wmptm 1897

Konstanty Radziszewski, *Wstęp do współczesnej geometrii różniczkowej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1973, str. 318, cena zł 45.—

Pisząc tę recenzję wyszedłem z założenia, że opinia o nowej książce naukowej powinna zawierać informację o jej treści, o stosunku do poprzednich dzieł z tej samej dziedziny i o celach, jakie sobie postawił Autor książki, a także próbę oceny w jakim stopniu i w jaki sposób cele te zostały osiągnięte.

Książka składa się ze wstępu, siedmiu rozdziałów, bibliografii zawierającej 25 pozycji, skorowidza i spisu rzeczy.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

We wstępie Autor stwierdza, że celem książki, zaadresowanej do słuchaczy II i III roku studiów matematycznych, jest „zapoznanie czytelnika z podstawowymi pojęciami i metodami współczesnej geometrii różniczkowej". Opierając się na swoim doświadczeniu dydaktycznym, Autor pragnie wprowadzać pojęcia współczesne za pomocą modeli poglądowych, na tle wykładu klasycznej geometrii różniczkowej krzywych i powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Zastrzega się, że nie może podać wszystkich współczesnych pojęć i metod, ale obiecuje taki ich zestaw, który ułatwi przyswajanie szczegółowych zagadnień geometrii różniczkowej. Biorąc pod uwagę że początkujący mają trudności z pojęciem formy różniczkowej, Autor zamierza konsekwentnie odróżniać wartość formy od niej samej, a także dla oznaczania różniczki używać „czasem innych oznaczeń zamiast symbolu d, co powinno podkreślić fakt, że jest to forma liniowa" (str. 6).

Rozdział I jest poświęcony przypomnieniu niektórych definicji i twierdzeń z algebry, analizy i topologii. Autor stara się odróżniać, także w oznaczeniach, przestrzenie (zbiory ze strukturą) od zbiorów, będących nośnikami struktury przestrzeni. Osobiście uważam, że w podręczniku geometrii różniczkowej taka pedanteria jest zbędna, chyba że np. trzeba równocześnie rozpatrywać różne topologie określone w tym samym zbiorze. Mam wrażenie, że tak samo sądzi większość matematyków; np. Kuratowski pisze: „Przez przestrzeń topologiczną rozumiemy zbiór X, ..." [5] Podobne *abus de language* stale stosuje Bourbaki. Natomiast według Radziszewskiego, „Zbiór $\tilde{V}$ nazywamy *przestrzenią topologiczną* i oznaczamy za pomocą symbolu V, ..." (str. 11). Takie sformułowanie można doprowadzić do pewnego zamętu, gdyż większość czytelników będzie skłonna zastąpić zwrot „nazywamy i oznaczamy za pomocą" przez znak równości. Zresztą, na następnej stronie, mówiąc o topologii indukowanej, Autor nie odróżnia już przestrzeni od jej nośnika. Autor definiuje rozmaitość topologiczną, ale nie wspomina o twierdzeniu Brouwera, którego znajomość jest potrzebna do tego, aby zasadnie mówić o wymiarze rozmaitości.

Przestrzenie wektorowe zdefiniowane są za pomocą zwykłej aksjomatyki, a tensory — jako odwzorowania wieloliniowe. Kolejny paragraf zawiera określenia: grupy, pierścienia, ciała, algebry, grupy topologicznej i niezmiennika. Grupa liniowa i grupa afiniczna zostały przez Autora zdefiniowane na przykładzie przestrzeni wektorowej trójwymiarowej. Następny paragraf zawiera wykład elementów geometrii afinicznej w trzech wymiarach. Autor wypowiada tu opinię, iż „Z faktu, że przekształcenie afiniczne jest homeomorfizmem wynika twierdzenie: *równoległość płaszczyzn jest pojęciem geometrii afinicznej*" (str. 47). Przy końcu paragrafu o przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej Autor nawiązuje do definicji geometrii podanej przez F. Kleina. Ostatni paragraf pierwszego rozdziału jest poświęcony analizie wektorowej w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej.

