wmptm 1897

Prace cytowane

[1] T. Ważewski, *Sur l'appréciattion du domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Soc. Polon. Math. 14 (1935), str. 149–175.

[2] — *Sur le problème de Cauchy relatif à un système d'équations aux dérivées partielles*, ibidem 15 (1936), str. 101–127.

[3] — *Sur l'unicité et la limitation des intégrales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Mat. Pura Appl., Ser. IV, 15 (1937), str. 155–158.

[4] — *Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Z. 43 (1938), str. 522–532.

[5] — *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Polon. Math. 23 (1950), str. 112–166.

[6] — *Certaines propositions de caractère „épidermique" relatives aux inégalités différentielles*, ibidem 24 (1952), str. 1–12.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ANDRZEJ LASOTA (Kraków)

Odwzorowania otwarte w dowodach twierdzeń o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych

Zastosowanie metod topologicznych w teorii równań różniczkowych ma długą i piękną historię. Jednym z ważnych etapów tej teorii była metoda retraktowa Ważewskiego, która znajduje dziś coraz szersze zastosowanie. Ale na seminarium Profesora Ważewskiego można się było nauczyć nie tylko Jego metody. Starał się On, aby każdy z nas umiał patrzeć na równania różniczkowe z możliwie ogólnego punktu widzenia, dysponując całym bogatym arsenałem środków topologicznych. O możliwości zastosowania twierdzenia o odwzorowaniach otwartych w teorii problemów brzegowych miałem możność dyskutowania z Profesorem Ważewskim wielokrotnie. W krótkim referacie nie sposób streścić tych dyskusji i nie sposób przytoczyć listy choćby najważniejszych wyników. Postaram się tylko pokazać na kilku przykładach, w jaki sposób „mało egzystencjalne" twierdzenie topologiczne może być źródłem konkretnych rezultatów dotyczących istnienia rozwiązań równań różniczkowych.

Dla przestrzeni Banacha twierdzenie o odwzorowaniach otwartych można sformułować następująco: Niech $T\colon \Omega \to E$ ($\Omega \subset E$, E przestrzeń Banacha) będzie odwzorowaniem ciągłym i zwartym. Jeżeli zbiór Ω jest otwarty, a odwzorowanie

$$\Omega \ni x \to \Phi(x) = x - T(x) \in E$$

jest różnowartościowe, to zbiór $\Phi(\Omega)$ jest również otwarty. Przypomnijmy, że odwzorowanie T nazywa się *zwarte*, jeżeli dla każdego zbioru ograniczonego $S \subset \Omega$ domknięcie zbioru $T(S)$ jest zwarte. Oczywiście w przypadku, gdy E jest przestrzenią skończenie wymiarową, każde odwzorowanie ciągłe jest równocześnie zwarte.

Aby zilustrować sposób, w jaki twierdzenie o odwzorowaniach otwartych można stosować w dowodach twierdzeń o istnieniu rozwiązań, zaczniemy od przykładu spoza teorii równań różniczkowych. Rozważmy równanie

$$x = Ax+b, \tag{1}$$

gdzie A jest liniowym i zwartym odwzorowaniem przestrzeni Banacha E w siebie. Klasyczne twierdzenie Riesza–Fredholma powiada, że równanie (1) ma dla każdego $b \in E$ dokładnie jedno rozwiązanie, jeżeli tylko równanie jednorodne

$$x = Ax \tag{2}$$

ma wyłącznie rozwiązanie zerowe. Podamy dowód tego twierdzenia. Z liniowości operatora A i jednoznaczności rozwiązań równania (2) wynika, że odwzorowanie

$$x \to \Phi(x) = x-Ax$$

jest różnowartościowe. Zgodnie z twierdzeniem o odwzorowaniach otwartych zbiór $\Phi(E)$ jest otwarty. Z drugiej strony $\Phi(E)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni E, ponieważ Φ jest operatorem liniowym. Jedyną (niepustą) podprzestrzenią liniową E, która jest równocześnie zbiorem otwartym w E jest cała przestrzeń E; jest zatem $\Phi(E) = E$. Dla każdego $b \in E$ istnieje więc dokładnie jedno $x \in E$ takie, że $\Phi(x) = b$, co kończy dowód.

