wmptm 1897

Literatura

[1] S. Bernfeld and V. Lakshmikantham, *An introduction to non-linear boundary value problems*, Academic Press, Inc. 1974.

[2] S. N. Chow and A. Lasota, *On boundary value problems for ordinary differential equations*, J. Diff. Eq. 14 (1973), str. 326–337.

[3] A. Lasota, *Boundary value problems for second order differential equations*, Lecture Notes in Mathematics 144, Springer–Verlag 1969, str. 140–152.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ANDRZEJ PELCZAR (Kraków)

O metodzie kolejnych przybliżeń

1. Jedną z podstawowych i najprostszych metod dowodzenia twierdzeń o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych, a także równań cząstkowych pewnych typów, jest metoda kolejnych przybliżeń. Znanych jest kilka wariantów tej metody, przy czym różnice między nimi są dwojakiego typu; są to mianowicie różnice w konstrukcji ciągu kolejnych przybliżeń oraz różnice w metodach dowodów zbieżności. I tak na przykład, dla problemu Cauchy'ego

$$y' = f(x, y), \quad y(x^0) = y^0, \tag{1}$$

który przy wiadomych, stosownych założeniach o funkcji f można zastąpić równoważnie problemem

$$y(x) = y^0 + \int_{x^0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\,dt, \tag{2}$$

najbardziej znanym jest klasyczny ciąg kolejnych przybliżeń

$$y_0(x) = y^0, \quad y_n(x) = y^0 + \int_{x^0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

przy czym podstawową metodą dowodu zbieżności (jednostajnej) tego ciągu w odpowiednim przedziale do rozwiązania problemu (3) jest tak zwana metoda szeregów zbieżnych (porównawczych). Można tutaj zastosować jednak także i pewne inne metody; o jednej z nich, nie posługującej się szeregami (a przez to nadającej się dobrze do uogólnień i stosowania poza teorią równań różniczkowych, do innych problemów, dotyczących pewnych równań w ogólnych — nie koniecznie liniowych — przestrzeniach), pochodzącej od Tadeusza Ważewskiego, będzie mowa poniżej w rozdziale 2.

Oprócz wspomnianego wyżej sposobu konstrukcji ciągu kolejnych przybliżeń (3), można dla zadanego problemu Cauchy'ego konstruować ciąg kolejnych przy-

bliżeń, w którym zmienia się także warunek początkowy. Taka metoda stosowana jest — z pewnymi wariantami — w dowodach pewnych twierdzeń o nierównościach różniczkowych i całkowych, a także w dowodach twierdzeń o istnieniu rozwiązań ekstremalnych.

Jeżeli funkcja $f=f(x,y)$ jest funkcją postaci $g=g(x,y,y)$, to rozważa się często ciąg kolejnych przybliżeń postaci:

$$(4)\qquad y_0(x)=y^0,\quad y_n(x)=y^0+\int_{x^0}^{x} g\big(t,y_n(t),y'_{n-1}(t)\big)\,dt,\quad n=1,2,\ldots$$

Przy pewnych założeniach o funkcji g, ciąg (4) jest szybciej zbieżny do rozwiązania (zazwyczaj jedynego, gdyż przyjmuje się na ogół założenia gwarantujące jednoznaczność rozwiązań) naszego problemu niż ciąg (3). Na temat tego wariantu metody kolejnych przybliżeń oraz szeregu jego modyfikacji (dotyczących na przykład równań typu $y'=g(x,y,y')$) opublikowano wiele wyników; na ten temat pisał też Profesor Ważewski i jego uczniowie.

Do pewnych wariantów metody kolejnych przybliżeń można zaliczyć także klasyczną metodę łamanych Eulera wraz z wieloma jej modyfikacjami, jak i również metodę Tonelliego, stosowaną przez wielu autorów w teorii równań różniczkowych zwyczajnych, cząstkowych, oraz równań z przesuniętym argumentem.

2. W niniejszym rozdziale zostanie przedstawiona w zarysie metoda Ważewskiego dowodzenia zbieżności ciągu (3) bez używania szeregów. Zajmiemy się problemem (1), który przy przyjętych przez nas założeniach będzie równoważny problemowi (2), przyjmując następujące założenia o funkcji f:

(I) f jest funkcją rzeczywistą, ciągłą w pewnym obszarze $\Omega\subset R^2$; zakładamy, że obszar Ω jest tak duży, iż są sensowne wszystkie warunki wypisane poniżej,

(II) istnieje funkcja rzeczywista ω określona w $[0,a)\times[0,\infty)$, ciągła i nieujemna, taka że

(a) $|f(x,y)-f(x,u)|\leqslant\omega(x,|y-u|)$,

(b) $u\leqslant v\Rightarrow\omega(x,u)\leqslant\omega(x,v)$,

(c) $\omega(x,0)=0$,

(d) jedynym rozwiązaniem problemu

$$(5)\qquad u'=\omega(x,u),\quad u(0)=0,$$

określonym w $[0,a)$ jest $u\equiv 0$.