Rozdział II jest zatytułowany: Krzywe w przestrzeni euklidesowej E_3. Rozpoczyna się on od definicji relacji równoważności. Autor określa krzywą jako jednowymiarową rozmaitość topologiczną, będącą podprzestrzenią E_3. Definiuje krzywe regularne, styczną do krzywej, długość łuku i repery związane z krzywą. Dalsze paragrafy poświęcone są klasycznym tematom takim, jak krzywizna i skręcenie krzywej, płaszczyzna ściśle styczna, ewolwenta i ewoluta.

W trzecim rozdziale, zatytułowanym „Powierzchnie w przestrzeni euklidesowej E_3" Autor definiuje powierzchnie, przestrzeń styczną, orientowalność powierzchni, podstawowe formy kwadratowe oraz przedstawia inne ważne pojęcia i twierdzenia geometrii powierzchni. Zgodnie z przyjętym sposobem wykładu, Autor wprowadza przy okazji teorii powierzchni wiele pojęć ogólnych: pojęcie modułu pól wektorowych, koneksji w sensie Levi-Civita, różniczkowania kowariantnego i geodezyjnej.

We wstępie do rozdziału IV Autor zapowiada, iż zajmie się „definicją zbioru, zwanego rozmaitością różniczkowalną", dając tym samym wyraz rezygnacji z zamiaru odróżniania przestrzeni od jej podstawowego zbioru. Oprócz określenia rozmaitości, dyfeomorfizmu, zanurzenia i włożenia rozmaitości, Autor zamieszcza tu paragraf na temat żetów odwzorowań jednej rozmaitości w drugą i używa tego pojęcia do zdefiniowania wektorów i kowektorów stycznych do rozmaitości. Paragraf 3 zawiera próbę definicji pochodnej kowariantnej i koneksji liniowej oraz wiadomości na temat całkowalnych układów pól wektorowych. W dalszych częściach rozdziału Autor wykłada elementy geometrii różniczkowej przestrzeni z koneksją liniową. Siedem stron poświęca przestrzeniom Riemanna. Na końcu stwierdza, że „czasoprzestrzeń Minkowskiego ... służy jako przestrzeń geometryczna małej teorii względności".

Rozdział V dotyczy zewnętrznych form różniczkowych, zdefiniowanych jako kowariantne tensory antysymetryczne. Oprócz podstawowych definicji oraz interpretacji geometrycznej prostych k-wektorów, znajduje się tu dowód dwóch lematów na temat postaci pewnych 2-form, twierdzenie o rozkładzie jedności (bez dowodu) oraz elementy całkowania form po łańcuchach, zakończone twierdzeniem Stokesa. Na dwóch stronach znajduje się kilka definicji oraz informacji na temat grup homologii i kohomologii de Rhama, a obszerniejsze paragrafy poświęcone są pochodnej Liego oraz układom Pfaffa.

„Metoda ruchomego reperu" to tytuł szóstego rozdziału książki. W pierwszym paragrafie Autor definiuje grupę Liego i przestrzeń jednorodną. Następnie wprowadza własności przekształceń infinitezimalnych, tzn. pól wektorowych indukowanych przez działanie grup, a także podaje równania struktury dla grup i przestrzeni jednorodnych. Obszerny paragraf dotyczy samej metody reperu ruchomego. Jest on ilustrowany przykładem powierzchni w E_3.

Rozdział VII pt. „Wiązki włókniste" zawiera uzupełnienie wiadomości o grupach Liego podanych w poprzednim rozdziale. Przyjęta przez Autora definicja wiązki włóknistej jest podobna do tej, jaką można znaleźć w książce Steenroda. Główna część rozdziału poświęcona jest pojęciu i opisowi koneksji w wiązce głównej w ujęciu zbliżonym do wykładu Lichnerowicza. Książkę kończy krótka informacja o grupach holonomii.

