne równanie algebraiczne: $P(x, f(x)) = 0$ dla pewnego wielomianu $P(x, t) \not\equiv 0$. Przykładem takiej funkcji jest więc funkcja $\sqrt{1+x^2}$.

We wszystkich tych pierścieniach wprowadźmy waluacje dyskretne

$$v\Big(\sum a_q x^q\Big) = \inf\{|q|\colon a_q \neq 0\};$$

do pięciu relacji, zdefiniowanych tak jak w przypadku szeregów jednej zmiennej, dodajmy jeszcze 2^n relacji R_A, jednoargumentowych, indeksowanych wszystkimi podzbiorami zbioru $\{1, \ldots, n\}$:

$$R_A(u) \Leftrightarrow u \text{ zależy tylko od zmiennych } x_i,\ i \in A.$$

Pierścienie szeregów formalnych, kiełków funkcji analitycznych i kiełków funkcji Nasha będziemy dalej rozumieli jako systemy relacyjne, z wszystkimi wyżej wymienionymi relacjami. Wówczas twierdzenie Cohena uogólnia się w sposób następujący:

TWIERDZENIE. *Dla każdego n pierścienie szeregów formalnych, kiełków funkcji analitycznych i kiełków funkcji Nasha n zmiennych są systemami elementarnie równoważnymi, a ich (wspólna) teoria jest rozstrzygalna.*

Twierdzenie to nie tylko pozwala uzyskać nowy dowód twierdzenia M. Artina, ale pozwala również pozytywnie rozwiązać jego problem w przypadku równań algebraicznych:

TWIERDZENIE. *Jeśli f_i są wielomianami, to dla każdego N istnieją takie kiełki funkcji Nasha $y_N(x) = (y_1^{(N)}(x), \ldots, y_m^{(N)}(x))$, że*

$$f_i(x, y_N(x)) = 0, \quad D^q y_N(0) = D^q \bar{y}(0),$$

$$|q| \leqslant N, \text{ oraz } y_j^{(N)} \text{ zależy tylko od zmiennych } x_i, \quad i \in A_j.$$

Zastosujemy obecnie powyższe twierdzenie do badania ideałów funkcji różniczkowalnych. Dla zbioru otwartego $U \subset \boldsymbol{R}^n$ niech $C^\infty(U)$ oznacza pierścień funkcji klasy C^∞ na U z topologią zbieżności niemal jednostajnej wraz ze wszystkimi pochodnymi.

TWIERDZENIE. *Niech U będzie otoczeniem 0 w $\boldsymbol{R}^n$ i $f \in C^\infty(U)$. Wówczas istnieje takie otoczenie zera V, $0 \in V \subset U$, i funkcja $g \in C^\infty(V)$, że $f-g$ jest płaska w 0 oraz*

1° *g generuje ideał domknięty w pierścieniu $C^\infty(V)$,*

2° *zbiór $g^{-1}(0)$ jest homeomoligczny ze zbiorem zer pewnej funkcji Nasha.*

(*Funkcją płaską* w 0 nazywamy taką funkcję, której wszystkie pochodne w 0 są równe 0.)

Znaczenie tego twierdzenia jest następujące. Profesor Łojasiewicz udowodnił, że każda funkcja analityczna generuje ideał domknięty w pierścieniu funkcji klasy C^∞; twierdzenie to rozwiązało problem dzielenia dystrybucji przez funkcje analityczne. Własność ta nie przysługuje wszystkim funkcjom klasy C^∞, istnieje jednak wiele funkcji nieanalitycznych generujących ideały domknięte. Często bada się więc, do jakiego stopnia ta własność jest typowa wśród funkcji klasy C^∞. Pierwsza część twierdzenia pokazuje, że warunek generowania ideału domkniętego nie nakłada żadnych ograniczeń na pochodne funkcji w punkcie. Część ta może być wyprowadzona (w trudniejszy sposób) bezpośrednio z twierdzenia M. Artina.

Druga część twierdzenia wydaje się ciekawa nawet dla funkcji analitycznych f. Ściślej mówiąc, w tym wypadku dowodzi się, że kiełek zbioru $f^{-1}(0)$ jest homeomorficzny z kiełkiem zbioru zer pewnej funkcji Nasha. Thom postawił pytanie czy każdy kiełek zbioru zer funkcji analitycznej jest homeomorficzny z kiełkiem zbioru zer wielomianu; problem ten jest jednak dotąd nierozwiązany.

