ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XX (1976)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

MICHAŁ SZUREK (Warszawa)

Czym zajmuje się geometria algebraiczna?

Postawione w tytule pytanie wskazuje, że celem tego artykułu jest przedstawienie problematyki i metod badawczych w geometrii algebraicznej. Nie staramy się, by artykuł był skrótem podręcznika. Zakładamy, że geometria algebraiczna jest znana Czytelnikowi prawie wyłącznie z nazwy, zaczniemy zatem od krótkiego wstępu.

Niektórzy z Czytelników od kilkudziesięciu, inni od kilkunastu, a jeszcze inni być może od niespełna dziesięciu lat wiedzą, że równanie $x^2+y^2-1=0$ opisuje na płaszczyźnie rzeczywistej okrąg, równanie $x^2-2y^2+1=0$ hiperbolę, a równanie $x^6y^5+6x^2y-7xy-4y+1=0$ krzywą o dość skomplikowanym kształcie. Cudowna możliwość narysowania zbioru rozwiązań równania jest źródłem geometrii algebraicznej, a człowiek, który pierwszy postawił pytanie, jak z własności wielomianu opisującego krzywą odczytać własności tej krzywej, jest tej dyscypliny matematycznej twórcą. Historycznie, pierwszą nietrywialną (z dzisiejszego punktu widzenia) badaną klasą krzywych algebraicznych była klasa krzywych eliptycznych, to jest opisywalnych na płaszczyźnie — po odpowiednim wyborze układu współrzędnych równaniem $y^2=x^3+ax+b$, gdzie a i b nie są jednocześnie równe zeru. Często i dziś pierwszym trudniejszym krokiem w dowodzie ogólnego twierdzenia o zbiorach algebraicznych jest wykazanie jego prawdziwości dla krzywych eliptycznych. Możność „narysowania" krzywej algebraicznej narzuca jeszcze pewną metodę badawczą: „geometryczną". Co przez to rozumiemy, jest intuicyjnie zrozumiałe, dopóki rozpatrywane przez nas równania mają współczynniki rzeczywiste, lub chociażby zespolone — jednak nie tylko zbiory rozwiązań takich równań są obiektami zainteresowań matematyków uprawiających współcześnie geometrię algebraiczną. Przedmiotami badań są raczej zbiory rozwiązań układów równań wielomianowych o współczynnikach z dowolnego ciała lub nawet tylko pierścienia. Głęboką teorię podzbiorów algebraicznych przestrzeni $\boldsymbol{C}^n$ stworzyła na przełomie stuleci szkoła włoska, której założycielami byli Cremona, Segre i Bertini, a najwybitniejszymi przedstawicielami Castelnuovo, Enriques i Severi. Głównym osiągnięciem tej szkoły jest rozbudowana teoria powierzchni, a wiele jej idei jest żywe do dziś.

Problem znalezienia (lub przeniesienia znanych) metod do badania zbiorów rozwiązań równań o współczynnikach niekoniecznie zespolonych był przez niemal

pół wieku wielkim zagadnieniem geometrii algebraicznej. Brak takich metod doprowadził nawet do tego, że używano pojęć nie zdefiniowanych poprawnie, ale to raczej przyspieszyło rozwój, a nie opóźniło go. Pierwsze poprawne teorie były trudne i skomplikowane, a dalszy rozwój przyniósł nagromadzenie i niejednolitość pojęć. Oddalono się od metod geometrycznych (trzydzieste i czterdzieste lata bieżącego stulecia). Jak się wydaje, geometria algebraiczna została wtedy trochę zepchnięta w cień przez bujnie rozwijającą się topologię i analizę funkcjonalną. Do najwybitniejszych osiągnięć geometrii algebraicznej tego okresu należy pozytywne rozstrzygnięcie hipotezy Riemanna, wpierw dla krzywych eliptycznych (Hasse, 1936), a następnie dla dowolnych krzywych (Weil, 1940). Rozpatrzymy skończone ciało K i jego skończone rozszerzenie L. Opisowo, wzór w tezie hipotezy Riemanna daje najlepszą ocenę ilości rozwiązań równania $f(x, y) = 0$ w ciele L w zależności od ilości elementów ciał K i L i pewnego geometrycznego niezmiennika (genusu) krzywej o równaniu $f(x, y) = 0$.

Opublikowana w 1955 r. w Annals of Mathematics praca Serre'a *Faisceaux algébriques cohérents* wniosła ożywczy powiew geometrii i zrewolucjonizowała omawianą gałąź matematyki, mającą przecież geometrię w nazwie. Zmieniono definicje podstawowych pojęć, nie tracąc nic z ich treści opracowano nową terminologię i zaczęto powtórnie używać języka topologicznego. „Where are varieties of yesteryear?" — pytał z nutką żalu André Weil we wstępie do drugiego (1960) wydania swojej książki *Foundations of algebraic geometry* (pierwsze wydanie 1946) i stwierdzał, że nie może już reklamować swojej książki jako nowoczesnej. A książka ta była ukoronowaniem długiego etapu rozwoju, ugruntowywała podstawy wyjścia poza klasyczną teorię rozmaitości algebraicznych zespolonych. Dawała pierwszy kompletny i formalnie poprawny wykład nieklasycznej teorii przecięć, stworzonej dzięki wysiłkom Severiego, van der Waerdena i innych. Dzisiaj studenci zajmujący się geometrią algebraiczną często nie wiedzą o jej istnieniu.

W drugiej połowie lat pięćdziesiątych zaczyna się działalność Alexandra Grothendiecka. On, Dieudonné, Cartan, Borel, Demazure, Cartier i inni stworzyli i sformalizowali w duchu wzmiankowanej pracy Serre'a podstawy nowoczesnej geometrii algebraicznej. Słynne EGA (*Elements de géométrie algébrique*) — choć trudne w czytaniu — zawierają piękny wykład tej teorii. Książki o charakterze podręcznikowym pojawiły się trochę później. W miarę upływu czasu były one — zdaniem autora tego artykułu — pisane w coraz bardziej przystępny sposób.

Geometria algebraiczna stała się znów popularna w świecie, a jej podstawowe pojęcia znalazły zastosowanie i w innych dyscyplinach matematycznych, na przykład w algebraicznej teorii liczb. Obecnie silnymi ośrodkami jej są Stany Zjednoczone (Mumford — medal Fieldsa 1974, Zariski, Hironaka, Kleiman), ZSRR (Szafarewicz, Manin, Dołgaczow, Tiuryn), Francja, Włochy (Bombieri — medal Fieldsa 1974), NRD. W Polsce geometria algebraiczna jest mało znanym i nie mającym tradycji działem matematyki. Zajmuje się nią kilkanaście osób (wliczając studentów), a jedynym samodzielnym pracownikiem naukowym specjalizującym się w tej dzie-

dzinie jest u nas Andrzej Białynicki-Birula. Badania dotyczą głównie działań grup algebraicznych na zbiorach algebraicznych. Kilka osób zajmuje się teorią deformacji. Teoria deformacji działań grup algebraicznych była tematem kilku dobrych (interesujące własne wyniki) prac magisterskich w Uniwersytecie Warszawskim w 1974 r. Wymienione zagadnienia opiszemy nieco szerzej w końcowej części artykułu.

W języku polskim nie ma również książki poświęconej geometrii algebraicznej; książka Andrzeja Turowicza pod tytułem *Geometria zer wielomianów* z serii „Biblioteczka naukowa inżyniera" nie traktuje o geometrii algebraicznej!

Przyjmujemy, że Czytelnik zna podstawy algebry liniowej, np. w zakresie książki Białynickiego-Biruli [1], rozdziały V–VII oraz podstawy topologii ogólnej np. w zakresie książki Engelkinga [2], rozdziały I–III. W rozdziale 3, który ma charakter bardziej opisowy niż pozostałe, odwołujemy się często do podstawowych pojęć geometrii różniczkowej (rozmaitość różniczkowa, funkcja różniczkowalna, przestrzeń styczna).

Zaczynamy (rozdział 1) od bardziej klasycznej sytuacji: opisujemy pojęcie podzbioru algebraicznego przestrzeni K^n, gdzie K jest dowolnym ciałem, funkcji regularnej i przekształcenia regularnego oraz opisujemy odpowiedniość między zbiorami algebraicznymi w K^n a ideałami pierścienia wielomianów n zmiennych o współczynnikach z ciała K. Okazuje się, że założenie algebraicznej domkniętości ciała czyni tę odpowiedniość szczególnie przejrzystą (twierdzenie Hilberta o zerach).

W najbardziej współczesną geometrię algebraiczną wkraczamy w rozdziale 2. Opisane tam pojęcie spektrum pierścienia (przemiennego, z jedynką) gra w geometrii algebraicznej rolę taką, jak pojęcie obszaru, tj. zbioru spójnego i otwartego przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$ ($\boldsymbol{C}^n$) w geometrii różniczkowej lub teorii rozmaitości analitycznych. Pokazujemy pewne związki między algebraicznymi własnościami pierścieni a topologicznymi własnościami przyporządkowanych im przestrzeni topologicznych (spektrów). Rozdział ten jest formalnie niezależny od poprzedniego, jednak Czytelnik nie powinien czytać go bez zapoznania się z treścią rozdziału 1. Następnie rozbudowujemy konstruowaną topologizację teorii pierścieni przemiennych, wiążąc homomorfizmy pierścieni z pewnymi przekształceniami ciągłymi spektrów tych pierścieni. W rozdziale 3 staramy się dać Czytelnikowi wyobrażenie o tym, jakiego typu zagadnienia, pojęcia i metody badawcze składają się na geometrię algebraiczną ostatnich lat.