Książka K. Radziszewskiego stanowi próbę wypełnienia luki w polskiej literaturze matematycznej, jaką jest brak podręcznika geometrii różniczkowej, przygotowującego studentów do śledzenia obecnego rozwoju tej dziedziny i do pracy własnej. Elementarna geometria różniczkowa krzywych i powierzchni została obszernie i pięknie wyłożona w dwutomowym dziele Mieczysława Biernackiego [2]. Książka Stanisława Gołąba [4] zawiera klasyczne ujęcie rachunku tensorowego w stylu zbliżonym do monografii J. A. Schoutena [6]. Dzieło Władysława Ślebodzińskiego [8] nawiązuje do idei E. Cartana, ale jeszcze nie w tej formie, jaką tym ideom nadały współczesne szkoły geometrii różniczkowej, głównie francuska i amerykańska. Oryginalny i na wysokim poziomie ścisłości *Wstęp* Romana Sikorskiego [7] jest nieodzowny dla tych, którzy interesują się podstawami geometrii różniczkowej, ale trudno go polecić osobom pragnącym się przygotować do czytania prac w *Journal of Differential Geometry*. Książka L. Auslandera i R. E. Mackenziego [1] stanowi chyba najlepsze osiągalne po polsku, wprowadzenie do teorii rozmaitości różniczkowych[1]).

W porównaniu do tej ostatniej, książka K. Radziszewskiego jest — w założeniu — przystępniejsza, zawiera spory fragment elementarnej geometrii różniczkowej, informacje o pojęciu żetu i metodzie reperu ruchomego. Ponadto, Autor podejmuje po raz pierwszy w polskim podręczniku ważną tematykę koneksji w wiązkach głównych i za to należy mu się odpowiednie uznanie. Oczywiście, można zastanawiać się czy dobór materiału omawianego podręcznika jest trafny i nietrudno sformułować uwagi krytyczne. Na przykład, moim zdaniem, Autor nie dość miejsca poświęca zagadnieniom globalnym geometrii różniczkowej. Brak jest w książce wzmianki o klasycznych wynikach Bochnera na temat topologii przestrzeni Riemanna, o własnościach zupełności lub o po-

(1) Proponuję mówić i pisać „rozmaitość różniczkowa" zamiast „różniczkowalna". Własność różniczkowalności dotyczy funkcji i odwzorowań, natomiast struktury, przestrzenie i rozmaitości mogą być różniczkowe. Bywają formy różniczkowe, które nie są różniczkowalne. Podobne rozróżnienie stosują Sikorski i Dieudonné [3].

Niestety jednak książka ta nie jest wolna od wad.

Nie opierając się na programie szkoły średniej (patrz chociażby definicja wektora jako „odcinka skierowanego" — str. 9 i 200), autorzy rozwijają tzw. geometrię analityczną w oderwaniu zarówno od podstaw geometrii, jak od algebry liniowej. Nie używają w minimalnym nawet zakresie języka logiki ani teorii mnogości, chociaż uczniowie szkoły średniej poznają elementy teorii mnogości już w pierwszej, a logiki — w drugiej klasie. Do czego to prowadzi, pokazują następujące przykłady.

1) Na str. 45 rozważa się równanie (1.3): $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Dowiadujemy się, że „... jeżeli $a^2+b^2-c<0$, to równanie (1.3) nie jest równaniem żadnej linii." (Autorzy nie dysponują pojęciem zbioru, w szczególności zbioru pustego).

2) Na str. 47 czytamy: „Jeżeli okręgi (1.13) i (1.14) przecinają się, to równanie (1.16) $F_1(x, y)+$ $+\lambda \cdot F_2(x, y)=0$, gdzie $\lambda \neq -1$, jest równaniem każdego (z wyjątkiem (1.14)) okręgu przechodzącego przez punkty przecięcia okręgów $F_1(x, y)=0$ i $F_2(x, y)=0$". (Domyślamy się, że okrąg (różny od pierwszego) przechodzi przez punkty przecięcia dwóch danych okręgów wtedy i tylko wtedy, gdy jest opisany przez równanie (1.16) dla pewnego $\lambda \neq -1$).