Przejdziemy teraz do teorii równań różniczkowych. Rozpatrzmy układ

$$x' = f(t, x), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{3}$$

z warunkiem brzegowym

$$Ax(a) + Bx(b) = r, \tag{4}$$

gdzie $r, x(t), f(t, x)$ są n wymiarowymi wektorami, a A i B macierzami kwadratowymi wymiaru $n \times n$ o współczynnikach stałych. Przyjmiemy, że funkcja f: $[a, b] \times R^n \to R^n$ jest ciągła i taka, że spełniony jest następujący warunek regularności ze względu na problem początkowy Cauchy'ego:

(C) Dla każdego punktu $(t_0, r_0) \in [a, b] \times R^n$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (3) określone w przedziale $[a, b]$ i takie, że $x(t_0) = r_0$.

Problem brzegowy (3)–(4) będziemy rozważali przy ustalonej funkcji f i dla macierzy A, B należących do pewnych zbiorów w przestrzeni $R^{n \times n}$ oznaczonych odpowiednio przez $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$. Zachodzi następujące

TWIERDZENIE 1. *Niech dana będzie trójka* $(f, \mathscr{A}, \mathscr{B})$ *taka, że* f *spełnia warunek* (C) *i przynajmniej jeden ze zbiorów* $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ *jest otwarty. Jeżeli dla każdego zespołu* $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$, $r \in R^n$ *problem* (3)–(4) *ma co najwyżej jedno rozwiązanie, to dla wszystkich* $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$ *oraz* $r \in R^n$ *problem* (3)–(4) *ma dokładnie jedno rozwiązanie.*

Twierdzenie to przypomina alternatywę Fredholma, ale dotyczy równania nieliniowego. Podamy ideę dowodu. Załóżmy, że zbiór $\mathscr{A}$ jest otwarty, ustalmy A, B i rozpatrzmy odwzorowanie $q \to u(q)$ dane wzorem

$$u(q) = Ax(a, q)+Bx(b, q),$$

gdzie $x(\cdot, q)$ oznacza rozwiązanie równania (3) spełniające warunek początkowy $x(a, q) = q$. Z klasycznych twierdzeń o ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych wynika, że u jest odwzorowaniem ciągłym. Z jednoznaczności problemu (3)–(4) wynika, że u jest różnowartościowe. Zbiór $u(R^n)$ jest więc otwarty. Jeżeli $u(R^n) = R^n$, to dla każdego $r \in R^n$ istnieje dokładnie jedno $q \in R^n$ takie, że $u(q) = r$. Funkcja $x(\cdot, q)$ jest wówczas szukanym rozwiązaniem problemu (3)–(4). Jeżeli $u(R^n) \neq R^n$, to jak łatwo pokazać, istnieją „dowolnie bliskie" punkty $r_1 = u(q_1)$, $r_2 = u(q_2)$ odpowiadające „odległym" punktom q_1, q_2 ($|q_1 - q_2| \geqslant 1$). Korzystając z otwartości zbioru $\mathscr{A}$ można wówczas znaleźć macierz $\tilde{A} \in \mathscr{A}$ „bliską" A i taką, że $x(\cdot, q_1)$ i $x(\cdot, q_2)$ spełniają ten sam warunek brzegowy (4) odpowiednio z macierzami $\tilde{A}$ i B. To ostatnie jest sprzeczne z jednoznacznością problemu (3)–(4), ponieważ $x(\cdot, q_1)$ i $x(\cdot, q_2)$ są dwoma różnymi rozwiązaniami równania (3). Przypadek $u(R^n) \neq R^n$ jest więc niemożliwy, co kończy dowód.