Na zakończenie części wstępnej kilka uwag o terminologii i oznaczeniach. Przez pierścień rozumiemy zawsze pierścień przemienny z jedynką, a jeżeli $h\colon A \to B$ jest homomorfizmem pierścieni, to zakładamy, że $h(1_A) = 1_B$. Symbole $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$, $A[x_1, \ldots, x_n]$ oznaczają odpowiednio pierścień liczb całkowitych, ciało liczb rzeczywistych, ciało liczb zespolonych oraz pierścień wielomianów n zmiennych o współczynnikach z pierścienia A. Pierścień zerowy oznaczamy przez 0. Jest to jedyny pierścień, w którym jedynka jest zerem. Jeżeli E jest podzbiorem pierścienia A, to najmniejszy ideał pierścienia A, zawierający E nazywamy *ideałem generowanym przez* E i oznaczamy przez (E). Ideał ten składa się z elementów pierścienia A postaci

$a_1e_1+\ldots+a_qe_q$, gdzie q jest liczbą naturalną, $a_1, \ldots, a_q$ — elementami pierścienia A, zaś $e_1, \ldots, e_q$ elementami zbioru E. Gdy $E = \{e_1, \ldots, e_t\}$, to piszemy $(e_1, \ldots, e_t)$ zamiast $(\{e_1, \ldots, e_t\})$.

Przypominamy, że ciałem algebraicznie domkniętym nazywamy ciało $\bar{k}$ takie, że każdy wielomian jednej zmiennej dodatniego stopnia ma w $\bar{k}$ pierwiastek. Ciało $\boldsymbol{C}$ liczb zespolonych jest algebraicznie domknięte, a orzekające o tym twierdzenie nazywane jest zasadniczym twierdzeniem algebry. Innym przykładem ciała algebraicznie domkniętego jest ciało liczb algebraicznych (zespolonych), to znaczy liczb zespolonych będących pierwiastkami wielomianów o współczynnikach całkowitych. Można udowodnić (nie korzystamy z tego), że każde ciało jest podciałem pewnego ciała algebraicznie domkniętego (twierdzenie Artina). W dalszym ciągu symbolu $\bar{k}$ będziemy używać do oznaczania ciał algebraicznie domkniętych.

1. Zbiory algebraiczne. Jak wspomnieliśmy już we wstępie, *zbiorem algebraicznym* w przestrzeni K^n (K — dowolne ciało) nazywamy podzbiór tej przestrzeni złożony ze wszystkich rozwiązań pewnego układu równań

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{1}$$

gdzie α przebiega dowolny skończony zbiór wskaźników, a f_α są wielomianami n zmiennych o współczynnikach z ciała K. Zbiór rozwiązań układu (1) oznaczamy przez $W(\{f_\alpha\})$ lub $W(f_1, \ldots, f_m)$ gdy $\alpha = 1, 2, \ldots, m$.

PRZYKŁAD 1. Zbiór pusty jest zbiorem algebraicznym jako zbiór rozwiązań układu złożonego z jednego równania $1 = 0$. Równanie $0 = 0$ jest spełnione przez wszystkie punkty przestrzeni K^n, zatem K^n jest zbiorem algebraicznym. Każda podprzestrzeń liniowa (ogólniej: afiniczna) przestrzeni K^n jest zbiorem algebraicznym, może być bowiem opisana układem równań liniowych.

PRZYKŁAD 2. Okrąg o środku w punkcie (x_0, y_0) płaszczyzny euklidesowej i promieniu r jest zbiorem algebraicznym w $\boldsymbol{R}^2$ jako zbiór rozwiązań równania $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$. Wszystkie krzywe stożkowe są zbiorami algebraicznymi.

PRZYKŁAD 3. Podzbiory skończone przestrzeni K^n są algebraiczne.

PRZYKŁAD 4. Równanie $(x^2+y^2-1)\cdot(x-2) = 0$ opisuje na płaszczyźnie zbiór algebraiczny złożony z okręgu jednostkowego i nieprzecinającej go prostej, a zatem zbiór niespójny w naturalnej topologii.

PRZYKŁAD 5. Niech S będzie okręgiem o środku w punkcie $(0, 0, 2)$ przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$, promieniu równym 2 i położonym w płaszczyźnie $x_3 = 2$. Jest on przecięciem walca o równaniu $x_1^2+x_2^2 = 4$ i płaszczyzny $x_3 = 2$. Może być jednak opisany i jako przecięcie stożka o równaniu $x_1^2+x_2^2 = x_3^2$ z płaszczyzną $x_3 = 2$ lub jeszcze inaczej jako przecięcie sfery o równaniu $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 4$ i paraboloidy $x_1^2+x_2^2 = 2x_3$.

Przykład ten pokazuje, że zbiór algebraiczny może być opisany rozmaitymi układami równań. Rozpatrzmy więc zbiór wszystkich wielomianów równych zeru na danym niepustym zbiorze algebraicznym $\Sigma \subset K^n$ i oznaczmy zbiór tych wielomianów przez $I(\Sigma)$. Oczywiste jest, że jeżeli f i g są wielomianami należącymi do $I(\Sigma)$,

to różnica $f-g$ tych wielomianów też należy do $I(\Sigma)$. Podobnie, jeżeli $f \in I(\Sigma)$, to $fg \in I(\Sigma)$ dla każdego $g \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Wielomian zerowy też należy do $I(\Sigma)$. Udowodniliśmy zatem:

(2) *Jeżeli Σ jest niepustym zbiorem algebraicznym przestrzeni K^n, to zbiór $I(\Sigma)$ wszystkich wielomianów równych zeru na Σ jest ideałem pierścienia $K[x_1, \ldots, x_n]$.*

Przyjmujemy, że $I(\emptyset)$ jest całym pierścieniem $K[x_1, \ldots, x_n]$, to znaczy jego ideałem niewłaściwym. Twierdzenie (2) jest więc prawdziwe i dla pustego zbioru Σ.

W przykładzie 5 widzieliśmy, że żaden układ równań opisujący zbiór algebraiczny nie jest wyróżniony. Można łatwo pokazać, że różnym zbiorom algebraicznym odpowiadają różne ideały pierścienia $K[x_1, \ldots, x_n]$. Jedną z głównych metod, jaką posługuje się geometria algebraiczna, jest odczytywanie geometrycznych własności zbiorów opisanych układami równań z algebraicznych własności ideałów przyporządkowanych tym zbiorom. Zajmiemy się odpowiedzią na pytanie, które z ideałów pierścienia $K[x_1, \ldots, x_n]$ odpowiadają zbiorom algebraicznym. Sformułujemy najpierw pewne podstawowe twierdzenia.

(3) TWIERDZENIE HILBERTA O BAZIE. *Jeżeli K jest dowolnym ciałem, to każdy ideał pierścienia $K[x_1, \ldots, x_n]$ jest generowany przez skończoną ilość elementów.*

Nietrudny, choć nieco skomplikowany rachunkowo dowód można znaleźć np. w [3], rozdział VI, § 2.

Zauważmy, że twierdzenie (3) pozwala odrzucić słowo „skończony" w definicji zbioru algebraicznego. Jeżeli bowiem A jest dowolnym zbiorem wskaźników i zbiór Σ jest miejscem zerowym układu równań wielomianowych $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0$, gdzie $\alpha \in A$, to Σ jest również rozwiązaniem układu $f_{\alpha_1}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_{\alpha_m}(x_1, \ldots, x_n) = 0$, gdzie $f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_m}$ są generatorami ideału $(\{f_\alpha\}_{\alpha \in A})$. Tak więc rozpatrywanie nieskończonych układów równań nie poszerza klasy zbiorów algebraicznych. Będziemy oznaczać przez $W(\bar{a})$ zbiór algebraiczny będący zbiorem zer wszystkich wielomianów ideału $\bar{a}$.

(4). *Jeżeli Σ jest zbiorem algebraicznym w przestrzeni K^n, to $\Sigma = W\big(I(\Sigma)\big)$.*

Dowód. $W\big(I(\Sigma)\big) = \{a \in K^n: \bigwedge_{f \in I(\Sigma)} f(a) = 0\} = \Sigma$.

Zauważmy, że gdyby dla ideałów pierścienia $K[x_1, \ldots, x_n]$ był prawdziwy wzór $I\big(W(\bar{a})\big) = \bar{a}$, to operacje I i W ustalałyby wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między ideałami a zbiorami algebraicznymi. Jednak, gdy Σ jest zbiorem algebraicznym, to ideał $I(\Sigma)$ ma następującą własność: jeżeli $f^m \in I(\Sigma)$, to $f \in I(\Sigma)$. Takie ideały nazywamy *radykalnymi*. Wobec tego tylko dla ideałów radykalnych wzór $I\big(W(\bar{a})\big) = \bar{a}$ może być prawdziwy. Na przykład gdy $\bar{a}$ jest ideałem w $K[x_1, x_2]$ generowanym przez x_1^2, to $I\big(W(\bar{a})\big) = (x_1) \neq (x_1^2)$.

Okazuje się, że dla ideałów radykalnych wzór $I\big(W(\bar{a})\big) = \bar{a}$ może nie być prawdziwy. Rozpatrzmy bowiem ideał generowany przez wielomian $x(x^2+1)$ w pierścieniu $\boldsymbol{R}[x]$. Z elementarnych własności wielomianów wynika, że ideał ten spełnia warunek wymieniony w powyższej definicji, tj. jest ideałem radykalnym. Ale

$I\big(W\big(x(x^2+1)\big)\big) = I(\{0\}) = (x) \neq \big(x(x^2+1)\big)$. Analogiczna sytuacja nie miałaby miejsca, gdyby wielomian x^2+1 zastąpić wielomianem rozkładającym się na czynniki liniowe, albo gdyby ciało $\boldsymbol{R}$ zastąpić przez $\boldsymbol{C}$ (wtedy $x^2+1 = (x+i)(x-i)$) lub dowolne inne ciało algebraicznie domknięte. Okazuje się, że takie założenia (ciało K jest algebraicznie domknięte, a ideał $\bar{a}$ jest ideałem radykalnym) wystarczają do prawdziwości wzoru $I\big(W(\bar{a})\big) = \bar{a}$. Zbiorom algebraicznym przestrzeni K^n odpowiadają wtedy w sposób jednoznaczny ideały (radykalne) pierścienia $K[x_1, \ldots, x_n]$. To twierdzenie nosi nazwę twierdzenia Hilberta o zerach i sformułujemy je w kilku wynikających wzajemnie z siebie w łatwy sposób wersjach.