3) Na str. 151 rozważa się pewne równanie (*). Okazuje się, że wprawdzie „Linia ta będzie parabolą, jeżeli $\Delta = \ldots = 0$, skąd $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$", ale „Dla $\lambda_2 = 0$ równanie (*) jest równaniem linii prostej". (Autorzy nie odróżniają warunku koniecznego od dostatecznego, implikacji od równoważności.)

4) Zamiast powiedzieć, że dwa równania określają tę samą prostą lub że dwie proste są identyczne, autorzy piszą (patrz str. 137_8) „... proste $s_1 = 0$ i $s_2 = 0$ zlewają się w jedną prostą $s = 0$".

5) Na str. 337 kilkakrotnie jest mowa o „miejscu geometrycznym prostych", podczas gdy chodzi o ich sumę.

Trudno zrozumieć, dlaczego definiuje się rozmaite równania, zamiast zdefiniować odpowiednie pojęcia geometryczne. Np. na str. 46_8 czytamy: „równanie (1.10) nazywa się równaniem biegunowej", a na str. 47_2 „Równanie (1.16) nazywa się równaniem pęku okręgów". Nawiasem mówiąc, to nie jest równanie pęku okręgów, lecz przedstawienie parametryczne, ale w książce stale przedstawienie parametryczne nazywa się równaniem — błąd rozpowszechniony, więc można go wybaczyć. Gorzej, że odcinek jest raz zbiorem, a raz liczbą (słowa „zbiór" w tej książce nie spotkałam, ale domyślam się, że o to chodzi), a kierunek α (na str. 74^1) okazuje się jednocześnie kątem.

Do poważnych nieporozumień mogą doprowadzić rozważania dotyczące stożkowych. Na str. 74 dowiadujemy się, że „Wszystkie podane wyżej wzory dotyczą najczęściej spotykanego przypadku, gdy elipsa podana jest wzorem (1.1)". ((1.1) — równanie kanoniczne): „Dla zupełności podamy jeszcze inne spotykane równania elipsy". I tu następuje równanie zwane wierzchołkowym, „równanie" parametryczne oraz równanie biegunowe (tj. we współrzędnych biegunowych). Koniec! To są wszystkie „spotykane" równania elipsy!? Na str. 78 można znaleźć podobne informacje dotyczące hiperboli.

Cała książka traktuje oczywiście o przestrzeni rzeczywistej (chociaż to nie jest nigdzie wyraźnie powiedziane). Tymczasem na str. 139 pojawiają się tajemnicze „proste urojone" i to przecinające się w punkcie rzeczywistym. Ten dziwny twór to po prostu zbiór jednopunktowy. Ale trudno to napisać nie używając słowa „zbiór" i zakładając z góry, że równanie opisuje „linię". Podobnie na str. 356 znajdujemy „linie urojone".

Nie sposób wymienić tu wszystkich nieścisłości, niekonsekwencji i błędów językowych, jakie w tej książce można znaleźć. Chciałabym natomiast dodać parę uwag natury ogólnej, być może dyskusyjnych.

Myślę, że tego typu książka powinna nauczyć czytelnika samodzielnego rozwiązywania zadań, a zatem nauczyć go samodzielnego myślenia. Ogromna ilość wzorów podanych na początku każdego rozdziału (na ogół bez uzasadnienia) zwalnia czytelnika od wszelkiego wysiłku intelektualnego. Jeżeli nie wystarczy bezmyślnie skorzystać z odpowiedniego wzoru, można posłużyć się jedną z recept podanych w przykładowych rozwiązaniach. Bo te rozwiązania są to właściwie przepisy, co do czego należy podstawić i co wyrugować, ale dlaczego — o tym się nie mówi.

Autorzy pominęli zupełnie przekształcenia, jedno z podstawowych pojęć współczesnej matematyki, a szczególnie geometrii. Mówi się wprawdzie o „zamianie współrzędnych prostokątnych", ale to chyba nie może zastąpić tak interesującego i kształcącego działu.

I na zakończenie pytanie, które narzuca się przy czytaniu tej książki. Wyobraźmy sobie, że ktoś przyswoił język i metody, jakimi się autorzy posługują, że przywykł do takiej geometrii, jaką się tu uprawia. Czy taki człowiek byłby w stanie zrozumieć, co to jest na przykład geometria rzutowa czy też hiperboliczna? Albo geometria metryczna lub topologia? Obawiam się, że z wielkim trudem. A szkoda.