Twierdzenie 1 przenosi się na inne typy równań i problemów brzegowych. Zamiast (3) można na przykład rozpatrywać równanie z opóźnionym parametrem

$$x'(t) = f\big(t, x(t-h)\big). \tag{3'}$$

Wypowiedź jest wówczas jeszcze prostsza, bo nie jest potrzebny warunek (C). Można również zastąpić problem brzegowy (4) przez inny, bardziej ogólny, problem postaci

$$Lx = r, \tag{4'}$$

gdzie L jest odwzorowaniem liniowym i ciągłym z przestrzeni funkcji ciągłych $x\colon [a, b] \to R^n$ w przestrzeń R^n. Zamiast zbiorów $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ rozważa się wówczas otwarty zbiór operacji liniowych.

Ciekawe (i trudne!) są próby przeniesienia twierdzenia 1 na równania wyższych rzędów. Rozpatrzmy równanie rzędu drugiego

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{5}$$

gdzie $f\colon [a, b] \times R^2 \to R$ jest ciągła i spełnia warunek

(C_1) Dla każdej trójki $(t_0, r_0, r_1) \in [a, b] \times R^2$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (5) określone na przedziale $[a, b]$ i takie, że $x(t_0) = r_0$, $x'(t_0) = r_1$.

Równanie (5) rozpatrujemy wraz z warunkiem brzegowym

$$x'(t_1) + \alpha x(t_1) = r_1, \quad x'(t_2) + \beta x(t_2) = r_2. \tag{6}$$

Mamy wówczas następujące

TWIERDZENIE 2. *Niech dana będzie para (f, S), gdzie f jest funkcją spełniającą (C_1), a S jest podzbiorem otwartym płaszczyzn R^2. Jeżeli dla każdego zespołu liczb $\alpha, \beta, t_1, t_2, r_1, r_2$ takich, że*

$$(\alpha, \beta) \in S; \quad a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b; \quad r_1, r_2 \in R,$$

problem (5)–(6) ma co najwyżej jedno rozwiązanie, to dla każdego takiego zespołu problem ten ma dokładnie jedno rozwiązanie (ważne w przedziale $[a, b]$).

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystuje się równocześnie własności odwzorowań otwartych i metodę nierówności różniczkowych.

Twierdzenia typu

$$\text{(7)} \qquad \left\{\begin{matrix}\text{Jednoznaczność}\\ \text{rozwiązań}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Istnienie}\\ \text{rozwiązań}\end{matrix}\right\}$$

są nie tylko interesujące same dla siebie. Są one wygodnym narzędziem w dowodach istnienia rozwiązań, jako że jednoznaczności dowodzi się na ogół łatwiej. Na zakończenie podamy przykład takiego zastosowania dla równania (5). Załóżmy, że funkcja $f(t, x, y)$ spełnia warunek (C_1) i jest silnie rosnąca względem zmiennej y. Udowodnimy, że dla wszystkich

$$\alpha < 0, \quad \beta > 0; \quad a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b; \quad r_1, r_2 \in R,$$

problem (5)–(6) ma dokładne jedno rozwiązanie. Ponieważ zbiór S podyktowany przez nierówności $\alpha < 0$, $\beta > 0$ jest otwarty, więc wystarczy pokazać jednoznaczność rozwiązań. Prowadzimy dowód niewprost. Niech x_1, x_2 będą dwoma różnymi rozwiązaniami problemu (5)–(6). Ze względu na warunek (C_1) nie może być $x_1 = x_2$ w przedziale $[t_1, t_2]$. Różnica $x = x_1 - x_2$ przyjmuje więc w przedziale $[t_1, t_2]$ maksimum dodatnie lub minimum ujemne. Ograniczmy się do pierwszego przypadku (dodatnie maksimum), drugi jest analogiczny. Z warunków brzegowych wynika, że

$$x'(t_1) + \alpha x(t_1) = 0, \quad x'(t_2) + \beta x(t_2) = 0.$$

Z nierówności tych wynika, że maksimum dodatnie nie może być przyjęte na końcach przedziału. Gdyby na przykład wypadło w punkcie t_1, to mielibyśmy $x'(t_1) < 0$, co jest niemożliwe. Dodatnie maksimum występuje więc we wnętrzu przedziału $[t_1, t_2]$, powiedzmy w punkcie $\bar{t}$. Mamy wtedy.

