ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XX (1976)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Z. CIESIELSKI (Sopot) i E. NIEDŹWIECKA (Gdańsk)

Rozmowa z maszyną cyfrową Odra 1204 o aproksymacji funkcjami łamanymi

W matematyce wykorzystanie maszyny liczącej do rozwiązywania zagadnień teoretycznych jest sprawą znaną, choć wcale nie powszechną. Udział maszyny cyfrowej w takiej współpracy może być dwojakiego rodzaju: albo maszyna „sama" rozwiązuje do końca postawiony jej problem, albo matematycy współpracujący z maszyną wykorzystują dostarczone przez nią wyniki numeryczne przy rozwiązywaniu danego zagadnienia. W pierwszej sytuacji, w kręgu danych zagadnień, maszyna cyfrowa może odkryć i jednocześnie udowodnić nowe twierdzenie. W drugim przypadku wyniki numeryczne dostarczone przez maszynę mogą podpowiedzieć sformułowania nowych twierdzeń, pozostawiając ich dowody matematykom.

Właśnie tę ostatnią sytuację pragniemy zilustrować na konkretnym, stosunkowo prostym przykładzie.

W przestrzeni funkcji ciągłych $C(I)$, $I = \langle 0, 1\rangle$, posługujemy się normą $\|f\| = \sup\{|f(t)|: t \in I\}$ i iloczynem skalarnym

$$(f, g) = \int_I f(t)g(t)dt,$$

który wprowadza w sposób naturalny pojęcie ortogonalności. Mianowicie, funkcje $f, g \in C(I)$ są *ortogonalne* wtedy i tylko wtedy, gdy $(f, g) = 0$.

Dla danego podziału π: $0 = s_0 < \ldots < s_n = 1$, oznaczmy przez $S_\pi(I)$ podprzestrzeń $n+1$ wymiarową przestrzeni $C(I)$ funkcji łamanych o wierzchołkach w punktach $s_0, \ldots, s_n$. Dobrze wiadomo, że dla każdego $f \in C(I)$ i danego π istnieje dokładnie jedna funkcja $P_\pi f \in S_\pi(I)$ taka, że

$$\int_I |f - P_\pi f|^2 = \inf\Big\{\int_I |f-g|^2: g \in S_\pi(I)\Big\}.$$

Funkcja $P_\pi f$ nazywa się *rzutem ortogonalnym* f *na* $S_\pi(I)$. Odwzorowanie P_π: $C(I) \to S_\pi(I)$ jest liniowe, a jego norma w przestrzeni Banacha $C(I)$ wyraża się wzorem

$$\|P_\pi\| = \sup\{\|P_\pi f\|: \|f\| = 1,\ f \in C(I)\}. \tag{1}$$

Wykazuje się w sposób całkowicie elementarny, że dla każdego podziału π (patrz [1])

$$\|P_\pi\| \leqslant 3. \tag{2}$$

Nie wiadomo jednak, czy stała 3 jest najlepsza dla rodziny rzutów ortogonalnych P_π odpowiadających wszystkim możliwym podziałom π (1).

Próbując odpowiedzieć na to pytanie, odkryliśmy w opisanej poniżej rozmowie z Odrą 1204 dwie inne nierówności, interesujące z punktu widzenia aproksymacji funkcjami łamanymi.

Dla podziału π rzut ortogonalny P_π pisze się w postaci

$$P_\pi f(t) = \int_I K_\pi(t, s) f(s)\, ds, \tag{3}$$

gdzie $K_\pi(t, s)$ jest funkcją symetryczną i $K_\pi(t, \cdot) \in S_\pi(I)$ dla każdego $t \in I$. Korzystając z tej własności jądra K_π otrzymujemy wzór

$$\|P_\pi\| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \int_I |K_\pi(s_i, s)|\, ds. \tag{4}$$

Z drugiej strony, jak wynika z określenia rzutu P_π, wartości $a_{i,j} = K_\pi(s_i, s_j)$ spełniają dla każdego i, $0 \leqslant i \leqslant n$, układ równań

$$\begin{aligned} \delta_1(2a_{0,i}+a_{1,i}) &= 6\delta_{0,i}, \\ \delta_j(a_{j-1,i}+2a_{j,i})+\delta_{j+1}(2a_{j,i}+a_{j+1,i}) &= 6\delta_{j,i}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \\ \delta_n(a_{n-1,i}+2a_{n,i}) &= 6\delta_{n,i}, \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie $\delta_i = s_i - s_{i-1}$. Z równań (5) można odczytać, że $a_{i,j} = (-1)^{i+j}|a_{i,j}|$, co pozwala wyliczyć całki występujące w (4) i otrzymać wzór

$$\|P_\pi\| = \tfrac{1}{2} \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} \delta_j \frac{|a_{j-1,i}|^2+|a_{j,i}|^2}{|a_{j-1,i}|+|a_{j,i}|}. \tag{6}$$

