Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

W wielu pracach metoda T. Ważewskiego była stosowana do zagadnień asymptotycznych dla równań z perturbacją. Typowe postępowanie w tych pracach, którego idea znajduje się już w pracy Ważewskiego([1]) z 1947 r., przedstawia się następująco. Dla układu równań U, w jakimś sensie prostej postaci, często o znanych rozwiązaniach (np. liniowego o stałych współczynnikach), konstruujemy zbiór Q (zgodnie z badanym warunkiem asymptotycznym) i rodzinę zbiorów Z (mogącą redukować się do jednego zbioru), w ten sposób, że zbiór Q i dowolny zbiór Z tej rodziny mają już wspomniane własności względem układu U. Przy pewnych założeniach układ U i dostatecznie mu bliski (w odpowiednim sensie) układ równań różniczkowych W mają identyczne zbiory punktów wyjścia oraz silnego wyjścia. Do układu W (zbioru Q i rodziny zbiorów Z) możemy więc zastosować metodę topologiczną T. Ważewskiego i otrzymać istnienie rozwiązań asymptotycznych (pozostających w Q).

Stosowanie metody topologicznej do różnych zagadnień asymptotycznych okazało się dobrym materiałem do szkolenia specjalistów w równaniach różniczkowych zwyczajnych. Stosowanie metody topologicznej w konkretnym przypadku wymagało z jednej strony pokonania trudności analitycznych, z drugiej strony dawało pole do okazania pomysłowości w dobieraniu zbiorów Q i Z.

JACEK SZARSKI (Kraków)

Nierówności różniczkowe i równania cząstkowe pierwszego rzędu w spuściźnie naukowej Tadeusza Ważewskiego

Tadeusz Ważewski ugruntował podstawy teorii układów nierówności różniczkowych zwyczajnych i jako pierwszy stosował tę teorię systematycznie w zagadnieniach jednoznaczności i istnienia oraz oceny obszaru istnienia rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych pierwszego rzędu.

W celu uproszczenia sformułowań twierdzeń, w dalszym ciągu naszych rozważań wprowadzimy dwie definicje.

Dla dwóch punktów $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ i ustalonego wskaźnika j przyjmujemy następujące oznaczenie

$$x \overset{j}{\leqslant} y \Leftrightarrow x_k \leqslant y_k \quad (k \neq j),\ x_j = y_j.$$

O ciągu funkcji $\sigma_j(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, n)$ określonych w zbiorze D powiemy, że spełnia *warunek monotoniczności* V_+, jeżeli dla każdego j funkcja σ_j jest rosnąca (słabo) względem każdej zmiennej $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ z osobna.

Powiemy natomiast, że wspomniany ciąg spełnia *warunek* W_+, jeśli dla każdego

([1]) T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), str. 279–313.

j zachodzi implikacja

$$(t, x) \in D, \quad (t, y) \in D, \quad x \overset{j}{\leqslant} y \Rightarrow \sigma_j(t, x) \leqslant \sigma_j(t, y).$$

Jest oczywiste, że warunek W_+ implikuje warunek V_+, natomiast proste przykłady wskazują na to, że warunek W_+ jest dla $n > 2$ istotnie mocniejszy od warunku V_+. Zauważmy również, że w przypadku $n = 1$ warunek W_+ (a więc i V_+) jest w sposób trywialny spełniony.

Ważewski zwrócił uwagę na rolę warunku W_+ w teorii układów nierówności różniczkowych oraz na fakt, że pewne twierdzenia tej teorii, formułowane poprzednio z warunkiem V_+ w założeniach, są fałszywe.

Przytoczymy tu następujące twierdzenie Ważewskiego [5] oraz wnioski z niego wynikające.

TWIERDZENIE 1. *Załóżmy, że prawe strony układu równań różniczkowych zwyczajnych*

$$dx_i/dt = \sigma_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

są ciągłe w zbiorze otwartym D i spełniają warunek W_+. Niech $(0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$.