(5) Twierdzenie Hilberta o zerach. *Niech $\bar{k}$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym. Wtedy*

(a) *jedynymi ideałami maksymalnymi pierścienia $\bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$ są ideały postaci $(x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n)$, gdzie $a_1, \ldots, a_n \in \bar{k}$;*

(b) *dla każdego ideału maksymalnego $\bar{m}$ pierścienia $\bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$ ciało ilorazowe $\bar{k}[x_1, \ldots, x_n]/\bar{m}$ jest izomorficzne z $\bar{k}$;*

(c) *jeżeli $\bar{a}$ jest ideałem radykalnym pierścienia $\bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$, to $I\big(W(\bar{a})\big) = \bar{a}$;*

(d) *operacje $\bar{a} \to W(\bar{a})$, $\Sigma \mapsto I(\Sigma)$ ustalają wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między ideałami radykalnymi pierścienia $\bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$ a zbiorami algebraicznymi w przestrzeni $\bar{k}^n$.*

Dowód tego twierdzenia jest dość długi. Czytelnika, pragnącego się z nim zapoznać, odsyłamy np. do [3], rozdział X, § 2.

Zbiory algebraiczne przestrzeni K^n mogą być przyjęte za zbiory domknięte pewnej topologii w zbiorze K^n. Po pierwsze bowiem zbiór pusty oraz cała przestrzeń K^n są zbiorami algebraicznymi. Po drugie, jeżeli S_α są, dla α przebiegającego dowolny zbiór wskaźników A, zbiorami algebraicznymi opisywanymi odpowiednio układami

$$f_1^\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_m^\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

to zbiór $\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$ jest miejscem zerowym układu złożonego ze wszystkich powyższych równań. Widzieliśmy już, że (na mocy twierdzenia Hilberta o bazie) już skończona ilość powyższych równań opisuje zbiór $\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$, czyli zbiór ten jest algebraiczny. Wreszcie, jeżeli $S_1, \ldots, S_k$ są miejscami zerowymi układów

$$f_1^i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_{m_i}^i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, k$$

odpowiednio, to biorąc wszystkie iloczyny $f_r^i(x_1, \ldots, x_n) f_s^j(x_1, \ldots, x_n)$ otrzymujemy układ wielomianów opisujący zbiór $S_1 \cup \ldots \cup S_k$.

Określoną tak topologię przestrzeni K^n nazywamy jej *topologią Zariskiego*. Topologia Zariskiego przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$ ($\boldsymbol{C}^n$) jest słabsza od naturalnej. Każdy wielomian jest bowiem funkcją ciągłą w naturalnej topologii, więc zbiór jego miejsc zerowych jest w tej topologii domknięty. Okazuje się, że każde dwa niepuste zbiory

otwarte topologii Zariskiego przestrzeni K^n mają niepuste przecięcie. Topologia Zariskiego przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$ nie jest zatem (przy $n \geqslant 1$) metryzowalna.

PRZYKŁAD 6. Niech K będzie dowolnym ciałem. Jedynymi zbiorami algebraicznymi w K^1 (a więc jedynymi zbiorami domkniętymi topologii Zariskiego) są zbiory skończone. Istotnie, skończony układ wielomianów jednej zmiennej ma tylko skończoną ilość pierwiastków.

PRZYKŁAD 7. Zbiór $\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : y = \sin x\}$ nie jest zbiorem algebraicznym w $\boldsymbol{R}^2$. W przeciwnym bowiem razie przecięcie tego zbioru z osią odciętych byłoby (dlaczego?) podzbiorem algebraicznym prostej, co jest nieprawdą na mocy poprzedniego przykładu.

PRZYKŁAD 8. Rozpatrzmy podzbiór H płaszczyzny K^2 (K — dowolne ciało nieskończone) określony równaniem $xy = 1$. Udowodnimy, że H jest zbiorem spójnym w topologii Zariskiego w K^2. Niech F będzie właściwym podzbiorem domkniętym zbioru H (a więc i K^2), a $f_1, \ldots, f_n$ wielomianami takimi, że $F = W(f_1, \ldots, f_n)$. Zatem zbiór F' opisany układem

$$f_1(x, y) = 0, \qquad xy - 1 = 0$$

zawiera F. Gdy $x \neq 0$, to $f_1(x, 1/x) = 0$. To równanie ma tylko skończoną ilość rozwiązań (f_1 jest wielomianem!). Zatem zbiór F', a więc i F, składa się tylko ze skończonej ilości punktów. Udowodniliśmy zatem, że — podobnie jak na prostej — jedynymi właściwymi podzbiorami domkniętymi w H są zbiory skończone. H składa się jednak z nieskończonej ilości punktów. Zatem musi być zbiorem spójnym.

Wyodrębnimy teraz spośród wszystkich przekształceń jednego zbioru algebraicznego w drugi przekształcenia będące przedmiotem naszych zainteresowań. Definicja klasy tych przekształceń przypomina określenie klasy odwzorowań różniczkowalnych w geometrii różniczkowej. Określimy najpierw tzw. funkcje regularne, będące odpowiednikiem funkcji różniczkowalnych. Powiemy mianowicie, że funkcja regularna na podzbiorze algebraicznym Σ przestrzeni K^n — to funkcja będąca ograniczeniem do Σ funkcji wielomianowej z K^n w K.

PRZYKŁAD 9. Funkcje współrzędne x_i na zbiorze algebraicznym Σ są regularne.

Funkcje regularne można dodawać i mnożyć — podobnie jak wielomiany.

Proste rozważania prowadzą do następującego stwierdzenia:

(6) *Zbiór funkcji regularnych na zbiorze algebraicznym Σ tworzy pierścień.*

Ten pierścień będziemy oznaczać przez $K[\Sigma]$. Jest on izomorficzny z pierścieniem ilorazowym $K[x_1, \ldots, x_n]/I(\Sigma)$. Dokładniej:

(7) *Niech, dla $f \in K[\Sigma]$ symbol $\bar{f}$ oznacza wielomian $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ taki, że $\bar{f}|\Sigma = f$ oraz niech $[\bar{f}]$ będzie klasą abstrakcji $\bar{f}$ względem $I(\Sigma)$. Klasa ta nie zależy wówczas od wyboru przedłużenia $\bar{f}$ funkcji f, a przyporządkowanie $f \mapsto [\bar{f}]$ jest izomorfizmem $K[\Sigma]$ na $K[x_1, \ldots, x_n]/I(\Sigma)$.*

PRZYKŁAD 10. Niech f będzie wielomianem nierozkładalnym w pierścieniu $\bar{k}[x, y]$, gdzie $\bar{k}$ jest ciałem algebraicznie domkniętym. Zbiór $W(f) = \{(x, y) \in k^2 :$

$f(x, y) = 0\}$ nazywamy krzywą płaską opisaną przez f. Pierścieniem funkcji regularnych na takiej krzywej jest pierścień $\bar{k}[W(f)] = \bar{k}[x, y]/(f)$. Z elementarnego kursu algebry wiadomo, ze nie ma on dzielników zera.

PRZYKŁAD 11. $K[K^n] = K[x_1, \ldots, x_n]$.

Przyjmujemy, że $K[\emptyset] = 0$, tak, że $K[\emptyset] = K[x_1, \ldots, x_n]/I(\emptyset)$.

PRZYKŁAD 12. Niech H będzie zbiorem z przykładu 8. Zatem $K[H] = K[x, y]/(xy-1)$. Pierścień ten jest izomorficzny z pierścieniem funkcji wymiernych mających postać $g(x)/x^n$, gdzie $n \geqslant 0$, a g jest wielomianem.

Jeżeli φ jest przekształceniem zbioru algebraicznego Σ w zbiór algebraiczny T, a f — funkcją regularną określoną na T, to $f \cdot \varphi$ jest funkcją określoną na Σ o wartościach w K. Jeżeli dla każdej funkcji $f \in K[T]$, $f \cdot \varphi$ jest funkcją regularną, to φ nazywamy *przekształceniem regularnym*. Jest to więc ścisły odpowiednik pojęcia przekształcenia różniczkowalnego z geometrii różniczkowej. Przekształcenie pods zbioru algebraicznego przestrzeni K^n w podzbiór algebraiczny przestrzeni K^m jes regularne wtedy i tylko wtedy, kiedy jego współrzędne są funkcjami regularnymit

PRZYKŁAD 13. Funkcja regularna na zbiorze algebraicznym Σ jest przekształceniem regularnym Σ w K. W szczególności przekształcenie zbioru $H = \{(x, y) \in \bar{k}^2 : xy = 1\}$ w K określone wzorem $\varphi(x, y) = x$ jest regularne. Ogólniej, każde rzutowanie zbioru algebraicznego na którąkolwiek oś x_i jest przekształceniem regularnym tego zbioru w K^1.

PRZYKŁAD 14. Każde przekształcenie regularne przestrzeni K^n w siebie jest postaci $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, gdzie $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a f_i są wielomianami. Odwrotnie, każde przekształcenie tej postaci jest regularne. Wynika to natychmiast z przykładu 9.

PRZYKŁAD 15. Rozpatrzmy podzbiór płaszczyzny rzeczywistej złożony z punktów (x, y) spełniających równanie $y = x^3$. Rzutowanie tego zbioru na oś x-ów płaszczyzny jest przekształceniem regularnym, i różnowartościowym. Przekształcenie odwrotne natomiast regularne nie jest.

Różnowartościowe przekształcenie regularne φ zbioru algebraicznego X na zbiór algebraiczny Y nazywamy *izomorfizmem*, gdy przekształcenie odwrotne φ^{-1} jest też przekształceniem regularnym. Przekształcenia regularne są ciągłe w topologii Zariskiego i w związku z tym izomorficzne zbiory algebraiczne są homeomorficzne. Jest zrozumiałe, że homeomorficzne zbiory algebraiczne nie muszą być izomorficzne (tak jest np. w przykładzie 15).