Z rzutami ortogonalnymi P_π ściśle związany jest ortogonalny ciąg funkcji łamanych zwany *układem Franklina* (patrz [1]). Suma częściowa rozwinięcia Fouriera względem tego układu jest równa rzutowi ortogonalnemu P_n odpowiadającemu podziałowi π_n: $0 = s_{0,n} < \ldots < s_{n,n} = 1$, gdzie dla $n = 2^m+k$, $m \geqslant 0$, $1 \leqslant k \leqslant 2^m$,

$$s_{i,n} = \begin{cases} \dfrac{i}{2^{m+1}}, & \text{dla } i = 0, \ldots, 2k, \\ \dfrac{i-k}{2^m}, & \text{dla } i = 2k+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{7}$$

(1) Ostatnio K. I. Oskolkov dał pozytywną odpowiedź na to pytanie (patrz: *Approximation theory*, 1977, w serii Banach Center Publications, tom 4).

Rozwiązanie $a_{i,j}^{(n)}$ układu (5) odpowiadające podziałowi (7), zostało znalezione w płacy [2], mianowicie

$$|a_{i,j}^{(n)}| = \frac{3^{\frac{1}{2}}2^{m+1}\varepsilon_{i,j}}{sh(\delta n)+sh\left(\delta(n-2k)\right)ch(\delta 2k)}, \tag{8}$$

gdzie δ jest dodatnim rozwiązaniem równania $ch(\delta) = 2$, $\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{j,i}$ oraz

$$\varepsilon_{i,j} = \begin{cases} 2ch(\delta i)\left[ch\left(\delta(n-j)\right)+sh\left(\delta(n-2k)\right)sh\left(\delta(2k-j)\right)\right], & 0 \leqslant i \leqslant j < 2k, \\ ch\left(\delta(n-j)\right)\left[ch(\delta i)+ch(\delta 2k)ch\left(\delta(i-2k)\right)\right], & 2k \leqslant i \leqslant j \leqslant n, \\ 2ch(\delta i)ch\left(\delta(n-j)\right), & i < 2k \leqslant j \leqslant n. \end{cases}$$

Tę postać rozwiązania można uprościć wprowadzając ciągi liczb naturalnych (A_n) i (B_n) jako rozwiązanie następującego układu równań różnicowych:

$$A_{n+1} = 2A_n+3B_n, \quad A_0 = 1,$$
$$B_{n+1} = A_n+2B_n, \quad B_0 = 0.$$

Ponieważ $A_n = ch(\delta n)$, $3^{\frac{1}{2}}B_n = sh(\delta n)$, otrzymujemy wzór

$$\varepsilon_{i,j} = \begin{cases} 2A_i(A_{n-j}+3B_{n-2k}B_{2k-j}), & 0 \leqslant i \leqslant j < 2k, \\ A_{n-j}(A_i+A_{2k}A_{i-2k}), & 2k \leqslant i \leqslant j \leqslant n, \\ 2A_iA_{n-j}, & i < 2k \leqslant j \leqslant n. \end{cases} \tag{9}$$

Dla danego $n = 2^m+k$ wprowadzamy oznaczenia

$$C_n^{-1} = B_n+B_{n-2k}A_{2k}, \qquad D_{n,i} = \int_I |K_n(s_{i,n},s)|\,ds,$$

gdzie K_n jest jądrem z wzoru (3) odpowiadającym podziałowi (7). Kładąc we wzorach (4) i (6) $\pi = \pi_n$ oraz wykorzystując wzór (8) otrzymujemy

$$\|P_n\| = D_n = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} D_{n,i}, \tag{10}$$

$$D_{n,i} = \tfrac{1}{2}C_n \sum_{j=1}^{2k} \frac{\varepsilon_{j-1,i}^2+\varepsilon_{j,i}^2}{\varepsilon_{j-1,i}+\varepsilon_{j,i}} + C_n \sum_{j=2k+1}^{n} \frac{\varepsilon_{j-1,i}^2+\varepsilon_{j,i}^2}{\varepsilon_{j-1,i}+\varepsilon_{j,i}}, \tag{11}$$

gdzie $\varepsilon_{j,i}$ dane są wzorem (9).

Wzory (10), (11) i (9) pozwalają wyliczyć wielkości D_n za pomocą maszyny cyfrowej. Ograniczenia zakresu pamięci maszyny cyfrowej Odra 1204 pozwalają wyliczyć D_n jedynie dla $n \leqslant 128$. Cały program opracowany w języku Algol 1204 przedstawia się następująco:

begin

integer *m, n, i, j, k, l, l1, M, p, r*;

```
real a, Dm, C, D;
read (m, M); l: = 2×2 ↑ M;
begin
array A, B, e[0: l];
A[0]: = 1; B[0]: = 0;
for i: = 1 step 1 until l do
begin
A[i]: = 2×A[i−1]+3×B[i−1]; B[i]: = A[i−1]+2×B[i−1]
end;
E: for k: = 1,2 ↑ (m−1), 2 ↑ m do
begin
format ('123 □□□'); print ('??□□□m =', m, 'k =', k, '?');
format ('?0.12345678□□0.12345678□□□0.12345678□□□
0.12345678□□□0.12345678□□□0.12345678');
l1=2 ↑ m+k; Dm = 0;
for p = 0 step 1 until l1 do begin
for r = 0 step 1 until l1 do
begin
if p > r, then begin i = r;
j = p end else begin i = p; j = r end;
e[r] = if i ⩾ 0 ∧ j ⩽ 2×k−1, then
2×A[i]×(A[l1−j]+3×B[l1−2×k]×B[2×k−j])
else if i > 2×k−1 ∧ j, then A[l1−j] × (A[i]+A[2×k]×A[i−2×k]);
else 2×A[i]×A[l1−j]; end;
D = 0; a = 0;
for j = 1 step 1 until 2×k do
D = D+(e[j]×e[j]+e[j−1]×e[j−1])/(e[j]+e[j−1]);
for j = 2×k+1 step 1 until l1 do
a = a+(e[j]×e[j]+e[j−1]×e[j−1])/(e[j]+e[j−1]);
C = 1/(B[l1]+B[l1−2×k]×A[2×k]);
D = (0.5×D+a)×C; print (D);
if D > Dm, then Dm = D; end p;
format ('??□□□Dmax = 1.12345678?'); print (Dm);
end k;
wait ('stop'); m: = m+1;
goto E;
end;
end?
```

Dla przykładu podajemy wyliczone współrzędne wektora $(D_{n,0}, \ldots, D_{n,n})$ dla $n = 48$, $m = 5$ i $k = 16$,

2.00000000	1.84529946	1.94473082	1.98418094	1.99568871
1.99883958	1.99968869	1.99991656	1.99997764	1.99999401
1.99999839	1.99999957	1.99999988	1.99999997	1.99999999
2.00000000	2.00000000	2.00000000	2.00000000	2.00000001
2.00000005	2.00000018	2.00000068	2.00000255	2.00000950
2.00003547	2.00013234	2.00049342	2.00183498	2.00675794
2.02396255	2.07179677	2.00000000	4.93997690	1.97925239
1.99410378	1.99839581	1.99956802	1.99988264	1.99996298
1.99996933	1.99991433	1.99968810	1.99883942	1.99568866
1.98418093	1.94473082	1.84529946	2.00000000	

Dmax = 2.07179677

Dostarczone przez Odrę wyniki pozwalają przypuszczać, że zawsze

$$D_n \leqslant 2{,}0717967\ldots, \tag{12}$$

a dla $k = 2^m$ tzn. $n = 2^{m+1}$, co odpowiada równomiernemu podziałowi diadycznemu,

$$D_n \leqslant 2. \tag{13}$$

Z uzyskanych wyników także odczytaliśmy, że

$$D_n = D_{n,2k-1} \quad \text{dla } k > 1.$$

Ta ostatnia obserwacja pozwala przypuszczać, że stała po prawej stronie nierówności (12) może być równa $2+(2-3^{\frac{1}{2}})^2 = 2{,}0717967\ldots$

Stanowiło to bodziec do poszukiwania dowodu takich właśnie nierówności i istotnie udało się udowodnić (patrz [3]), że dla równomiernego podziału

$$\pi_{n,0}\colon\ s_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

mamy

$$\|P_{n,0}\| < 2, \quad \|P_{n,0}\| \to 2 \quad \text{przy } n \to \infty, \tag{14}$$

gdzie $P_{n,0}$ jest rzutem ortogonalnym odpowiadającym podziałowi $\pi_{n,0}$. Nieco żmudniejszy jest dowód nierówności sugerowanej przez (12), że

$$\|P_n\| < 2+(2-3^{\frac{1}{2}})^2, \quad \|P_n\| \to 2+(2-3^{\frac{1}{2}})^2 \quad \text{przy } n \to \infty. \tag{15}$$

Z nierówności (14) można wyprowadzić następujący wniosek dla funkcji $f \in C(I)$:

$$\|f-P_{n,0}f\| \leqslant 3 \sup\left\{\left|f(t)+f(s)-2f\left(\tfrac{1}{2}(t+s)\right)\right|\colon\ |t-s| < 1/n,\ t, s \in I\right\}.$$

Natomiast z nierówności (15) wnioskujemy, że $2+(2-3^{\frac{1}{2}})^2$ jest stałą bazową (stałą Lebesgue'a) dla układu Franklina.

Wydaje się, że bez pomocy maszyny byłoby trudno odgadnąć nawet tylko nierówność (14).

Literatura

[1] Z. Ciesielski, *Properties of the orthonormal Franklin system*, Studia Math. 23 (1963), str. 141–147.

[2] — *Properties of the orthonormal Franklin system*, II, ibidem 27 (1966), str. 289–323.

[3] — *The C(I) norms of orthogonal projections onto subspaces of polygonals*, Trudy Mat. Inst. im. V. A. Steklova 134 (1975), str. 366–369.

INSTYTUT MATEMATYKI
UNIWERSYTETU GDAŃSKIEGO