W celu sformułowania jeszcze jednego założenia wprowadzimy pewną definicję. Niech $y^0\in R$ będzie takie, że $(0,y^0)\in\Omega$.

Rozważać będziemy teraz pewną klasę $D(y^0)$ funkcji $[0,a)\to R$, określoną jak następuje: $y\in D(y^0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y\colon[0,a)\to R$ jest funkcją ciągłą i istnieje funkcja ciągła $s\colon[0,a)\to R$, taka że

$$(6)\qquad \Big|y(x)-y^0-\int_0^x f\big(t,y(t)\big)\,dt\Big|\leqslant s(x)\quad\text{dla } x\in[0,a)$$

oraz

$$\int_0^x \omega\big(t, s(t)\big)\,dt \leqslant s(x) \quad \text{dla } x \in [0, \alpha). \tag{7}$$

Zakładamy teraz, że $y^0 \in R$ jest tak wybrane, iż $(0, y^0) \in \Omega$ oraz

(III) zbiór $D(y^0)$ jest niepusty.

Uwaga. Założenie (III) jest spełnione na przykład wtedy, gdy f spełnia warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną, to znaczy gdy przyjmiemy

$$\omega(t, x) = K \cdot x, \quad \text{gdzie } K \text{ jest pewną stałą.} \tag{8}$$

TWIERDZENIE. *Przy powyższych założeniach, dla dowolnie wybranej funkcji* $y_0 \in D(y^0)$, *ciąg* $\{y_n\}$ *zdefiniowany wzorem:*

$$y_n(x) = y^0 + \int_0^x f\big(t, y_{n-1}(t)\big)\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots, \; x \in [0, \alpha), \tag{3'}$$

jest niemal jednostajnie zbieżny w $[0, \alpha)$ *do jedynego rozwiązania y problemu* (1), *gdzie położono* $x^0 = 0$.

Uwagi. To że rozważamy przypadek $x^0 = 0$ nie ma oczywiście istotnego znaczenia; twierdzenie jest — przy naturalnej modyfikacji założeń — prawdziwe dla dowolnego x^0. Istotne natomiast uproszczenie tkwi w milczącym założeniu, zrobionym implicite w odniesieniu do f i obszaru Ω (por. (I)); zakładamy mianowicie, że ciąg (3') jest określony w całym przedziale $[0, \alpha)$. Gdyby ten warunek nie zachodził, to teza odnosiłaby się do pewnego podprzedziału $[0, \alpha^0)$ przedziału $[0, \alpha)$.

Dowód twierdzenia. Przede wszystkim zauważmy, że założenie (II) daje istnienie co najwyżej jednego rozwiązania naszego problemu.

Dowód zbieżności ciągu (3') dzielimy na dwa etapy.

I. Połóżmy

$$w(x) \overset{\text{df}}{=} |y_0(x) - y_1(x)|. \tag{9}$$

Wobec tego, że $y_0 \in D(y^0)$, istnieje w_0: $[0, \alpha) \to R$, funkcja ciągła, taka że

$$w(x) \leqslant w_0(x) \tag{10}$$

oraz

$$\int_0^x \omega\big(t, w_0(t)\big)\,dt \leqslant w_0(x), \quad \text{dla } x \in [0, \alpha). \tag{11}$$

Definiujemy teraz ciąg

$$w_n(x) = \int_0^x \omega\big(t, w_{n-1}(t)\big)\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Okazuje się łatwo, że:

$$w_n(x) \leqslant w_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \; x \in [0, \alpha); \tag{13}$$

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leqslant w_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Wobec (13) i regularności w_n, ciąg (12) jest zbieżny (niemal jednostajnie w $[0, \alpha)$) do funkcji u, która jest ciągła i musi spełniać równanie

$$u(x) = \int_0^x \omega\big(t, u(t)\big)\,dt,$$

a więc na mocy (d) jest zerem w $[0, \alpha)$.