Geometrię algebraiczną podzbiorów algebraicznych przestrzeni K^n można określić jako teorię niezmienników izomorfizmów tych zbiorów. Każda własność topologiczna jest takim niezmiennikiem. Z drugiej strony, jeżeli X i Y są izomorficznymi podzbiorami algebraicznymi przestrzeni K^n i K^m odpowiednio, to pierścienie $K[X]$ i $K[Y]$ są izomorficzne. Izomorfizm f: $K[Y] \to K[X]$ wyznaczony przez izomorfizm f: $X \to Y$ jest ponadto *K-izomorfizmem*, to znaczy dla każdej funkcji stałej a mamy $f(a) = a$. Można pokazać, że gdy K jest ciałem algebraicznie domknię-

tym $\bar{k}$, to każdy K-izomorfizm pierścienia $K[Y]$ na $K[X]$ jest wyznaczony przez pewien (jednoznacznie określony) izomorfizm f: $X \to Y$. Wynika stąd, że każdy niezmiennik $\bar{k}$-izomorfizmów pierścieni (ściślej: $\bar{k}$-algebr) jest niezmiennikiem geometrii algebraicznej. Więcej, kategoria zbiorów algebraicznych i odwzorowań regularnych jest izomorficzna z pewną pełną podkategorią kategorii $\bar{k}$-algebr i $\bar{k}$-homomorfizmów (a mianowicie z kategorią algebr skończenie generowanych bez elementów nilpotentnych).

Opiszemy pewną topologiczną własność zbiorów algebraicznych i pokażemy, z jaką algebraiczną własnością pierścieni funkcji regularnych jest ona związana. Zbiór algebraiczny $X \subset K^n$ nazwiemy *(nie-)przywiedlnym*, gdy (nie) istnieją jego właściwe podzbiory domknięte Y_1, Y_2, takie, że $Y_1 \cup Y_2 = X$. Nieprzywiedlność jest zatem własnością topologiczną, mogącą przysługiwać zbiorom algebraicznym i mocniejszą niż spójność.

PRZYKŁAD 16. Prosta K^1 oraz zbiór opisany w przykładzie 8 są zbiorami nieprzywiedlnymi. Wynika to wprost z tego, że jedynymi ich podzbiorami domkniętymi są zbiory skończone. Przykładami zbiorów przywiedlnych mogą być zbiór z przykładu 4 lub zbiór $\{(x, y) \in \boldsymbol{K}^2 \colon xy = 0\}$, będący sumą dwóch prostych.

(8) *Następujące zdania są równoważne*:

(a) *zbiór algebraiczny $X \subset K^n$ jest nieprzywiedlny,*

(b) *Gdy $X \neq \emptyset$ to $I[X]$ jest ideałem pierwszym pierścienia $K[x_1, \ldots, x_n]$. Ponadto $I[\emptyset] = K[x_1, \ldots, x_n]$,*

(c) *pierścień $K[X]$ nie ma dzielników zera.*

Dowód. Ogólnie, gdy $\bar{a}$ jest ideałem pierścienia A, to $A/\bar{a}$ jest niezerowym pierścieniem bez dzielników zera wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{a}$ jest ideałem pierwszym. Stąd, oraz z (7), wynika równoważność (b) $\Leftrightarrow$ (c).

Załóżmy, że X jest zbiorem nieprzywiedlnym i f, g — dzielnikami zera w $K[X]$, tj. $f \neq 0$, $g \neq 0$, $fg = 0$. Wtedy $X = \{x \in X \colon f(x) = 0\} \cup \{x \in X \colon g(x) = 0\}$ wbrew nieprzywiedlności zbioru X. Pokażemy teraz, że gdy $X = Y_1 \cup Y_2$, gdzie Y_1 i Y_2 są właściwymi zbiorami domkniętymi w X, to pierścień $K[X]$ ma (niezerowe) dzielniki zera. Zbiory Y_1 i Y_2 są domknięte w K^n, niech zatem $Y_1 = W(f_1, \ldots, f_s)$, $Y_2 = W(g_1, \ldots, g_t)$. Nie wszystkie f_i są równe zeru na Y_2 (w przeciwnym razie $Y_1 \subset Y_2$) i można założyć, że np. f_1 nie znika tożsamościowo na Y_2. Podobnie można przyjąć, że g_1 nie jest funkcją zerową na Y_1. Jeżeli przez $\bar{f}_1$ i $\bar{g}_1$ oznaczymy klasy ograniczeń f_1 i g_1 do X, to w pierścieniu $K[X]$ mamy $\bar{f}_1 \neq 0$, $\bar{g}_1 \neq 0$, $\bar{f}_1 \bar{g}_1 = 0$, c. b. d. o.

Polecamy Czytelnikowi zbadanie (korzystając z definicji i powyższego twierdzenia), które z rozpatrywanych przez nas w tym artykule zbiorów są nieprzywiedlne.

Pozostając w obrębie klasycznej teorii rozszerzymy klasę zbiorów algebraicznych. Ograniczymy się jednak do rozpatrywania podzbiorów przestrzeni $\bar{k}^n$, gdzie $\bar{k}$ jest ciałem algebraicznie domkniętym.

Zbiorem algebraicznym w tym szerszym sensie będzie każdy podzbiór $X \subset \bar{k}^n$ będący częścią wspólną zbioru otwartego X_1 i domkniętego X_2 w topologii Zaris-

kiego przestrzeni $\bar{k}^n$. W szczególności zbiorami algebraicznymi będą zbiory otwarte tej przestrzeni. Funkcją regularną na zbiorze algebraicznym będzie dla nas teraz funkcja określona na (całym) X, będąca ograniczeniem funkcji wymiernej $f \in \bar{k}(x_1, \ldots, x_n)$. Nie poszerzy to klasy funkcji regularnych na zbiorach domkniętych, a więc algebraicznych „w starym sensie". Przekształcenie regularne zbioru algebraicznego X w zbiór algebraiczny Y określimy tymi samymi słowami co poprzednio; to samo dotyczy izomorfizmu. Takie uogólnienie pozwoli nam później na określenie zbioru algebraicznego (znów w nieco zmienionym sensie) niezależnie od „otaczającej" przestrzeni $\bar{k}^n$.

PRZYKŁAD 17. Prosta bez punktu, tj. na przykład $\bar{k}^1 \setminus \{0\}$, jest zbiorem algebraicznym. Zbiór ten jest izomorficzny z hiperbolą o równaniu $xy = 1$ na płaszczyźnie, a przekształcenie określone wzorem $f(x) = (x, 1/x) \in H$ jest izomorfizmem. Zwracamy uwagę, że np. funkcja $1/x$ jest regularna na H.

2. Spektrum pierścienia. W rozdziale 1 opisaliśmy pojęcie podzbioru algebraicznego przestrzeni K^n. Obecnie przedstawimy teorię „abstrakcyjnych" zbiorów algebraicznych. Zbudujemy mianowicie zbiór algebraiczny (w nieco innym sensie tego słowa) wychodząc z dowolnego pierścienia, który następnie okaże się pierścieniem funkcji regularnych na wyjściowym zbiorze. Takie podejście daje nie tylko „niezmiennicze" określenie zbioru algebraicznego, ale dostarcza wygodnego języka topologicznego do badań obiektów algebraicznych, umożliwia szersze zastosowanie metod geometrii różniczkowej i prowadzi ponadto do ciekawej i pożytecznej geometryzacji niektórych innych działów matematyki, na przykład algebraicznej teorii liczb. Podstawowym pojęciem — odpowiadającym pojęciu obszaru otwartego przestrzeni euklidesowej — jest spektrum pierścienia. Mianowicie, gdy A jest dowolnym pierścieniem (jak zawsze przemiennym, z jedynką), to zbiór wszystkich jego ideałów pierwszych nazywamy *spektrum pierścienia* A; będziemy je oznaczać przez Spec A. Ponieważ w każdym niezerowym pierścieniu istnieje ideał pierwszy (na przykład każdy ideał maksymalny), więc spektrum niezerowego pierścienia jest zbiorem niepustym. Oczywiście Spec $0 = \emptyset$. Zwracamy uwagę, że cały pierścień nie jest swoim ideałem pierwszym.

PRZYKŁAD 18. Spec $\boldsymbol{Z}$. Ideałami pierwszymi pierścienia $\boldsymbol{Z}$ są ideały główne generowane przez liczby pierwsze oraz ideał zerowy. Wobec tego Spec $\boldsymbol{Z} = \{(0), (2), (3), (5), \ldots\}$.

PRZYKŁAD 19. Spec $\bar{k}[x]$. W pierścieniu $\bar{k}[x]$ każdy niezerowy ideał pierwszy jest maksymalny. Odwzorowanie, które ideałowi $(x-a)$ przyporządkowuje a jest — na mocy twierdzenia Hilberta o zerach oraz poprzedniego zdania — wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem zbioru ideałów pierwszych różnych od ideału zerowego na ciało $\bar{k}$. Możemy zatem utożsamić Spec $\bar{k}[x] \setminus (0)$ z $\bar{k}$. Niżej zobaczymy, czemu odpowiada punkt $(0) \in$ Spec $\bar{k}[x]$.

Niech dla podzbioru E pierścienia A, $V(E)$ oznacza zbiór ideałów pierwszych pierścienia A zawierających E; $V(E) = \{\bar{p} \in \text{Spec } A\colon E \subset \bar{p}\}$. Gdy $E = \{f_1, \ldots, f_s\}$, to piszemy $V(f_1, \ldots, f_s)$ zamiast $V(\{f_1, \ldots, f_s\})$. Za pomocą prostego rozumowania

można wykazać następujące własności operacji $E \mapsto V(E)$:

(9) a) $V(0) = \operatorname{Spec} A$, $V\big((1)\big) = \emptyset$;

b) *jeżeli* $E \subset E'$, *to* $V(E') \subset V(E)$,

c) *dla dowolnego zbioru wskaźników* I *mamy*

$$V\Big(\bigcup_{i \in I} E_i\Big) = \bigcap_{i \in I} V(E_i),$$

d) $V(E \cdot E') = V(E) \cup V(E')$, *gdzie* $E \cdot E' = \{x\colon x = y \cdot z,\ y \in E,\ z \in E'\}$.