Wówczas istnieje docierająca prawym końcem do brzegu D (tzn. nie zawierająca się w podzbiorze zwartym zbioru D) całka górna w prawo, wychodząca z punktu $(0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Oznaczmy ją przez $x_i = \omega_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, a jej przedział istnienia przez $\Delta = [0, a)$. Całka ta ma następującą własność: jeśli funkcje $x_i(t)$ są ciągłe w przedziale Δ, spełniają nierówności początkowe

$$x_i(0) \leqslant x_i^0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

oraz nierówności różniczkowe

$$D_+ x_i(t) \leqslant \sigma_i\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) \quad (i = 1, \ldots, n), \ t \in \Delta, \tag{2}$$

to

$$x_i(t) \leqslant \omega_i(t) \quad (i = 1, \ldots, n), \ t \in \Delta. \tag{3}$$

Jeśli dla $n > 2$ warunek W_+ zastąpi się słabszym warunkiem V_+, to wprawdzie całka górna w prawo istnieje w dostatecznie małym przedziale Δ, oraz nierówności (3) są spełnione pod warunkiem, że punkt $\big(x_1(0), \ldots, x_n(0)\big)$ jest dostatecznie bliski punktu $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, natomiast — jak pokazują podane przez Ważewskiego kontrprzykłady [5] — w przypadku tym: 1° całka górna w prawo może nie dać się przedłużyć jako całka górna do brzegu D, oraz 2° nierówność (3) może nie zachodzić w żadnym punkcie przedziału Δ.

Z twierdzenia 1 wynika następujące [5]

TWIERDZENIE 2. *Jeśli przy założeniach twierdzenia 1 o prawych stronach układu (1) przyjmiemy, że funkcje $x_i(t)$ są ciągłe w przedziale $\Delta_1 = (-a, a)$, spełniają nierówności początkowe*

$$|x_i(0)| \leqslant x_i^0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

oraz nierówności różniczkowe

$$|D_+ x_i(t)| \leqslant \sigma_i(|t|, |x_1(t)|, \ldots, |x_n(t)|), \quad t \in \Delta_1 \ (i = 1, \ldots, n),$$

to

$$|x_i(t)| \leqslant \omega_i(|t|), \quad t \in \Delta_1 \ (i = 1, \ldots, n).$$

Z twierdzenia 2 uzyskuje się natychmiast jako wniosek twierdzenie o ocenie różnicy dwóch całek układu równań różniczkowych zwyczajnych [5].

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli prawe strony układu równań*

$$dx_i/dt = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

spełniają warunek

$$|f_i(t, x_1, \ldots, x_n) - f_i(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant \sigma_i(|t|, |x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|), \tag{5}$$

a $(x_1(t), \ldots, x_n(t)), (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ *są dwoma całkami układu* (4) *w przedziale* Δ_1, *spełniającymi nierówności początkowe*

$$|x_i(0) - y_i(0)| \leqslant x_i^0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

to przy założeniach twierdzenia 1 *o prawych stronach układu* (1) (*porównawczego*) *zachodzą nierówności*

$$|x_i(t) - y_i(t)| \leqslant \omega_i(|t|), \quad t \in \Delta_1 \ (i = 1, \ldots, n).$$

Z ostatniego twierdzenia otrzymuje się [5] bardzo ogólne kryteria jednoznaczności rozwiązania problemu początkowego dla układu równań (4). Jeśli mianowicie założy się, że jest spełniony warunek (5) oraz że jedyne rozwiązanie układu (1) (porównawczego), wychodzące w prawo z punktu $(0, 0, \ldots, 0)$ znika identycznie (całka górna w prawo wychodząca z tego punktu znika więc identycznie), to dwie całki układu (4) w przedziale Δ_1, spełniające w punkcie 0 te same warunki początkowe, są identyczne w Δ_1. W oparciu o twierdzenie 2 można także szacować całki układu równań (4) oraz przedziały ich istnienia [5].

Analogon twierdzenia 3 uzyskany przez Tadeusza Ważewskiego [3] dla układu przekątniowego (tj. takiego, że i-te równanie zawiera pochodne tylko i-tej funkcji) równań cząstkowych pierwszego rzędu brzmi następująco:

TWIERDZENIE 4. *Załóżmy, że prawe strony układu równań cząstkowych*

$$u_x^i = f^i(x, y_1, \ldots, y_m, u^1, \ldots, u^n, u_{y_1}^i, \ldots, u_{y_m}^i) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

spełniają warunek

$$|f^i(x, y_1, \ldots, y_m, u^1, \ldots, u^n, p_1, \ldots, p_m) - f^i(x, y_1, \ldots, y_m, v^1, \ldots, v^n, q_1, \ldots, q_m)|,$$

$$\sigma_i(|x|, |u^1 - v^1|, \ldots, |u^n - v^n|) + M \sum_{j=1}^{m} |p_j - q_j|.$$