II. Niech $s_{nm}(x) \overset{\text{df}}{=} |y_n(x) - y_m(x)|$. Łatwo sprawdzić, że

$$s_{nm}(x) \leqslant \int_0^x \omega\big(t, s_{nm}(t)\big)\,dt + 2w_n(x) \quad \text{dla } n \leqslant m. \tag{15}$$

Stąd otrzymujemy

$$s_{nm}(x) \leqslant \hat{w}(x; n), \tag{16}$$

gdzie $\hat{w}(\cdot; n)$ jest rozwiązaniem maksymalnym w $[0, \alpha)$ równania

$$z(x) = \int_0^x \omega\big(t, z(t)\big)\,dt + 2w_n(x). \tag{17}$$

Nierówności (16) dowodzi się w oparciu o klasyczne wyniki z teorii nierówności różniczkowych; można też skorzystać z pewnych twierdzeń o nierównościach całkowych.

Ciąg $\{\hat{w}(\cdot; n)\}$ dąży do zera gdy $n \to \infty$ (bo $\{w_n\}$ dąży do zera). Zatem $\{s_{nm}\}$ dąży (niemal jednostajnie) do zera, gdy $n, m \to \infty$. Stąd wynika, że ciąg $\{y_n\}$ jest zbieżny niemal jednostajnie. Jego granica musi być rozwiązaniem naszego problemu. W ten sposób dowód został zakończony.

Uwaga. Podane powyżej twierdzenie można na szereg sposobów uogólnić. W szczególności można przyjąć nieco inne założenia niż koniunkcja warunków (II)–(e) i (III); T. Ważewski wypowiedział jedno z takich założeń przy użyciu tak zwanego elementu kontrakcji. Można też zakładać zamiast (II)–(d), jednoznaczność rozwiązania pewnego równania całkowego lub nierówności całkowej, w stosownych klasach funkcji.

Zaprezentowana tutaj wersja twierdzenia o zbieżności ciągu (3′) bez użycia szeregów miała zilustrować jedynie zasadniczą ideę metody i nie może pretendować do miana najogólniejszej.

Przedstawiona wyżej, jedna z kilku klasycznych już w tej chwili, wersja metody Ważewskiego dowodu zbieżności (3′) bez używania szeregów, może być z powodzeniem stosowana — po stosownym zmodyfikowaniu — w teorii równań cząstkowych typu hiperbolicznego, w teorii równań z przesuniętym argumentem, a także poza teorią równań różniczkowych. Na ten temat ukazało się już co najmniej kilkadziesiąt prac różnych autorów. Zasadnicza idea tej metody została przedstawiona przez Tadeusza Ważewskiego w dwu pracach opublikowanych w Biuletynie P. A. N. w 1960 r. (tom 8, no 1 (1960), str. 43–46 i 47–52).

3. Na zakończenie wypada dodać jeszcze kilka uwag na temat jednoznaczności rozwiązań, wiążącej się — jak to widać na wielu klasycznych przykładach — z zagadnieniem związku między zbieżnością ciągu kolejnych przybliżeń a zbieżnością do zera ciągu różnic dwu kolejnych wyrazów ciągu kolejnych przybliżeń. Jeśli zanalizujemy dokładnie rozumowanie przedstawione w rozdziale 2 i wyizolujemy stosowny fragment, to okaże się, że można by, po nieznacznej zmianie założeń i po odpowiednim ich przeformułowaniu, uzyskać zbieżność ciągu kolejnych przybliżeń w oparciu o jednoznaczność rozwiązania (to znaczy przy założeniu, że istnieje co najwyżej jedno rozwiązanie) i o zbieżność do zera ciągu $\{|y_n - y_{n-1}|\}$. Obserwacja ta związana jest z ogólniejszą uwagą. Można mianowicie wykazać, że przy stosownych założeniach dotyczących regularności i ograniczoności funkcji f, oraz przy założeniu jednoznaczności rozwiązań, zachodzi następująca równoważność: $\{|y_n - y_{n-1}|\}$ zmierza jednostajnie do zera wtedy i tylko wtedy, gdy $\{y_n\}$ zmierza jednostajnie do (jedynego) rozwiązania naszego problemu. Idea dowodu tej uwagi polega na wykorzystaniu twierdzenia Arzeli. Dokładne prześledzenie tej kwestii znaleźć można w pracy J. Dieudonnégo (Bull. Sci. Math. 69 (1945), str. 62–72). Problem ten w przestrzeniach Banacha został szczegółowo potraktowany przez Tadeusza Ważewskiego w pracy opublikowanej w Ann. Polon. Math. w 1965 r. (tom 16 (1965), str. 231–235). Zostały tam podane warunki wystarczające dla tego, by zachodziła równoważność wspomniana wyżej; warunki te nie implikują zbieżności ciągu $\{y_n\}$.