Z własności tych jest widoczne, że zbiory postaci $V(E)$ mogą być przyjęte za zbiory domknięte pewnej topologii w zbiorze ideałów pierwszych pierścienia A Tę topologię nazywamy *topologią Zariskiego* (lub *topologią spektralną*). Zatem zbiorami domkniętymi w topologii Zariskiego przestrzeni Spec A są zbiory ideałów zawierających pewien podzbiór $E \subset A$. Czytelnik dostrzega zapewne podobieństwo między tą topologią a topologią Zariskiego przestrzeni K^n.

PRZYKŁAD 20. W przestrzeni Spec $\boldsymbol{Z}$ zbiorami domkniętymi są $\emptyset$, Spec $\boldsymbol{Z}$ oraz zbiory skończone nie zawierające (0). Ponieważ każdy ideał pierwszy pierścienia $\boldsymbol{Z}$ zawiera ideał zerowy, więc $\overline{\{(0)\}} = \operatorname{Spec} \boldsymbol{Z}$, to znaczy zbiór jednopunktowy $\{(0)\}$ jest gęsty w topologii spektralnej przestrzeni Spec $\boldsymbol{Z}$.

PRZYKŁAD 21. W przykładzie 19 interpretowaliśmy różne od (0) punkty Spec $\bar{k}[x]$, jako elementy ciała $\bar{k}$. W tej interpretacji zbiorami domkniętymi w Spec $\bar{k}[x]$ są skończone podzbiory ciała $\bar{k}$. Zbiór złożony z ideału zerowego jest, podobnie jak w poprzednim przykładzie, gęsty.

PRZYKŁAD 22. Niech C będzie krzywą płaską w $\bar{k}^2$ (przykład 10), opisaną przez wielomian nierozkładalny f. Punkty krzywej C utożsamić można z punktami domkniętymi przestrzeni Spec $\bar{k}[x, y]/(f)$. Można prosto udowodnić, że jedynymi zbiorami domkniętymi tej przestrzeni są $\emptyset$, cała przestrzeń oraz zbiory skończone.

Z określenia zbioru $V(E)$ wynika od razu

(10) *Dla każdego* $E \subset A$ *mamy* $V(E) = V\big((E)\big)$.

Zobaczymy, jak można określić pewną bazę topologii Zariskiego przestrzeni Spec A. Niech dla podzbioru E pierścienia A, $D(E)$ oznacza zbiór Spec $A \setminus V(E)$, i podobnie $D(f) = \operatorname{Spec} A \setminus V(f)$. Zbiory postaci $D(f)$ nazywamy *zbiorami otwartymi głównymi.*

(11) *Rodzina* $\{D(f)\colon f \in A\}$ *wszystkich zbiorów otwartych głównych jest bazą topologii Zariskiego przestrzeni* Spec A.

Dowód. Jeżeli $U = \operatorname{Spec} A \setminus V(E)$ jest zbiorem otwartym, to na mocy (9) c) mamy $V(E) = \bigcap_{f \in E} V(f)$, zatem $U = \bigcup_{f \in E} D(f)$.

(12) *Przestrzeń* Spec A *z topologią Zariskiego jest przestrzenią* T_0.

Spec $\boldsymbol{Z}$ nie jest przestrzenią T_1, bowiem każdy niepusty zbiór otwarty w Spec $\boldsymbol{Z}$ zawiera punkt (0). Podobnie pokazać można, że spektrum pierścienia wielomianów nie jest przestrzenią T_1. Ogólnie, Spec A jest przestrzenią T_1 wtedy i tylko wtedy,

gdy każdy ideał pierwszy pierścienia A jest maksymalny (wśród pierścieni bez dzielników zera tylko ciała mają tę własność). Okazuje się, że wtedy Spec A jest już przestrzenią Hausdorffa.

Widzimy, że przestrzeń topologiczna Spec A jest metryzowalna tylko dla stosunkowo wąskiej klasy pierścieni, więc intuicje geometryczne z przestrzeni euklidesowych (ogólniej, metrycznych) są zawodne. Jednakże sama możliwość użycia języka topologicznego otwiera szerokie perspektywy. Ponadto topologia Zariskiego ma szereg „dobrych" własności. Jedną z nich jest własność, która dla przestrzeni Hausdorffa jest zwartością:

(13) *Z każdego pokrycia otwartego przestrzeni* $X = \operatorname{Spec} A$ *można wybrać pokrycie skończone.*

Przestrzeń Spec A może rzeczywiście mieć dużo niedomkniętych punktów:

(14) *Zbiór jednopunktowy* $\{\bar{p}\}$ *przestrzeni* Spec A *jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy* $\bar{p}$ *jest ideałem maksymalnym pierścienia* A.

PRZYKŁAD 23. Niech K będzie dowolnym ciałem. Jedynym ideałem pierwszym $\bar{p} \subset K$ jest ideał zerowy, więc Spec K jest przestrzenią jednopunktową.

PRZYKŁAD 24. Ideałami pierwszymi w skończonej sumie prostej ciał $K_1 \oplus \ldots \oplus K_n$ są ideały postaci $K_1 \oplus \ldots \oplus \overset{i}{(0)} \oplus \ldots \oplus K_n$, $i = 1, \ldots, n$. Są to jednocześnie ideały maksymalne, a zatem z (14) wynika, że Spec $K_1 \oplus \ldots \oplus K_n$ jest przestrzenią dyskretną n-elementową.

PRZYKŁAD 25. Niech $\boldsymbol{Z}_{(2)}$ oznacza podpierścień ciała liczb wymiernych złożony z liczb q, które mogą być przedstawione w postaci ułamka m/n, gdzie m i n są liczbami całkowitymi i n jest liczbą nieparzystą. Nietrudno sprawdzić, że $\bar{p} = \{q \in \boldsymbol{Z}_{(2)} : q = m/n,\ 2 \nmid m\}$ jest ideałem maksymalnym (a więc i pierwszym) pierścienia $\boldsymbol{Z}_{(2)}$. Udowodnimy, że jest to jedyny niezerowy ideał pierwszy tego pierścienia. Załóżmy, że $(0) \neq \bar{p}' \in \operatorname{Spec} \boldsymbol{Z}_{(2)}$ i niech $m/n \in \bar{p}'$, $m \neq 0$. Liczba m musi być parzysta, bo w przeciwnym razie liczba n/m byłaby elementem $\boldsymbol{Z}_{(2)}$ i $1 = m/n \cdot n/m \in \bar{p}'$ wbrew definicji ideału pierwszego. A zatem Spec $\boldsymbol{Z}_{(2)}$ jest przestrzenią dwupunktową. Jeden z punktów tej przestrzeni tworzy zbiór otwarty (lecz niedomknięty), drugi — domknięty (lecz nieotwarty).

PRZYKŁAD 26. Niech $\bar{k}$ będzie, jak zwykle, ciałem algebraicznie domkniętym. Przyporządkujmy punktowi $(a_1, \ldots, a_n)$ przestrzeni $\bar{k}^n$ ideał $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. Z twierdzenia Hilberta o zerach wynika, że jest to wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\bar{k}^n$ na zbiór ideałów maksymalnych pierścienia $\bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Jednak Spec $\bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$ składa się nie tylko z ideałów maksymalnych, ale ze wszystkich ideałów pierwszych pierścienia wielomianów. Z (8) wynika, że punkty zbioru Spec $\bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$ są we wzajemnej jednoznacznej odpowiedniości z nieprzywiedlnymi podzbiorami algebraicznymi przestrzeni $\bar{k}^n$. Jeżeli $\bar{p}, \bar{q} \in \operatorname{Spec} \bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$, to $\bar{p} \in \overline{\{\bar{q}\}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V(\bar{p}) \subset V(\bar{q})$, czyli gdy zbiór zer wielomianów ideału $\bar{p}$ jest zawarty w zbiorze zer wielomianów ideału $\bar{q}$. Ilustruje to związek między

topologią Zariskiego przestrzeni $\bar{k}^2$ a topologią Zariskiego (spektralną) przestrzeni Spec $\bar{k}[x_1, x_2] = \operatorname{Spec} \bar{k}[\bar{k}^2]$.

PRZYKŁAD 27. Niech $\bar{a}$ będzie ideałem pierścienia $\bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$ generowanym przez wielomiany $f_1, \ldots, f_m$. Ideały pierwsze pierścienia ilorazowego $\bar{k}[x_1, \ldots, x_n]/\bar{a}$ są w naturalnej wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z ideałami pierwszymi pierścienia $\bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$ zawierającymi $\bar{a}$. Każdy taki ideał pierwszy wyznacza zbiór algebraiczny $W(\bar{p}) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \bar{k}^n\colon \bigwedge_{f \in \bar{p}} f(x) = 0\}$ zawarty w $W(\bar{a})$. A zatem za punkty przestrzeni Spec $\bar{k}[x_1, \ldots, x_n]/\bar{a}$ można uważać zbiory algebraiczne nieprzywiedlne zawarte w $W(\bar{a})$. Punktom domkniętym tej przestrzeni odpowiadają, jak i w przykładzie 21, punkty zbioru algebraicznego $W(\bar{a})$. Zatem w podanej interpretacji przestrzeni Spec $\bar{k}[x_1, \ldots, x_n]/\bar{a}$ domknięcie zbioru jednopunktowego X tej przestrzeni (gdzie $X \subset W(\bar{a})$) składa się ze wszystkich zbiorów algebraicznych zawartych w X.

Czytelnik znający dowód twierdzenia Stone'a o reprezentacji algebr Boole'a może łatwo przekonać się, że wprowadzona przez nas terminologia upraszcza znacznie zapis tego dowodu. Mianowicie, dla danej algebry Boole'a $\mathfrak{X}$ konstruujemy pierścień X, określając działania dodawania i mnożenia wzorami $a+b = (a \cap b') \cup (a' \cap b)$, $a \cdot b = a \cap b$. Wykazujemy łatwo — korzystając z tego, że w takim pierścieniu mamy dla dowolnego x równość $x+x = 0$ — że Spec X jest przestrzenią Hausdorffa, a zatem zwartą na mocy (13) i że każdy zbiór otwarty główny jest domknięty. Sprawdzenie, że funkcja h przekształcająca $\mathfrak{X}$ w algebrę Boole'a zbiorów otwartych głównych przestrzeni Spec X, określona wzorem $h(x) = D(x)$ jest izomorfizmem algebr Boole'a, nastręcza tylko niewielkie trudności rachunkowe.