Niech $u^i(x, y_1, \ldots, y_m)$ *oraz* $v^i(x, y_1, \ldots, y_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *będą dwoma rozwiązaniami układu* (6), *klasy* C^1 *w zbiorze*

$$|x| < a, \quad |y_j| \leqslant b_j - M|x| \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{7}$$

spełniającymi nierówności początkowe

$$|u^i(0, y_1, \ldots, y_m) - v^i(0, y_1, \ldots, y_m)| \leqslant x_i^0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Wówczas przy założeniach i oznaczeniach twierdzenia 1 *zachodzą w zbiorze* (7) *nierówności*

$$|u^i(x, y_1, \ldots, y_m) - v^i(x, y_1, \ldots, y_m)| \leqslant \omega_i(|x|) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Z twierdzenia tego uzyskuje się, podobnie jak dla równań różniczkowych zwyczajnych, bardzo ogólne kryteria jednoznaczności rozwiązania problemu początkowego dla układu postaci (6). W tym miejscu wypada podkreślić, że Ważewski po raz pierwszy wyróżnił klasę układów przekątniowych jako tych, dla których przy słabych założeniach o prawych stronach ma miejsce jednoznaczność rozwiązania klasy C^1 problemu początkowego.

Teoria nierówności różniczkowych zwyczajnych zawdzięcza Ważewskiemu wersję „naskórkową" [6] tej części tezy twierdzenia 1, która dotyczy nierówności różniczkowych (2) w przypadku $n = 1$. Wersja ta została uogólniona dla dowolnego n przez W. Mlaka.

Nazwijmy mianowicie „naskórkiem" o grubości $\varepsilon > 0$ całki $x_1 = \omega_1(t)$ zbiór

$$N = \{(t, x_1): t \in \Delta, x_1 \in (\omega_1(t), \omega_1(t) + \varepsilon)\}$$

oraz połóżmy

$$E = \{t \in \Delta: (t, x_1(t)) \in N\}.$$

Otóż, jeśli założymy, że nierówność różniczkowa (2) przy $n = 1$ zachodzi w zbiorze E, to teza (3) twierdzenia 1 utrzymuje się. Innymi słowy, w twierdzeniu 1 wystarczy założyć, że nierówność różniczkowa (2) jest spełniona w tych punktach przedziału Δ, dla których krzywa $x_1 = x_1(t)$ zawiera się w „naskórku" całki górnej $x_1 = \omega_1(t)$.

Na zakończenie omówimy podstawowe wyniki Tadeusza Ważewskiego dotyczące oceny obszaru istnienia rozwiązania problemu początkowego dla równań cząstkowych pierwszego rzędu.

Zacznijmy od jednego równania

$$u_x = f(x, y_1, \ldots, y_m, u, u_{y_1}, \ldots, u_{y_m}) \tag{8}$$

z warunkiem początkowym

$$u(0, y_1, \ldots, y_m) = c(y_1, \ldots, y_m) \tag{9}$$

przy założeniu, że prawa strona równania i funkcja początkowa są klasy C^1, a ich pierwsze pochodne spełniają warunek Lipschitza.

Konstrukcja rozwiązania problemu (8), (9) za pomocą metody charakterystyk Cauchy'ego przebiega — jak wiadomo — następująco. Rozważa się układ równań różniczkowych zwyczajnych, określających wstęgi charakterystyczne równania (8)

$$dy_j/dx = -f_{q_j}, \quad dz/dx = f - \sum_{j=1}^{m} q_j f_{q_j}, \quad dq_j/dx = f_{y_j} + q_j f_z \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{10}$$

Oznaczmy przez

$$y_j = y_j(x, \eta_1, \ldots, \eta_m), \quad z = z(x, \eta_1, \ldots, \eta_m), \quad q_j = q_j(x, \eta_1, \ldots, \eta_m)$$

całkę układu (10) spełniającą warunki początkowe

$$y_j(0, \eta_1, \ldots, \eta_m) = \eta_j, \quad z(0, \eta_1, \ldots, \eta_m) = c(\eta_1, \ldots, \eta_m),$$
$$q_j(0, \eta_1, \ldots, \eta_m) = c_{y_j}(\eta_1, \ldots, \eta_m) \quad (j = 1, \ldots, m)$$

i weźmy pod uwagę transformację

$$(11) \qquad \begin{aligned} y_j &= y_j(x, \eta_1, \ldots, \eta_m) \quad (j = 1, \ldots, m) \\ x &= x. \end{aligned}$$

Jak wiadomo, jeśli V oznacza obszar, w którym transformacja (11) jest klasy C^1, odwracalna i ma jakobian różny od zera, jeśli dalej U jest obrazem V poprzez transformację (11), a

$$\eta_j = \eta_j(x, y_1, \ldots, y_m) \quad (j = 1, \ldots, m), \qquad x = x,$$

jest transformacją odwrotną, wówczas funkcja

$$u(x, y_1, \ldots, y_m) = z\big(x, \eta_1(x, y_1, \ldots, y_m), \ldots, \eta_m(x, y_1, \ldots, y_m)\big)$$

jest w obszarze U rozwiązaniem klasy C^1 problemu (8), (9).

