wmptm 1897

ANDRZEJ PLIŚ (Kraków)

Metoda topologiczna badania przebiegu rozwiązań równań różniczkowych

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Wielu matematyków krajowych i zagranicznych opierało badania przebiegu rozwiązań równań różniczkowych na metodzie topologicznej T. Ważewskiego lub zajmowało się różnymi jej wariantami. Niemniej istnieją jeszcze duże możliwości rozwijania i stosowania tej metody.

Dla przedstwienia tego zagadnienia rozważmy układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

o prawej stronie klasy C^1 na R^n ($x = (x_1, \ldots, x_n)$), oraz podzbiór otwarty Q przestrzeni R^n.

Podamy teraz pewne definicje. Jeżeli dla jakiegoś punktu p brzegu zbioru Q istnieje liczba dodatnia r oraz rozwiązanie $x(t)$, takie że $x(0) = p$, $x(t) \in Q$, dla $-r < t < 0$, to mówimy, że punkt p jest *punktem wyjścia*. Jeżeli ponadto $x(t) \notin \overline{Q}$ dla $0 < t < r$, to mówimy, że punkt p jest *punktem ścisłego wejścia*. Analogicznie możemy określić *punkty wejścia* i *ścisłego wejścia*.

Podstawą metody topologicznej jest fakt, że z zachowania się układu (1) lub funkcji $f(x)$ na brzegu Q można często otrzymać pewne wnioski o przebiegu rozwiązań wewnątrz Q. Oczywista jest własność pozostawania wszystkich rozwiązań wychodzących z punktów zbioru Q w zbiorze Q, jeżeli brzeg Q nie zawiera punktów wyjścia. W innych przypadkach efekt już nie jest tak prosty.

Oznaczmy przez A podzbiór Q złożony z punktów, przez które przechodzą całki nie pozostające w Q. Każdemu punktowi y zbioru A można przyporządkować punkt wyjścia $c(y)$ (należący do brzegu Q); mianowicie rozważmy całkę $x(t)$ spełniającą warunek $x(0) = y$. Wobec tego, że całka $x(t)$ nie pozostaje w Q, istnieje liczba dodatnia s, taka że $x(s) \notin Q$. Oznaczmy przez u minimum takich liczb. Łatwo zauważyć, że $x(u)$ jest punktem wyjścia. Kładziemy $c(y) = x(u)$. Jeżeli punkt $c(y)$ jest punktem ścisłego wyjścia, funkcja $c(y)$ jest ciągła w y. Rozszerzmy funkcję $c(y)$ na punkty wyjścia, kładąc dla nich $c(y) = y$. W ten sposób określona funkcja $c(y)$ jest ciągła na zbiorze $A \cup S$, gdzie S jest zbiorem punktów wyjścia, i realizuje retrakcję zbioru $A \cup S$ na S, jeżeli jest spełnione założenie, że każdy punkt wyjścia jest punktem ścisłego wyjścia. Od tego miejsca przyjmujemy, że założenie to jest spełnione. Funkcja $c(y)$ realizuje w szczególności retrakcję zbioru $Z \cup S$, gdzie Z jest dowolnym podzbiorem zbioru A na zbiór S. Wynika stąd, że jeżeli taka retrakcja nie istnieje, to istnieje punkt zbioru Z, przez który przechodzi całka pozostająca w zbiorze Q. Mamy więc istnienie całki pozostającej w danym zbiorze, jeżeli sprawdzimy, że zbiór S nie jest retraktem topologicznym stosowanego zbioru. Własność ta jest podstawą metody topologicznej T. Ważewskiego.

W wielu pracach metoda T. Ważewskiego była stosowana do zagadnień asymptotycznych dla równań z perturbacją. Typowe postępowanie w tych pracach, którego idea znajduje się już w pracy Ważewskiego([1]) z 1947 r., przedstawia się następująco. Dla układu równań U, w jakimś sensie prostej postaci, często o znanych rozwiązaniach (np. liniowego o stałych współczynnikach), konstruujemy zbiór Q (zgodnie z badanym warunkiem asymptotycznym) i rodzinę zbiorów Z (mogącą redukować się do jednego zbioru), w ten sposób, że zbiór Q i dowolny zbiór Z tej rodziny mają już wspomniane własności względem układu U. Przy pewnych założeniach układ U i dostatecznie mu bliski (w odpowiednim sensie) układ równań różniczkowych W mają identyczne zbiory punktów wyjścia oraz silnego wyjścia. Do układu W (zbioru Q i rodziny zbiorów Z) możemy więc zastosować metodę topologiczną T. Ważewskiego i otrzymać istnienie rozwiązań asymptotycznych (pozostających w Q).

Stosowanie metody topologicznej do różnych zagadnień asymptotycznych okazało się dobrym materiałem do szkolenia specjalistów w równaniach różniczkowych zwyczajnych. Stosowanie metody topologicznej w konkretnym przypadku wymagało z jednej strony pokonania trudności analitycznych, z drugiej strony dawało pole do okazania pomysłowości w dobieraniu zbiorów Q i Z.

JACEK SZARSKI (Kraków)

Nierówności różniczkowe i równania cząstkowe pierwszego rzędu w spuściźnie naukowej Tadeusza Ważewskiego

Tadeusz Ważewski ugruntował podstawy teorii układów nierówności różniczkowych zwyczajnych i jako pierwszy stosował tę teorię systematycznie w zagadnieniach jednoznaczności i istnienia oraz oceny obszaru istnienia rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych pierwszego rzędu.

W celu uproszczenia sformułowań twierdzeń, w dalszym ciągu naszych rozważań wprowadzimy dwie definicje.

Dla dwóch punktów $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ i ustalonego wskaźnika j przyjmujemy następujące oznaczenie

$$x \overset{j}{\leqslant} y \Leftrightarrow x_k \leqslant y_k \quad (k \neq j),\ x_j = y_j.$$

O ciągu funkcji $\sigma_j(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, n)$ określonych w zbiorze D powiemy, że spełnia *warunek monotoniczności* V_+, jeżeli dla każdego j funkcja σ_j jest rosnąca (słabo) względem każdej zmiennej $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ z osobna.

Powiemy natomiast, że wspomniany ciąg spełnia *warunek* W_+, jeśli dla każdego

([1]) T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), str. 279–313.