Na zakończenie rozdziału omówimy jeszcze jeden ze związków między algebraicznymi własnościami pierścienia A a własnościami topologicznymi przestrzeni Spec A. Niezerowy pierścień A nazywamy *lokalnym*, gdy spełnia jeden z następujących równoważnych warunków:

a) w A istnieje tylko jeden ideał maksymalny,

b) elementy nieodwracalne pierścienia A tworzą ideał.

(15) *Jeżeli A jest pierścieniem lokalnym, to* Spec A *jest przestrzenią spójną.*

Dowód. Każdy zbiór domknięty przestrzeni Spec A zawiera jedyny ideał maksymalny $\bar{m}$ pierścienia A, wobec tego Spec A nie może być sumą rozłącznych zbiorów domkniętych.

Pierścieniem lokalnym jest np. pierścień opisany w przykładzie 25; udowodniliśmy bowiem, że ma on tylko jeden niezerowy ideał pierwszy. A zatem dwupunktowa przestrzeń Spec $\boldsymbol{Z}_{(2)}$ jest spójna.

Klasa pierścieni lokalnych jest jedną z najważniejszych w geometrii algebraicznej. Na pierścienie te natrafiamy bowiem badając „lokalne" własności zbiorów algebraicznych. Trochę dokładniej powiemy o tym w następnym paragrafie.

Widzieliśmy, że niektóre własności algebraiczne pierścieni odpowiadają topologicznym własnościom ich spektrów. Pokażemy teraz, że każdy homomorfizm

pierścieni wyznacza w pewien naturalny sposób odzworowanie ciągłe spektrów. Niech $f\colon B \to A$ będzie homomorfizmem pierścieni. Przypominamy, że rozpatrujemy tylko takie homomorfizmy, przy których obrazem jedynki pierścienia B jest jedynka pierścienia A. Gdy $\bar{p} \in \operatorname{Spec} A$, to $f^{-1}(\bar{p})$ jest ideałem pierwszym pierścienia B, czyli elementem Spec B. A więc wzór

$$f^*(\bar{p}) = f^{-1}(\bar{p})$$

określa przekształcenie przestrzeni Spec A w przestrzeń Spec B. Nazwiemy je *przekształceniem stowarzyszonym z f* (albo *wyznaczonym przez f*, albo *indukowanym przez f*).

(16) *Odwzorowanie f*: Spec $A \to$ Spec B *wyznaczone przez homomorfizm f*: $B \to A$ *jest ciągłe.*

Dowód jest naturalny i prosty. Z definicji zbioru domkniętego w topologii Zariskiego przestrzeni Spec B wynika bowiem, że przeciwobraz tego zbioru jest domknięty w Spec A.

Czytelnik znający pojęcie funktora zauważy bez trudu, że przyporządkowanie pierścieniowi jego spektrum jest, wraz z wyżej opisanym przyporządkowaniem $f \mapsto f^*$, funktorem kontrawariantnym określonym na kategorii pierścieni i homomorfizmów o wartościach w kategorii przestrzeni topologicznych i odwzorowań ciągłych.

PRZYKŁAD 28. Jeżeli $\bar{a}$ jest ideałem pierścienia A, a $\varphi\colon A \to A/\bar{a}$ jest homomorfizmem kanonicznym A na pierścień ilorazowy $A/\bar{a}$, to φ^* jest homeomorfizmem Spec $A/\bar{a}$ na $V(\bar{a}) \subset$ Spec A. Przekształcenie $\psi\colon V(\bar{a}) \to$ Spec $A/\bar{a}$ takie, że $\psi(\bar{p}) = \varphi(\bar{p})$ jest bowiem przekształceniem ciągłym odwrotnym do φ^*.

PRZYKŁAD 29. Jeżeli i jest zanurzeniem pierścienia A (nie mającego dzielników zera) w swe ciało ułamków (A), to i^*: Spec $(A) \to$ Spec A odwzorowuje jedyny punkt (0) przestrzeni Spec (A) na punkt (0) przestrzeni Spec A.

Przykłady te można ująć nieco ogólniej jak następuje:

(17) *Jeżeli $f\colon B \to A$ jest homomorfizmem pierścienia B na pierścień A, to f^* jest homeomorfizmem* Spec A *na podzbiór domknięty w* Spec B. *Jeżeli f jest homomorfizmem różnowartościowym, to f^**(Spec A) *jest podzbiorem gęstym w* Spec B.

3. Powiedzieliśmy we wstępie, że pojęcie spektrum pierścienia jest w geometrii algebraicznej tym, czym pojęcie obszaru przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$ w geometrii różniczkowej. Rozwiniemy tę uwagę. Jednak dokładne opisanie wszystkich konstrukcji zaciemniłoby, a nie rozjaśniło rysujący się być może przed Czytelnikiem obraz geometrii algebraicznej, a artykuł niniejszy stałby się fragmentem podręcznika. Będziemy więc czasami używać pojęć podając tylko ich intuicyjny opis i uwypuklając ich ścisłe analogie z pojęciami dobrze znanymi. Za owe „dobrze znane" pojęcia przyjmujemy podstawowe konstrukcje geometrii różniczkowej oraz elementarne własności funkcji analitycznych. Czytelnik zapewne wyobraża sobie rozmaitość różniczkową (analityczną) jako „obszary otwarte w $\boldsymbol{R}^n$ ($\boldsymbol{C}^n$) sklejone w sposób różniczkowalny (analityczny)". Podobne intuicje leżą u podstaw konstrukcji pojęcia schematu, a mniej ogólnie:

rozmaitości algebraicznej. Widzieliśmy (przykład 26), że spektrum pierścienia wielomianów $\bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$ jest odpowiednikiem przestrzeni $\bar{k}^n$; gdy zaś $f \in \bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$, to zbiorowi otwartemu głównemu $D(f) = \{\bar{p} \in \operatorname{Spec} \bar{k}[x_1, \ldots, x_n] : f \notin \bar{p}\}$ odpowiada zbiór algebraiczny przestrzeni $\bar{k}^n$ określony nierównością $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, a więc zbiór otwarty. Dokładnie: ideał pierwszy $\bar{p}$ należy do $D(f)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zawierającego go ideału maksymalnego $\bar{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ (twierdzenie Hilberta o zerach) mamy $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Z kolei $D(f)$ jest spektrum pierścienia złożonego z ułamków $h(x_1, \ldots, x_n)/f^m$, gdzie $h \in \bar{k}[x_1, \ldots, x_n]$, a $m \geqslant 0$ jest liczbą naturalną. Widzimy więc, że niektóre zbiory otwarte (określone nierównością $f \neq 0$) odpowiadają spektrom pierścieni. Przez analogię z geometrią różniczkową Czytelnik zdaje sobie sprawę, że takie określenie nie jest kompletne, że spektra te muszą być „posklejane w sposób algebraiczny". Jest tak istotnie. O ile jednak intuicyjny sens pojęcia „algebraiczne sklejanie obszarów otwartych przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$" jest zrozumiały (wielomiany są funkcjami analitycznymi!), o tyle „sklejanie" dowolnych spektrów jest znacznie trudniejsze. Podstawową trudnością jest brak wzorcowych spektrów, wzorcowych zbiorów otwartych, jakimi w przypadku analitycznym są zbiory otwarte i spójne przestrzeni $\boldsymbol{C}^n$, a w przypadku różniczkowym nawet cała przestrzeń $\boldsymbol{R}^n$ bądź $\boldsymbol{C}^n$. Pierwotną przyczyną tej trudności jest fakt, że topologia Zariskiego przestrzeni Spec A zależy wyłącznie od struktury ideałów pierwszych pierścienia, a nie od samego pierścienia i wobec tego nie daje dokładnego opisu topologicznego algebraicznych własności pierścienia. Obrazują to przykłady 21, 22 i 25. Pierwsze dwa z nich opisują homeomorficzne przestrzenie topologiczne odpowiadające pierścieniom o mało podobnych własnościach algebraicznych (chciałoby się powiedzieć „bardzo nieizomorficznych"). W przykładzie 25 pierścienie $\boldsymbol{Z}_{(3)}$, $\boldsymbol{Z}_{(5)}$, $\boldsymbol{Z}_{(7)}$, $\boldsymbol{Z}_{(11)}$ mają, podobnie jak $\boldsymbol{Z}_{(2)}$, tylko jeden niezerowy ideał pierwszy i wobec tego spektra tych pierścieni są homeomorficznymi przestrzeniami dwupunktowymi. Dalej, spektrum każdego ciała jest przestrzenią jednopunktową, wszystkie spektra ciał są wobec tego homeomorficzne. Aby poprawić sytuację, to znaczy zapobiec przyporządkowaniu nieizomorficznym pierścieniom homeomorficznych obiektów (schematów), należy na schematach wprowadzić dodatkową strukturę „geometryczną", bardziej związaną z algebraicznymi własnościami pierścienia. Można to osiągnąć, wiążąc ze spektrami pierścieni tzw. snopy pierścieni. Podamy intuicyjny opis tej konstrukcji. Obszar $D = \{z : |z| < 1\}$ płaszczyzny liczb zespolonych jest homeomorficzny (w naturalnej topologii) z całą płaszczyzną $\boldsymbol{C}$. Własności zbiorów funkcji analitycznych na D i $\boldsymbol{C}$ różnią się jednak znacznie i mogą właśnie posłużyć do rozróżnienia tych obszarów. Na przykład każda funkcja analityczna ograniczona na $\boldsymbol{C}$ jest stała, a obszar D nie ma takiej własności. Nasuwa to myśl o badaniu przestrzeni topologicznych wraz ze zbiorem funkcji określonego typu na tej przestrzeni. W rozdziale 1 dla każdego zbioru algebraicznego określiliśmy pierścień funkcji regularnych na tym zbiorze. Gdy na przykład C_1 i C_2 są krzywymi płaskimi, to pierścienie funkcji regularnych na C_1 i C_2 nie są na ogół izomorficzne, chociaż przestrzenie topologiczne odpowiadające tym krzywym są — w topologii Zariskiego — homeomorficzne. Z każdym zbiorem algebraicznym X można związać

całą rodzinę pierścieni funkcji, a mianowicie rodzinę pierścieni funkcji regularnych na jego podzbiorach domkniętych. Nieco podobną, mającą przy tym większe znaczenie konstrukcję można przeprowadzić dla schematów afinicznych (tj. spektrów pierścieni), przyporządkowując schematowi afinicznemu rodzinę pierścieni złożonych z funkcji „algebraicznych" na zbiorach otwartych tego schematu (a nie na zbiorach domkniętych, jak dla zbiorów algebraicznych). Takie przyporządkowanie jest właśnie snopem pierścieni. Można na tej drodze osiągnąć pełną geometryzację teorii pierścieni, to znaczy uda nam się zastąpić każdy pierścień przez taki obiekt geometryczny, że izomorficznym pierścieniom odpowiadać będą „izomorficzne" przyporządkowane obiekty geometryczne, i na odwrót.