Przytoczone twierdzenie jest słuszne nie tylko dla ideałów głównych; pozostaje prawdziwe dla ideałów skończenie generowanych.

Drugie zastosowanie metody Cohena dotyczy zagadnień globalnych i jest rozwiązaniem analitycznego analogu 17 problemu Hilberta.

TWIERDZENIE. *Niech M będzie zwartą spójną rozmaitością analityczną. Wówczas każda funkcja analityczna nieujemna na M jest sumą kwadratów funkcji meromorficznych.*

Naszkicujemy bardzo pobieżnie ideę dowodu. Dla uproszczenia załóżmy, że M jest zanurzona w przestrzeń $\boldsymbol{R}^n$ na pewien zbiór algebraiczny (tj. zbiór zer pewnego wielomianu).

Podobnie jak dla przypadku lokalnego, wprowadzimy pierścień funkcji Nasha na M: funkcja analityczna f na M nazywa się *funkcją Nasha*, jeśli spełnia nietrywialne równanie algebraiczne: $P\big(x, f(x)\big) = 0$ dla $x \in M$, gdzie $P(x, t)$ jest wielomianem i $P(x, t) \not\equiv 0$ dla $(x, t) \in M \times \boldsymbol{R}$.

Niech $\mathcal{O}(M)$ i $\mathcal{N}(M)$ oznaczają odpowiednio pierścienie funkcji analitycznych i funkcji Nasha na M. Niech $(17)_{\mathcal{O}}$ oznacza tezę naszego twierdzenia, a $(17)_{\mathcal{N}}$ — jego odpowiednik dla funkcji Nasha.

Pierwszym krokiem dowodu $(17)_{\mathscr{O}}$ jest dowód $(17)_{\mathscr{N}}$. Funkcje Nasha są na tyle bliskie wielomianom, że idea E. Artina daje się zastosować (po pokonaniu pewnych trudności natury technicznej) do dowodu $(17)_{\mathscr{N}}$.

Następnie dowodzi się, głównie w oparciu o metodę Cohena, że elementarne teorie ciał ułamków pierścieni $\mathscr{O}(M)$ i $\mathscr{N}(M)$ są te same.

Rozpatrzmy teraz następujące zdanie:

$$\forall f \left\{ \begin{array}{ll} & \exists\, u_1 (f = u_1^2) \quad \text{lub} \\ f \geqslant 0 \Rightarrow & \exists\, u_1, u_2 (f = u_1^2 + u_2^2) \quad \text{lub} \\ & \exists\, u_1, u_2, u_3 (f = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \quad \text{lub} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

Jest ono prawdziwe, jeśli występujące w nim symbole interpretujemy jako meromorficzne funkcje Nasha. To jeszcze nie dowodzi implikacji $(17)_{\mathscr{N}} \Rightarrow (17)_{\mathscr{O}}$, gdyż zdanie to nie jest zdaniem postaci rozważanej dotychczas (występuje nieskończona alternatywa). Jednak implikacja ta daje się uzasadnić za pomocą dodatkowego rozumowania wykorzystującego specjalne własności równań występujących w nieskończonej alternatywie.

Uwagi bibliograficzne.

Twierdzenia Tarskiego, Axa i Kochena i inne informacje na temat zupełności i rozstrzygalności teorii ciał znaleźć można w książce: C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model theory*, North Holland Publishing Co., Amsterdam 1973.

Twierdzenie Cohena: P. J. Cohen, *Decision procedures for real and p-adic fields*, Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969), str. 131–151.

Twierdzenie E. Artina: S. Lang, *Algebra*, PWN, Warszawa 1973, lub A. Robinson, *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*, North Holland Publishing Co., Amsterdam 1963.

Twierdzenie M. Artina: M. Artin, *On the solutions of analytic equations*, Invent. Math. 5 (1968), str. 277–291.

Pozostałe wyniki są podane lub zacytowane w pracach: T. Mostowski, *A decision procedure for rings of power series of several variables and applications*, oraz: *Hilbert's 17-th problem for real-analytic functions*; w druku.