CZESŁAW OLECH (Warszawa)

O wynikach Tadeusza Ważewskiego w matematycznej teorii optymalnego sterowania

Matematyczna teoria optymalnego sterowania jest dziedziną stosunkowo młodą, powstałą w końcu lat pięćdziesiątych, zapoczątkowaną pracami Pontriagina i jego uczniów w Związku Radzieckim oraz Bellmana, Bushawa i LaSalle'a w Stanach Zjednoczonych.

Zainteresowanie Tadeusza Ważewskiego tą teorią powstało w 1960 r. W tym roku poprosił mnie o zreferowanie na jego seminarium, klasycznej już teraz pracy LaSalle'a [2], wtedy dostępnej tylko w preprincie, dotyczącej problemu czasowo-optymalnego dla liniowego układu sterowanego.

LaSalle rozważał układ

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

gdzie $x \in R^n$, $u \in R^m$, A i B są macierzami odpowiednich wymiarów. Parametr u nazywa się sterowaniem i zwykle spełnia pewne ograniczenia. LaSalle rozważał przypadek, gdy u jest z kostki $U = \{\{u_i\} \mid |u_i| \leqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$. Absolutnie ciągła funkcja $x\colon [a, b] \to R^n$ jest rozwiązaniem układu (1), gdy istnieje mierzalna funkcja sterująca $u\colon [a, b] \to R^n$ spełniająca ograniczenia $u(t) \in U$ sterowanie dopuszczalne, takie że $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ prawie wszędzie w przedziale $[a, b]$. Tak więc rozwiązanie układu (1) jest jednoznacznie wyznaczone przez warunek początkowy i funkcję sterującą. Przez $x(t; x_0, u)$ oznaczymy rozwiązanie układu (1) odpowiadające sterowaniu u i spełniające warunek początkowy $x(0; x_0, u) = x_0$.

Problem czasowo-optymalnego sterowania polega na przejściu z ustalonego stanu początkowego x_0 w zadany stan końcowy — cel x_1 w najkrótszym czasie. Chodzi więc o znalezienie u_* w klasie dopuszczalnych sterowań i czasu t_* tak aby $x(t_*; x_0, u_*) = x_1$ i dla każdego innego sterowania dopuszczalnego u, $x(t; x_0, u) \neq x_1$, gdy $0 < t < t_*$. Wtedy u_* i t_* nazywamy odpowiednio sterowaniem i czasem optymalnym.

W trakcie referowania pracy LaSalle'a Profesor Ważewski zauważył, że w problemie czasowo-optymalnego sterowania można wyrugować parametr sterujący i układ (1) zastąpić warunkiem

$$\dot{x} \in F(x) \tag{2}$$

gdzie

$$F(x) = \{p \mid p = Ax + Bu, u \in U\}. \tag{3}$$

Jest jasne, że funkcja absolutnie ciągła $x(t)$, będąca rozwiązaniem równania (1), spełnia warunek (2) prawie wszędzie w zadanym przedziale, tzn. jest rozwiązaniem — trajektorią warunku (2).

Warunek (2) jest uogólnieniem równania różniczkowego zwyczajnego Ważewski nazwał warunek (2) *polem orientorowym*, nazywając zbiór wektorów *orientorem*. Termin ten jest dziś dość często stosowany w literaturze, ale terminologia nie jest jednolita. Obok pola orientorowego używane są także: *równania różniczkowe z wielo-znaczną prawą stroną*, *różniczkowe zawieranie* (differential inclusion), a także *równanie kontyngensowe*.

Ten ostatni termin u Ważewskiego oznacza nieco inny warunek. *Kontyngensem* funkcji $x(t)$ dla $t = t_0$ jest zbiór

$$D^*x(t_0) = \left\{\lim_n \left(x(t_n)-x(t_0)\right)/(t_n-t_0)\right| \; t_n \neq t_0 \text{ i } t_n \to 0\}.$$

W latach trzydziestych matematyk krakowski Stanisław Krystyn Zaremba [16], a także A. Marchaud [3] we Francji rozważali uogólnienie równań różniczkowych

$$D^*x \subset Fx, \tag{4}$$

gdzie F jest funkcją, której wartościami są zbiory, a rozwiązaniem (4) jest każda funkcja ciągła $x(t)$, której kontyngens $D^*x(t)$ zawiera się w $F\left(x(t)\right)$ dla każdej chwili t z odpowiedniego przedziału.

Ważewski znał wyniki Zaremby i natychmiast zauważył związek między układami sterowanymi a teorią Marchaud–Zaremby.