Czytelnik znający teorię kategorii domyśli się zapewne, że chodzi tu o konstrukcję funktora dającego izomorfizm kategorii pierścieni i pewnej kategorii, zwanej przez nas kategorią przestrzeni topologicznych ze snopami pierścieni. Szczegółowy opis tej konstrukcji zawiera książka Macdonalda (zob. niżej), a także podręcznik Szafarewicza.

Wyjaśnimy, jaki snop wiążemy z przestrzenią Spec A. Zwrócimy mianowicie uwagę, że każdy element pierścienia A wyznacza funkcję określoną na Spec A. Przyjmijmy mianowicie, że dla $\bar{p} \in \operatorname{Spec} A$, $f(\bar{p})$ jest klasą f w ciele ułamków pierścienia $A/\bar{p}$. Niestety, dla różnych $\bar{p}$ ciała te mogą być zupełnie różne. Jednak takie właśnie funkcje tworzą „snop strukturalny" przestrzeni Spec A. Mimo braku dokładnej definicji tego pojęcia wprowadzimy nań oznaczenie $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$. *Schematem afinicznym* nazywać będziemy teraz *parę* $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$.

Reasumując, autor chciałby narzucić Czytelnikowi następujące wyobrażenie: schemat, to przestrzeń topologiczna wraz ze zbiorem pewnych funkcji określonych na zbiorach otwartych tej przestrzeni. Para ta (przestrzeń i funkcje) jest lokalnie izomorficzna z parą $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$; sens pojęcia „lokalnego izomorfizmu" jest z pewnością zrozumiały. *Rozmaitość algebraiczna* jest zaś szczególnym rodzajem schematu, mianowicie takim, którego „części afiniczne" są spektrami pierścieni funkcji regularnych na podzbiorach algebraicznych przestrzeni K^n. Związek z klasycznym pojęciem „rozmaitości" jest wyjaśniony w przykładzie 27 (proszę też zobaczyć uwagę po przykładzie 31).

PRZYKŁAD 30. Jak wiadomo, przestrzeń rzutowa nad dowolnym ciałem K składa się z klas niezerowych ciągów $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ elementów ciała K. Dwa takie ciągi utożsamiamy, gdy są proporcjonalne. W szczególności, $U_i = \{(a_0, a_1, \ldots, a_n): a_i \neq 0\}$ jest zbiorem (klas) ciągów o niezerowej i-tej współrzędnej; zatem punkty zbioru U_i mogą być reprezentowane przez ciągi o i-tej współrzędnej równej 1. Inaczej jeszcze można powiedzieć, że n-wymiarowa przestrzeń rzutowa nad ciałem K składa się z prostych przechodzących przez początek układu (ciąg $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ jest wtedy wektorem kierunkowym prostej), a jeszcze inaczej, że składa się z n-wymiarowych hiperpłaszczyzn w K^{n+1} (wtedy $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ jest ciągiem współrzędnych Plückera tej hiperpłaszczyzny).

Przyporządkowanie $(a_0, \ldots, 1, \ldots, a_n) \mapsto (a_0, \ldots, a_n) \in K^n$ ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między punktami zbioru U_i a punktami przestrzeni K^n,

nazywanej w tym kontekście przestrzenią afiniczną. W przypadku gdy $K = R$ lub $K = C$ utożsamienie to określa na przestrzeni rzutowej P^n strukturę rozmaitości różniczkowej (analitycznej) — funkcje przejścia x_i/x_j są bowiem różniczkowalne (analityczne) na $U_i \cap U_j$. Są to także funkcje wymierne nieznikające na $U_i \cap U_j$; Czytelnik zgodzi się chyba z tym, że określenie „algebraicznego sklejenia" powinno obejmować ten przypadek. Tak jest istotnie, przestrzeń rzutowa jest rozmaitością algebraiczną.

Naśladując sposób konstrukcji Spec $K[x_1, \ldots, x_n]$ określimy przestrzeń rzutową jako schemat. Za punkty tego schematu przyjmiemy ideały pierwsze jednorodne (tzn. generowane przez wielomiany jednorodne) pierścienia wielomianów $n+1$ zmiennych nad K. Za bazę topologii tej przestrzeni przyjmiemy rodzinę podzbiorów $D(f) = \{\bar{p}: f \notin \bar{p}\}$, gdzie f jest wielomianem jednorodnym dodatniego stopnia. $D(f)$ jest przestrzenią homeomorficzną ze spektrum pierścienia złożonego z tych funkcji wymiernych f/g, dla których stopień f równy jest stopniowi g. Homeomorfizmem jest funkcja przyporządkowująca ideałowi $\bar{p} \in D(f)$ ideał złożony z ułamków h/f^s takich, że $h \in \bar{p}$ i stopień h jest równy stopniowi s.

Na koniec wspomnimy o zbiorach algebraicznych rzutowych. Tak nazywamy podzbiory przestrzeni rzutowej dające się opisać układem równań, których lewe strony są wielomianami jednorodnymi. Takie zbiory są lokalnie izomorficzne ze zbiorami algebraicznymi w sensie podanym w rozdziale 1, teraz zwanymi zbiorami algebraicznymi afinicznymi.

Dla ilustracji jeszcze jednego pojęcia geometrii różniczkowej, mającego pełne prawo obywatelstwa w geometrii algebraicznej, omówimy konstrukcję przestrzeni stycznej. Niech najpierw X będzie zbiorem algebraicznym afinicznym w przestrzeni K^n i x — punktem X. Rozpatrzmy zbiór F_x funkcji regularnych na pewnym otoczeniu Zariskiego punktu x — otoczenie to zależy, być może, od rozpatrywanej funkcji. W zbiorze tym wprowadźmy relację równoważności, zaliczając do jednej klasy funkcje identyczne na pewnym otoczeniu punktu x, mniejszym, być może, niż otoczenia, w których funkcje te są określone. Zbiór O_x klas tej relacji tworzy pierścień ze względu na naturalne działanie dodawania i mnożenia takich funkcji, jego jedynką jest funkcja równa tożsamościowo 1. Jest to pierścień lokalny. Jak w geometrii różniczkowej, *wektorem stycznym* nazywamy każde różniczkowanie d: $O_x \to K$, to znaczy operację liniową spełniającą ponadto warunek $d(f \cdot g) = f(x)d(g) + g(x)d(f)$. Wektory styczne tworzą przestrzeń liniową nad ciałem K i tę właśnie przestrzeń nazywamy *przestrzenią styczną* do X w punkcie x. Przestrzeń styczną do rozmaitości algebraicznej określamy zaś jako przestrzeń styczną do zbioru otwartego afinicznego zawierającego punkt styczności.

PRZYKŁAD 31. Przestrzeń styczna w punkcie p do zbioru opisywanego w K^2 równaniem $y^2 = x^3$ jest jednowymiarowa, gdy $p \neq (0, 0)$ i dwuwymiarowa, gdy $p = (0, 0)$.

Rozmaitość nieprzywiedlną nazywamy *nieosobliwą*, gdy wymiar przestrzeni stycznej jest w każdym punkcie taki sam. Można pokazać, że wymiar przestrzeni stycznej jest zawsze stały na pewnym zbiorze otwartym (a więc gęstym w topologii

Zariskiego zbioru nieprzywiedlnego), a w pozostałych punktach — większy. Ten fakt może posłużyć do określenia wymiaru rozmaitości jako wymiaru przestrzeni stycznej w „większości" punktów.

Zwracamy uwagę na pewną różnicę terminologiczną. Zbiór z przykładu 31 jest rozmaitością algebraiczną (tyle, że osobliwą), ale nie jest (gdy $K = \boldsymbol{C}$) rozmaitością analityczną.

Do sformułowania jednego z ważniejszych problemów geometrii algebraicznej potrzebne nam będzie pojęcie wymiernej równoważności rozmaitości. Mówimy mianowicie, że nieprzywiedlne rozmaitości algebraiczne X i Y są wymiernie równoważne, gdy mają izomorficzne niepuste zbiory otwarte. Gdy X i Y są nieprzywiedlnymi zbiorami algebraicznymi przestrzeni K^n i K^m odpowiednio, warunek ten jest równoważny temu, by ciała ułamków pierścieni $K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$ i $K[Y] = K[x_1, \ldots, x_m]/I(Y)$ były izomorficzne. Zatem stożek o równaniu $x_1^2+x_2^2-x_3^2 = 0$ w K^3 jest wymiernie równoważny z K^2, a walec $x_2^2-x_3^3 = 0$ nie. Klasyfikacja rozmaitości ze względu na wymierną równoważność jest słabsza, mniej dokładna, od klasyfikacji ze względu na izomorfizm.

Nazwijmy modelem ciała K $\bar{k}$-rozmaitość rzutową nieosobliwą X o ciele ułamków $(\bar{k}[X])$ izomorficznym z K.

Problem. Czy dla każdego ciała istnieje model?