$$x(\bar{t}) > 0, \quad x'(\bar{t}) = 0, \quad x''(\bar{t}) \leqslant 0.$$

Z drugiej strony z równania (5) i monotoniczności f wynika, że

$$x''(\bar{t}) = f(\bar{t}, x_1(\bar{t}), x_1'(\bar{t})) - f(\bar{t}, x_2(\bar{t}), x_2'(\bar{t})) > 0.$$

bo $x_1(\bar{t}) > x_2(\bar{t})$ oraz $x_1'(\bar{t}) = x_2'(\bar{t})$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód jednoznaczności, a więc i dowód istnienia rozwiązań.

Zauważmy, że dowód jednoznaczności był bardzo krótki i standardowy (zasada maksimum!). Istnienie rozwiązań otrzymaliśmy przy okazji. Pierwotny dowód istnienia rozwiązań był w tym wypadku bardzo długi.

Więcej szczegółów na poruszony temat można znaleźć w monografii [1] i artykule przeglądowym [3]. Niektóre nowe rezultaty zawarte są w pracy [2].

Literatura

[1] S. Bernfeld and V. Lakshmikantham, *An introduction to non-linear boundary value problems*, Academic Press, Inc. 1974.

[2] S. N. Chow and A. Lasota, *On boundary value problems for ordinary differential equations*, J. Diff. Eq. 14 (1973), str. 326–337.

[3] A. Lasota, *Boundary value problems for second order differential equations*, Lecture Notes in Mathematics 144, Springer–Verlag 1969, str. 140–152.

ANDRZEJ PELCZAR (Kraków)

O metodzie kolejnych przybliżeń

1. Jedną z podstawowych i najprostszych metod dowodzenia twierdzeń o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych, a także równań cząstkowych pewnych typów, jest metoda kolejnych przybliżeń. Znanych jest kilka wariantów tej metody, przy czym różnice między nimi są dwojakiego typu; są to mianowicie różnice w konstrukcji ciągu kolejnych przybliżeń oraz różnice w metodach dowodów zbieżności. I tak na przykład, dla problemu Cauchy'ego

$$y' = f(x, y), \quad y(x^0) = y^0, \tag{1}$$

który przy wiadomych, stosownych założeniach o funkcji f można zastąpić równoważnie problemem

$$y(x) = y^0 + \int_{x^0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\,dt, \tag{2}$$

najbardziej znanym jest klasyczny ciąg kolejnych przybliżeń

$$y_0(x) = y^0, \quad y_n(x) = y^0 + \int_{x^0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

przy czym podstawową metodą dowodu zbieżności (jednostajnej) tego ciągu w odpowiednim przedziale do rozwiązania problemu (3) jest tak zwana metoda szeregów zbieżnych (porównawczych). Można tutaj zastosować jednak także i pewne inne metody; o jednej z nich, nie posługującej się szeregami (a przez to nadającej się dobrze do uogólnień i stosowania poza teorią równań różniczkowych, do innych problemów, dotyczących pewnych równań w ogólnych — nie koniecznie liniowych — przestrzeniach), pochodzącej od Tadeusza Ważewskiego, będzie mowa poniżej w rozdziale 2.

Oprócz wspomnianego wyżej sposobu konstrukcji ciągu kolejnych przybliżeń (3), można dla zadanego problemu Cauchy'ego konstruować ciąg kolejnych przy-