Obserwacje te były punktem wyjścia prac profesora Ważewskiego z zakresu matematycznej teorii optymalnego sterowania. Pierwsza z nich przedstawiona do druku już pod koniec 1960 r. (p. [5]) zawiera twierdzenie o równoważności układu sterowanego i równania kontyngensowego [4]. Pozwoliło to autorowi na zastosowanie wyników Zaremby do problemu czasowo-optymalnego i to dla nieliniowego przypadku. W szczególności uzyskał on na tej drodze twierdzenie o istnieniu rozwiązania optymalnego analogiczne do twierdzenia Filippova [1].

Profesor Ważewski opublikował w krótkim okresie niespełna trzech lat dziewięć not w biuletynie PAN [5]–[13] na tematy związane z matematyczną teorią optymalnego sterowania oraz dwa artykuły [14], [15] podsumowujące ten dorobek.

Oprócz wspomnianej już równoważności układów sterowanych i pól orientorowych i w konsekwencji zastosowania wyników Zaremby, innym ważnym osiągnięciem Ważewskiego jest wprowadzenie pojęcia quasitrajektorii. Istnienie rozwiązania czasowo-optymalnego jest związane z domkniętością zbioru trajektorii pola orientorowego wychodzących z ustalonego punktu. Ta ostatnia własność ma miejsce, jeśli orientory pola są zbiorami wypukłymi. Jeśli natomiast warunek wypukłości nie jest spełniony, powstaje naturalny problem uogólnienia pojęcia trajektorii, tak aby otrzymać tę ważną własność domkniętości zbioru rozwiązań.

Quasitrajektorią pola orientorowego

$$\dot{x} \in F(t, x) \tag{6}$$

Ważewski nazwał każdą absolutnie ciągłą funkcję $x(t)$, która jest granicą ciągu funkcji $k_i(t)$ takich, że dla każdego t $|\dot{k}_i(t)| \leqslant M$ i $r\left(\dot{k}_i(t), F\left(t, k_i(t)\right)\right) \to 0$ gdy $i \to \infty$, gdzie r jest odległością punktu od zbioru.

Podobne uogólnienia wprowadzało paru autorów L. C. Young i E. J. McShane *generalized curves* w odniesieniu do klasycznych problemów wariacyjnych, w zastosowaniu do problemów sterowania R. V. Gamkrelidze (tzw. „skoliaszczyje reżimy") i J. Warga („relaxed controls"). Definicja Ważewskiego wyróżnia się prostotą i równocześnie jest dostatecznie ogólna.

Najbardziej centralnym wynikiem Ważewskiego w omawianej tematyce jest następujące twierdzenie, które przytoczę z pewną dozą szczegółowości. *Układem sterowanym* (uogólnienie układu (1)) Ważewski nazwał parę (f, C) gdzie f: $(t, x, u) \to f(t, x, u) \in R^n$, a funkcja C przyporządkowuje każdej parze (t, x) zbiór zwarty w R^n. Funkcja $x(t)$ absolutnie ciągła na przedziale J jest *rozwiązaniem* (*trajektorią*) układu (f, C), jeśli istnieje funkcja mierzalna u określona na J i taka, że

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big) \quad \text{oraz} \quad u(t) \in C\big(t, x(t)\big) \quad \text{prawie wszędzie w } J;$$

$x(t)$ jest *quasitrajektorią* układu (f, C), jeśli istnieje ciąg funkcji u_i mierzalnych i ciąg funkcji absolutnie ciągłych x_i na J takich, że

$$|\dot{x}_i(t)| \leqslant M < +\infty, \qquad u_i(t) \in C\big(t, x_i(t)\big)$$

oraz $r\big(\dot{x}_i(t), f\big(t, x_i(t), u_i(t)\big)\big) \to 0$ prawie wszędzie w J. Połóżmy

$$F(t, x) = f\big(t, x, C(t, x)\big)$$

i oznaczmy przez $E(t, x)$ domkniętą obwiednię wypukłą zbioru $F(t, x)$. Ważewski pokazał, że przy założeniu ciągłości f i C (funkcja C ciągła w sensie metryki Hausdorffa w przestrzeni podzbiorów zwartych) następujące zbiory są identyczne: zbiór quasitrajektorii układu (f, C), zbiór quasitrajektorii pola F, zbiór trajektorii pola E oraz zbiór rozwiązań równania kontyngensowego

$$D^*x \subset E(t, x).$$

Nie jest celem tego artykułu dokładne omówienie wszystkich wyników Ważewskiego. Zainteresowanego czytelnika odsyłam do przeglądowych artykułów [14], [15].