Odpowiedź: Tak, gdy stopień przestępny $\deg \mathrm{tr}\,(K\colon \bar{k}) = 1$ albo $\deg \mathrm{tr}\,(K\colon \bar{k}) \leqslant 3$ i $\mathrm{char}\, K \neq 2, 3$, albo — przy dowolnym skończonym stopniu $\deg \mathrm{tr}\,(K\colon k)$ — gdy $\mathrm{char}\, K = 0$. Prawdopodobnie „tak" w pozostałych przypadkach.

Sformułujemy nieco trudniejszy problem.

Niech X będzie rozmaitością algebraiczną, a V zbiorem jej punktów osobliwych. Czy istnieje rozmaitość nieosobliwa X' i odwzorowanie regularne $\sigma\colon X' \to X$ takie, że

a) σ jest wymierną równoważnością, tzn. indukuje izomorfizm pewnych niepustych zbiorów otwartych w X i X' odpowiednio;

b) $\sigma\colon X' \setminus \sigma^{-1}(V) \to X \setminus V$ jest izomorfizmem.

To ważne zagadnienie ma nazwę „rozdmuchiwania osobliwości". Dla krzywych rzutowych (tzn. rozmaitości rzutowych wymiaru 1) problen ten jest stosunkowo łatwy, dla powierzchni (tzn. rozmaitości wymiaru 2) znacznie trudniejszy. Dla dowolnych rozmaitości rzutowych X (określonych nad ciałem charakterystyki 0) pozytywna odpowiedź jest znana od 1964 r. (Hironaka). Innym problemem tego typu jest „wygładzanie cykli". Powiemy tylko, że chodzi w nim o to, by dla każdego cyklu (cykl = formalna kombinacja podrozmaitości ze współczynnikami całkowitymi) na nieosobliwej rozmaitości znaleźć równoważny (proszę myśleć: homotopijny) cykl złożony z podrozmaitości nieosobliwych. Jeden ze szczególnych przypadków tego problemu — będący jednym z nielicznych, dla których odpowiedź jest znana — ujmuje tzw. twierdzenie Bertiniego, warte oddzielnego sformułowania w nieco innym języku. Jeżeli mianowicie X jest podzbiorem algebraicznym przestrzeni rzutowej, to część wspólna X i hiperpłaszczyzny H przestrzeni rzutowej jest „na ogół" sumą nieosobliwych podrozmaitości X. Zwrot „na ogół" znaczy, iż hiperpłaszczyzny H

mające tę własność tworzą zbiór otwarty w przestrzeni rzutowej, traktowanej jako zbiór hiperpłaszczyzn.

Powyższe problemy są przykładami tych zagadnień geometrii algebraicznej, które są przeniesieniem pewnych zagadnień geometrii przestrzeni analitycznych czy nawet geometrii różniczkowej. Istotnie, dużą część twierdzeń tych dwu gałęzi matematyki można sformułować (czy raczej: „przeformułować") w geometrii algebraicznej. Rzecz jasna, pytanie czy tak przeformułowane twierdzenie jest prawdziwe jest czasem łatwe, a czasem (częściej!) bardzo trudne. Zrozumiałe jest również, że czasami samo przetłumaczenie problemu może nastręczać trudności, że może być niejednoznaczne, i że zbliżone „tłumaczenia" mogą prowadzić do problemów bardzo różnej klasy trudności. Przykładem teorii, której przeniesienie do geometrii algebraicznej nie narzuca się samo przez się, jest Kodairy i Spencera teoria deformacji rozmaitości analitycznych. W teorii tej bada się analityczne rodziny rozmaitości analitycznych, czyli trójki (E, B, p) takie, że:

a) E i B są zwartymi i spójnymi rozmaitościami analitycznymi, a $p\colon E \to B$ odwzorowaniem analitycznym,

b) rząd macierzy Jacobiego odwzorowania p jest w każdym punkcie równy wymiarowi (zespolonemu) B.

W tej sytuacji każde włókno $p^{-1}(a)$ nazywamy *deformacją* drugiego $p^{-1}(b)$. Intuicyjnie: struktura analityczna na $p^{-1}(b)$ jest „deformowalna w sposób różniczkowalny" do struktury analitycznej na $p^{-1}(b)$. Podkreślamy, że wszystkie włókna są dyferomorficzne. Problem deformacji wiąże się zatem z problemem wyliczenia (i klasyfikacji) wszystkich struktur analitycznych na danej rozmaitości różniczkowej.

W geometrii algebraicznej nie ma narzucającego się pojęcia odpowiadającego różniczkowej rodzinie rozmaitości analitycznych. Okazuje się jednak, że można takie pojęcie znaleźć; istotne są tu warunki nakładane na p. Mianowicie p powinno być tzw. morfizmem płaskim. Można się spodziewać, że twierdzenia teorii deformacji w geometrii algebraicznej będą podobne do analogicznych twierdzeń teorii Kodeiry–Spencera. Ta problematyka jest jedną z szybciej rozwijających się grup zagadnień geometrii algebraicznej.

Mnogość problemów „analitycznych" dostarcza dużej obfitości tematyki. Przez teorię grup algebraicznych (grupa algebraiczna = grupa będąca rozmaitością algebraiczną taką, w której działania grupowe są funkcjami regularnymi) geometria algebraiczna ma związek z teorią grup Liego, przez teorię działań tych grup — z teorią układów dynamicznych, a przez teorię deformacji działań tych grup — nawet z teorią całki (jednym z narzędzi tej teorii jest operator Reynoldsa, naśladujący całkę Haara).

Przykładem klasy zagadnień nie mających bezpośrednich związków z geometrią różniczkową może być problem szukania modeli minimalnych. Wyżej wprowadziliśmy pojęcie modelu ciała. Powiemy teraz, że model X' jest większy (ściślej: niemniejszy) od modelu X, gdy istnieje odwzorowanie regularne $f\colon X' \to X$ będące wymierną

równoważnością. Modelem minimalnym jest zaś model, który zgodnie z ogólnie przyjętą terminologią dotyczącą relacji $\geqslant$ powinien być nazywany modelem najmniejszym; ten zaś, który powinien nosić nazwę modelu minimalnego, jest tradycyjnie nazywany modelem względnie minimalnym. Można pokazać, że w każdej klasie wymiernie równoważnych rozmaitości istnieje model względnie minimalny. Z modelami minimalnymi sprawa ma się gorzej — dla rozmaitości wymiaru większego niż 3 na ogół nic nie wiadomo o ich istnieniu i jednoznaczności.

Dochodzimy do miejsca, w którym geometria algebraiczna wiąże się bardzo ściśle z algebrą przemienną, a dokładniej z teorią pierścieni przemiennych. Granica pomiędzy tymi gałęziami matematyki jest nieostra i trudno zauważalna. Podamy przykład zagadnienia z ich pogranicza.

Jednym z najstarszych problemów geometrii algebraicznej był mianowicie problem następujący: czy każda rozmaitość jednowymierna określona nad algebraicznie domkniętym ciałem $\bar{k}$, jest wymierna. Rozmaitość V jest jednowymierna (autor artykułu nie znalazł lepszego tłumaczenia terminu „unirational"), gdy istnieje odwzorowanie regularne niepustego zbioru otwartego w pewnej przestrzeni rzutowej na V. Rozmaitość jest zaś wymierna, jeżeli jest wymiernie izomorficzna z przestrzenią rzutową. W języku teorii pierścieni ten problem można sformułować następująco. Podciało K ciała funkcji wymiernych $\bar{k}(x_1, \ldots, x_n)$ ma stopień przestępny n nad $\bar{k}$. Czy K jest ciałem izomorficznym z $\bar{k}(x_1, \ldots, x_n)$? Pozytywna odpowiedź na to pytanie dla $n = 1$ oraz przy założeniu zerowej charakterystyki ciała $\bar{k}$ dla $n = 2$ była znana od dawna (twierdzenie Lürotha i twierdzenie Castelnuovo, odpowiednio). Dopiero w 1971 r. Iszkowskij i Manin znaleźli pierwszy przykład niewymiernej rozmaitości jednowymiernej (nieosobliwa hiperpowierzchnia stopnia 3 w P^4), wkrótce znaleziono dalsze.

Omówimy jeszcze jeden łatwy do sformułowania, a trudny do rozwiązania problem. Gdy K jest podciałem ciała L, to każdy zbiór algebraiczny (rozmaitość, schemat) określony nad L jest również określony nad K. Ogólnie postawione pytanie brzmi: co można powiedzieć o zbiorze algebraicznym nad K, gdy znamy jego własności nad L. Konkretnie, można na przykład zapytać czy z tego, że określony nad K zbiór jest nad L (izomorficzny z) przestrzenią L^n wynika, że jest izomorficzny z K^n. Ten z pozoru łatwy problem nie doczekał się jeszcze ogólnego rozwiązania.

Przedstawiliśmy kilka charakterystycznych dla geometrii algebraicznej zagadnień. Z tego krótkiego przeglądu jest widoczne, że daleko jej do tego, by stać się martwą gałęzią matematyki. Autor artykułu z zaciekawieniem spogląda w przyszłość, usiłując odgadnąć, czy nadciąga nowa (zapowiadana przez niektórych specjalistów) rewolucja w tej specjalności.

Literatura cytowana

[1] Andrzej Białynicki-Birula, *Algebra*, PWN, 1972.

[2] Ryszard Engelking, *Zarys topologii ogólnej*, PWN, 1965 i późniejsze wydania.

[3] Serge Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company 1965 (w języku angielskim), przekład polski pod tym samym tytułem PWN, 1973.

Literatura uzupełniająca

[1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massacusetts, 1969; Przekład rosyjski: М. Атья, И. Г. Макдональд, *Введение в коммутативную алгедру*, Москва 1972.

[2] J. Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique*: I. *Aperçu historique sur le développement de la géométrie algébrique*; II. *Précis de géometrie algébrique élémentaire*, Presses Universitaires de France, 1974.

[3] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Elements de géométrie algébrique*, 0, I, II. Publ. Math. de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, no 4, 7, 11; wydanie Springera 1971.

[4] I. G. Macdonald, *Algebraic geometry*, Introduction to schemes. W. A. Benjamin Inc., New-York-Amsterdam 1968.

[5] (I. R. Szafarewicz) И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*, Москва 1972.