Otóż Ważewski, wykorzystując systematycznie metodę nierówności różniczkowych zwyczajnych, oszacował [1], [4] obszary V i U, a w szczególności ten ostatni jako zbiór postaci (7). W ten sposób uzyskał twierdzenie o istnieniu oraz ocenę obszaru istnienia rozwiązania problemu (8), (9) przy wymienionych wyżej słabych założeniach regularności prawej strony równania i funkcji początkowej.

Wynik ten uogólnił Ważewski [2] na układy przekątniowe (6) z warunkami początkowymi

$$(12) \qquad u^i(0, y_1, \ldots, y_m) = c^i(y_1, \ldots, y_m) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Problem (6), (12) rozwiązał Ważewski określając w następujący sposób kolejne przybliżenia

$$u^{i0}(x, y_1, \ldots, y_m) = c^i(y_1, \ldots, y_m) \quad (i = 1, \ldots, n),$$
$$u^{ik}_x = f^i(x, y_1, \ldots, y_m, u^{1,k-1}, \ldots, u^{n,k-1}, u^{ik}_{y_1}, \ldots, u^{ik}_{y_m}),$$
$$u^{ik}(0, y_1, \ldots, y_m) = c^i(y_1, \ldots, y_m) \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Jak widać, dla wyznaczenia k-tego przybliżenia mamy do rozwiązania m równań, z których każde zawiera tylko jedną funkcję niewiadomą i do którego stosuje się poprzednio omówione twierdzenie.

Twierdzenie Tadeusza Ważewskiego dotyczące istnienia i oceny obszaru istnienia rozwiązania problemu (6), (12) było pierwszym wynikiem tego typu w odniesieniu do układów równań cząstkowych pierwszego rzędu.

Prace cytowane

[1] T. Ważewski, *Sur l'appréciattion du domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Soc. Polon. Math. 14 (1935), str. 149–175.

[2] — *Sur le problème de Cauchy relatif à un système d'équations aux dérivées partielles*, ibidem 15 (1936), str. 101–127.

[3] — *Sur l'unicité et la limitation des intégrales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Mat. Pura Appl., Ser. IV, 15 (1937), str. 155–158.

[4] — *Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Z. 43 (1938), str. 522–532.

[5] — *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Polon. Math. 23 (1950), str. 112–166.

[6] — *Certaines propositions de caractère „épidermique" relatives aux inégalités différentielles*, ibidem 24 (1952), str. 1–12.

ANDRZEJ LASOTA (Kraków)

Odwzorowania otwarte w dowodach twierdzeń o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych

Zastosowanie metod topologicznych w teorii równań różniczkowych ma długą i piękną historię. Jednym z ważnych etapów tej teorii była metoda retraktowa Ważewskiego, która znajduje dziś coraz szersze zastosowanie. Ale na seminarium Profesora Ważewskiego można się było nauczyć nie tylko Jego metody. Starał się On, aby każdy z nas umiał patrzeć na równania różniczkowe z możliwie ogólnego punktu widzenia, dysponując całym bogatym arsenałem środków topologicznych. O możliwości zastosowania twierdzenia o odwzorowaniach otwartych w teorii problemów brzegowych miałem możność dyskutowania z Profesorem Ważewskim wielokrotnie. W krótkim referacie nie sposób streścić tych dyskusji i nie sposób przytoczyć listy choćby najważniejszych wyników. Postaram się tylko pokazać na kilku przykładach, w jaki sposób „mało egzystencjalne" twierdzenie topologiczne może być źródłem konkretnych rezultatów dotyczących istnienia rozwiązań równań różniczkowych.

Dla przestrzeni Banacha twierdzenie o odwzorowaniach otwartych można sformułować następująco: Niech T: $\Omega \to E$ ($\Omega \subset E$, E przestrzeń Banacha) będzie odwzorowaniem ciągłym i zwartym. Jeżeli zbiór Ω jest otwarty, a odwzorowanie

$$\Omega \ni x \to \Phi(x) = x - T(x) \in E$$

jest różnowartościowe, to zbiór $\Phi(\Omega)$ jest również otwarty. Przypomnijmy, że odwzorowanie T nazywa się *zwarte*, jeżeli dla każdego zbioru ograniczonego $S \subset \Omega$ domknięcie zbioru $T(S)$ jest zwarte. Oczywiście w przypadku, gdy E jest przestrzenią skończenie wymiarową, każde odwzorowanie ciągłe jest równocześnie zwarte.