Tadeusz Ważewski w kilku cytowanych tu pracach dał podstawy teorii pól orientorowych i tym samym pewnej nowej metody traktowania problemów optymalnego sterowania. Ten kierunek badań znacznie został rozwinięty przez ostatnie piętnaście lat nie tylko przez uczniów Ważewskiego, ale i przez wielu matematyków zagranicznych. Problematyka ta właściwie dopiero teraz zdobyła sobie pełne uznanie. Wyniki Ważewskiego zaliczają się do najbardziej fundamentalnych. W tej dziedzinie jeszcze raz przejawił się ten niezwykły dar Profesora Ważewskiego do wykrywania faktów, które gdy odkryte i sformułowane wydają się oczywiste. Tylko bardzo nielicznym udaje się tego rodzaju fakty sobie i innym uświadomić.

Teoria równań orientorowych jest obecnie znacznie bogatsza niż to, co zostało zawarte w pracach Ważewskiego, ale z drugiej strony ślady niemal każdej idei i metody, każdego pojęcia ważnego w tej teorii można odszukać w pracach Ważewskiego. Dla przykładu podam pojęcie mierzalności odwzorowań wielowartościowych;

całkowanie takich odwzorowań, teoria selektorów mierzalnych. Są to zagadnienia obecnie dobrze opracowane, o istotnym znaczeniu dla teorii optymalnego sterowania, a które pojawiły się już w pracach Ważewskiego i jest jasne, że z ich znaczenia autor doskonale zdawał sobie sprawę.

Nie sposób w tym krótkim omówieniu pominąć jednego ważnego „wyniku" Tadeusza Ważewskiego w matematycznej teorii optymalnego sterowania. Chodzi o przyciągnięcie do tej teorii jego uczniów i współpracowników. Wspomnę jedynie o pracy A. Plisia [4], choć podobnych przykładów można by podać więcej. Praca ta jest jedną z pierwszych w literaturze dotyczących mierzalnych funkcji orientorowych i zawiera m. in. uogólnienie twierdzenia Łuzina dla takich funkcji. Obecnie jest powszechnie cytowana w literaturze światowej. Niewątpliwie nie powstałaby ona bez udziału profesora Ważewskiego, bez tej rzadkiej umiejętności, jaką miał Ważewski: zarażania swego otoczenia bakcylem dociekliwości.

Prace cytowane

[1] A. P. Filippov, *О некоторих вопросах теории оптимального регулирования*, Vestnik Moskow. Uniw. Ser. Mat. Meh. Astr. Fiz. Him. 2 (1959), str. 25–32.

[2] J. P. LaSalle, *The time optimal control problem*, Contr. to the theory of nonlinear oscillations, vol. 5, str. 1–24, Princeton Univ. Press, Princeton 1960.

[3] A. Marchaud, *Sur les champs de demi-cones et équations différentielles du premier ordre*, Bull. Soc. Math. France 62 (1934), str. 1–38.

[4] A. Pliś, *Remark on measurable set-valued functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 9 (1961), str. 857–859.

[5] T. Ważewski, *Systèmes de commande et équations au contingent*, ibidem 9 (1961), str. 151–155.

[6] — *Sur une condition d'existence des fonctions implicites mesurables*, ibidem 9 (1961), str. 861–866.

[7] — *Sur une conditions equivalente a l'équation au contingent*, ibidem 9 (1961), str. 865–867.

[8] — *Sur la semicontinuite inferieure du „tendeur" d'un ensemble compact variant d'une façon continue*, ibidem 9 (1961), str. 869–872.

[9] — *Sur une généralisation de la notion des solutions d'une équation au contingent*, ibidem 10 (1962), str. 11–15.

[10] — *Sur les systèmes de commande non linéaires dont le contre-domaine de commande n'est pas forcement convexe*, ibidem 10 (1962), str. 17–21.

[11] — *Sur quelques définitions équivalentes des quasitrajectoires des systèmes de commande*, ibidem 10 (1962), str. 469–471.

[12] — *Sur un système de commande dont les trajectoires coincident avec les quasitrajectoires du système donne*, ibidem 11 (1963), str. 101–104.

[13] — *Sur un système de commande dont les trajectoires coincident avec les quasitrajectoires du système donne*, ibidem 11 (1963), str. 101–104.

[14] — *O problemie optymalnego sterowania w przypadku nieliniowym*, Archiwum Automatyki i Telemechaniki 7 (1962), str. 19–32.

[15] — *On an optimal control problem* (in connection with the theory of orientorfields of A. Marchaud and S. K. Zaremba). *Differential equations and their applications*. Proceedings of the Conference held in Prague in September 1962 (Praga 1963), str. 229–242.

[16] S. K. Zaremba, *O równaniach paratyngensowych*, Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego 9(1935).