Maria Moszyńska

Tadeusz B. Iwiński, *Szeregi nieskończone*, Zajęcia fakultatywne w grupie matematyczno-fizycznej, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1974, str. 144, cena zł 10.—

Zgodnie z podtytułem, recenzowana książka ma pomagać uczniom i nauczycielom czwartych klas liceów w zajęciach fakultatywnych na temat szeregów nieskończonych. Temu celowi podporządkowany jest dobór materiału, sposób jego ujęcia, a nawet styl książki. Przy tym stwierdzić od razu należy, że osiągnięcie tego celu wcale nie jest łatwe.

W obecnym modelu liceum ogólnokształcącego zajęcia fakultatywne odgrywają dość specyficzną rolę. Mają one rozwijać ujawnione już zainteresowania i zdolności uczniów, przygotowywać do studiów w obranym kierunku (ewentualnie wybór ten korygować), wreszcie mają one informować najbardziej zainteresowanych uczniów o działach danej dyscypliny wybiegających poza „normalny" program. Toteż zajęcia te, odbywane w klasie maturalnej, przeprowadzane są w grupach mniejszych od normalnych klas (mniej więcej 20-osobowych), grupujących uczniów na zasadzie swobodnego wyboru. Program ich jest mniej rygorystycznie określony i pozostawia nauczycielowi wybór przerabianych tematów. Zalecaną formą tych zajęć jest seminarium — a więc również pod tym względem zajęcia te odbiegać powinny od normalnych rutynowych lekcji.

Takie ustawienie zajęć fakultatywnych czyni z nich instytucję pośrednią, łączącą ze sobą elementy kółka matematycznego i „normalnych lekcji". Z drugiej strony, są one czymś przejściowym między nauką szkolną a studiami wyższymi. Oczywiście realizacja tak różnorodnych zadań sprawiać musi znaczne trudności nauczycielom i uczniom. Wymaga dużej wiedzy matematycznej oraz zainteresowania przedmiotem u nauczyciela, jak również jego zdolności pedagogicznych oraz autentycznego zainteresowania młodzieży. Wymaga również łatwo dostępnej literatury matematycznej na bardzo różnym poziomie: od podręczników szkolnych i książek popularnych do podręczników akademickich i monografii przedmiotów. Oczywiście wymaganie, by każda szkoła posiadała w swojej bibliotece komplet Monografii Matematycznych uznać można za zbyt wygórowane. Jednakże myślę, że powinna ona dysponować przynajmniej niektórymi pozycjami Biblioteki Matematycznej (tymi, które bezpośrednio rozszerzają materiał szkolny, a są napisane dostępnie dla uczniów, takimi jak Kuratowskiego *Rachunek różniczkowy i całkowy* czy też *Arytmetyka teoretyczna* Sierpińskiego). Wiadomo jednakże, że biblioteki szkolne nie kupują na ogół takiej literatury.

Ponieważ zajęcia fakultatywne wybiegają poza program, więc w ich realizacji nie mogą pomóc standardowe podręczniki. Trudno też liczyć na pomoc literatury popularnej — niemal niezauważalnej w księgarniach.

Toteż równolegle z wprowadzaniem zajęć fakultatywnych Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne (a raczej ich poprzednik — PZWS) rozpoczęło wydawanie książeczek mających właśnie pomagać w realizacji poszczególnych tematów zajęć fakultatywnych. Od kilku lat ukazuje się kilka tytułów rocznie pozycji z tej serii, poświęconych różnym zagadnieniom — w tym i matematycznym. Trudno powiedzieć, ile i jakie to pozycje, gdyż wydawnictwo w żadnej książce nie zamieszcza spisu już wydanych, ani planowanych wydawnictw serii. Jest to chyba poważny błąd, gdyż brak takiego spisu utrudnia śledzenie wydawania serii i kompletowanie jej (a chyba zarówno biblioteki szkolne,