ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XX (1976)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Zadania

Wszelką korespondencję dotyczącą zadań (rozwiązania zadań, nowe zadania itp.) należy kierować pod adresem: Piotr Mankiewicz, Instytut Matematyczny PAN, skr. poczt. 137, 00-950 Warszawa, ul. Śniadeckich 8. Ciekawsze rozwiązania będą publikowane.

241. Zbadać dla jakich liczb naturalnych n krata dzielników liczby n jest algebrą Boole'a.

W. Mnich (Opole)

242. Addytywna półgrupa abelowa S ze skracaniem i mnożeniem przez liczby rzeczywiste nieujemne nazywa się *przestrzenią semiliniową* jeżeli spełnione są warunki:

$$\begin{aligned} \alpha(x+y) &= \alpha x+\alpha y \quad \text{dla } x, y \in S \text{ i } \alpha \geqslant 0, \\ (\alpha+\beta)x &= \alpha x+\beta x \quad \text{dla } x \in S \text{ i } \alpha, \beta \geqslant 0, \\ \alpha(\beta x) &= (\alpha\beta)x \quad \text{dla } x \in S \text{ i } \alpha, \beta \geqslant 0, \\ 1x &= x \quad \text{dla } x \in S. \end{aligned}$$

Udowodnić, że każda przestrzeń semiliniowa jest (kanonicznie) izomorficzna z pewnym stożkiem w odpowiedniej przestrzeni liniowej.

P. Mankiewicz (Warszawa)

243. Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniowo-topologiczną i niech G będzie grupą wszystkich homeomorfizmów X na siebie zachowujących zero. Dla każdego $h \in G$ oznaczmy przez $G(h)$ najmniejszą podgrupę G zawierającą h i spełniającą warunki:

1° $g \in G(h) \Rightarrow$ dla każdego $y \in X$, $g_y(x) = g(y+x)-g(y) \in G(h)$,

2° $g \in G(h) \Rightarrow g_-(x) = g(-x) \in G(h)$.

Udowodnić, że $G(h)$ jest grupą przemienną wtedy i tylko wtedy, gdy h jest automorfizmem liniowym.

P. Mankiewicz (Warszawa)

244. Dany jest pewien zbiór mebli M o tej własności, że w pewnym pokoju P można umieścić każdy jego skończony podzbiór. Udowodnić, że cały zbiór mebli można umieścić w tym pokoju. (Należy założyć, że meble są podzbiorami otwartymi, ograniczonymi $\boldsymbol{R}^3$, a pokój P jest podzbiorem domkniętym, ograniczonym $\boldsymbol{R}^3$.)

T. Iwaniec (Warszawa)

245. Niech $S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n\colon x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 = 1\}$ i niech $f_n(x_1, \ldots, x_n) = (\sup\{|x_i|\colon i = 1, 2, \ldots, n\})^{-2}$ dla $(x_1, \ldots, x_n) \in S^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{S^n} f_n d\mu_n = 0,$$

gdzie μ_n oznacza unormowaną powierzchniową miarę Lebesgue'a na S^n.

P. Mankiewicz (Warszawa)

246. Pokazać, że przy oznaczeniach poprzedniego zadania

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S^n} g_n d\mu_n = 0,$$

gdzie $g_n(x_1, \ldots, x_n) = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|)^{-2}$ dla $(x_1, \ldots, x_n) \in S^n$.

P. Mankiewicz (Warszawa)

Rozwiązania zadań

220. Niech przestrzeń zupełna (X, ϱ) będzie przestrzenią „małych piechurów", tzn.

$$\bigwedge_{x,y\in X} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n\in N} \bigvee_{x_1,x_2,\ldots,x_n\in X} \left[(x = x_1) \wedge (x_n = y) \wedge \left(\varrho(x_i, x_{i+1}) \leqslant \varepsilon \text{ dla } i < n\right)\right].$$

Dowieść, że jeżeli dla funkcji $f\colon X \to X$ istnieją liczby $\alpha > 0$ oraz $C < 1$ takie, że z $\varrho(x, y) \leqslant \alpha$ wynika $\varrho\big(f(x), f(y)\big) \leqslant C\varrho(x, y)$ dla dowolnych $x, y \in X$, to funkcja f ma dokładnie jeden punkt stały.

W. Holsztyński (Warszawa)

Niech $x, z \in X$. Określamy metrykę

$$\varrho_\alpha(x, z) = \inf\left\{\sum_{r=1}^{n} \varrho(x_{r-1}, x_r)\colon x_0 = x \wedge x_n = z \wedge \varrho(x_{r-1}, x_r) < \alpha \text{ dla } r \leqslant n\right\}.$$

Można łatwo sprawdzić, że ϱ_α jest metryką dla przestrzeni X, spełniającą warunki

a) $\varrho(x, z) \leqslant \varrho_\alpha(x, z)$ dla $x, z \in X$,

b) $\varrho(x, z) = \varrho_\alpha(x, z)$ gdy $\varrho(x, z) < \alpha$.

Stąd i z zupełności przestrzeni X wynika, że (X, ϱ_α) jest przestrzenią zupełną.

Niech $x, z \in X$, i niech $x_0 = x, \ldots, x_n = z$ będzie takim ciągiem, że $\varrho(x_{r-1}, x_r) \leqslant \alpha$ dla $r = 1, \ldots, n$. Wtedy

$$\varrho[f(x_{r-1}), f(x_r)] \leqslant C\varrho(x_{r-1}, x_r) \leqslant \alpha, \quad r = 1, \ldots, n.$$

Mamy dalej

$$\varrho_\alpha[f(x), f(z)] \leqslant \sum_{r=1}^{n} \varrho_\alpha[f(x_{r-1}), f(x_r)] = \sum_{r=1}^{n} \varrho[f(x_{r-1}), f(x_r)] \leqslant C \sum_{r=1}^{n} \varrho(x_{r-1}, x_r).$$

Ponieważ ciąg $x_0, \ldots, x_n$ był dowolnym ciągiem takim, że $x_0 = x_1, \ldots, x_n = z$, $\varrho(x_{r-1}, x_r) \leqslant \alpha$, dla $r = 1, \ldots, n$, więc

$$\varrho_\alpha[f(x), f(z)] \leqslant C\varrho_\alpha(x, z), \quad C < 1.$$

Istnienie i jednoznaczność punktu stałego funkcji f wynika więc ze znanego twierdzenia Banacha o punkcie stałym.

S. Czerwik (Warszawa)