Autorzy pominęli zupełnie przekształcenia, jedno z podstawowych pojęć współczesnej matematyki, a szczególnie geometrii. Mówi się wprawdzie o „zamianie współrzędnych prostokątnych", ale to chyba nie może zastąpić tak interesującego i kształcącego działu.

I na zakończenie pytanie, które narzuca się przy czytaniu tej książki. Wyobraźmy sobie, że ktoś przyswoił język i metody, jakimi się autorzy posługują, że przywykł do takiej geometrii, jaką się tu uprawia. Czy taki człowiek byłby w stanie zrozumieć, co to jest na przykład geometria rzutowa czy też hiperboliczna? Albo geometria metryczna lub topologia? Obawiam się, że z wielkim trudem. A szkoda.

*Maria Moszyńska*

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Tadeusz B. Iwiński, *Szeregi nieskończone*, Zajęcia fakultatywne w grupie matematyczno-fizycznej, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1974, str. 144, cena zł 10.—

Zgodnie z podtytułem, recenzowana książka ma pomagać uczniom i nauczycielom czwartych klas liceów w zajęciach fakultatywnych na temat szeregów nieskończonych. Temu celowi podporządkowany jest dobór materiału, sposób jego ujęcia, a nawet styl książki. Przy tym stwierdzić od razu należy, że osiągnięcie tego celu wcale nie jest łatwe.

W obecnym modelu liceum ogólnokształcącego zajęcia fakultatywne odgrywają dość specyficzną rolę. Mają one rozwijać ujawnione już zainteresowania i zdolności uczniów, przygotowywać do studiów w obranym kierunku (ewentualnie wybór ten korygować), wreszcie mają one informować najbardziej zainteresowanych uczniów o działach danej dyscypliny wybiegających poza „normalny" program. Toteż zajęcia te, odbywane w klasie maturalnej, przeprowadzane są w grupach mniejszych od normalnych klas (mniej więcej 20-osobowych), grupujących uczniów na zasadzie swobodnego wyboru. Program ich jest mniej rygorystycznie określony i pozostawia nauczycielowi wybór przerabianych tematów. Zalecaną formą tych zajęć jest seminarium — a więc również pod tym względem zajęcia te odbiegać powinny od normalnych rutynowych lekcji.

Takie ustawienie zajęć fakultatywnych czyni z nich instytucję pośrednią, łączącą ze sobą elementy kółka matematycznego i „normalnych lekcji". Z drugiej strony, są one czymś przejściowym między nauką szkolną a studiami wyższymi. Oczywiście realizacja tak różnorodnych zadań sprawiać musi znaczne trudności nauczycielom i uczniom. Wymaga dużej wiedzy matematycznej oraz zainteresowania przedmiotem u nauczyciela, jak również jego zdolności pedagogicznych oraz autentycznego zainteresowania młodzieży. Wymaga również łatwo dostępnej literatury matematycznej na bardzo różnym poziomie: od podręczników szkolnych i książek popularnych do podręczników akademickich i monografii przedmiotów. Oczywiście wymaganie, by każda szkoła posiadała w swojej bibliotece komplet Monografii Matematycznych uznać można za zbyt wygórowane. Jednakże myślę, że powinna ona dysponować przynajmniej niektórymi pozycjami Biblioteki Matematycznej (tymi, które bezpośrednio rozszerzają materiał szkolny, a są napisane dostępnie dla uczniów, takimi jak Kuratowskiego *Rachunek różniczkowy i całkowy* czy też *Arytmetyka teoretyczna* Sierpińskiego). Wiadomo jednakże, że biblioteki szkolne nie kupują na ogół takiej literatury.

Ponieważ zajęcia fakultatywne wybiegają poza program, więc w ich realizacji nie mogą pomóc standardowe podręczniki. Trudno też liczyć na pomoc literatury popularnej — niemal niezauważalnej w księgarniach.

Toteż równolegle z wprowadzaniem zajęć fakultatywnych Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne (a raczej ich poprzednik — PZWS) rozpoczęło wydawanie książeczek mających właśnie pomagać w realizacji poszczególnych tematów zajęć fakultatywnych. Od kilku lat ukazuje się kilka tytułów rocznie pozycji z tej serii, poświęconych różnym zagadnieniom — w tym i matematycznym. Trudno powiedzieć, ile i jakie to pozycje, gdyż wydawnictwo w żadnej książce nie zamieszcza spisu już wydanych, ani planowanych wydawnictw serii. Jest to chyba poważny błąd, gdyż brak takiego spisu utrudnia śledzenie wydawania serii i kompletowanie jej (a chyba zarówno biblioteki szkolne,

jak i nauczyciele powinni dysponować kompletem tych wydawnictw). Jest to o tyle ważne, że książeczki tej serii wydawane są w zbyt małym nakładzie 10000 egz. i bardzo szybko znikają z półek księgarskich.

Formuła tej serii jest równie złożona, jak i samych zajęć fakultatywnych. Tomiki jej muszą być czymś pośrednim między podręcznikiem szkolnym, monografią a książką popularną. Jest rzeczą wręcz zadziwiającą, że autorzy wszystkich znanych recenzentowi pozycji potrafili dostosować się do takiej formuły i to ograniczani dodatkowo zarówno małą objętością tomików, jak i programem zajęć fakultatywnych. Czasem, jak w recenzowanej książce, udawało im się to doskonale.

Szeregi nieskończone nie są łatwym przedmiotem dla popularyzacji. Trudniej tu niż w innych działach matematyki o ciekawe łamigłówki (jak w niektórych fragmentach geometrii), o interesujące paradoksy (jak choćby w teorii mnogości) czy też o przykłady „z życia" (jak w innych działach analizy). Trudno więc liczyć na zadziwienie, zafascynowanie lub przyciągnięcie czytelnika podstępem. Popularyzacja może właściwie polegać tylko na jednym. Na przystępnym i ciekawym matematycznie wykładzie. Tak właśnie postąpił Autor książeczki. Wszystkie twierdzenia (z jednym bodaj wyjątkiem) podawane są z dowodami, przy tym dowody prowadzone są niezwykle starannie. Intuicje podstawowych pojęć tłumaczone są wszechstronnie. Mimo całej prostoty wykładu, w materii matematycznej nie da się zauważyć cienia trywializacji. Uproszczenia (np. w definicjach pojęć) nie są większe niż w kursowych wykładach analizy. Autor zwraca na przykład uwagę młodym czytelnikom na brak precyzji w często spotykanych zadaniach w rodzaju: Obliczyć sumę szeregu $1+1/2-1/4-1/8+1/16+1/32-1/64-\ldots$ Zachęca też czytelników do tropienia własnych niedokładności. Na końcu przedmowy nawiązując do koniecznych w podręcznikach akademickich opuszczeniach łatwiejszych wywodów, pisze: „Również w tej książeczce jest wiele tego rodzaju luk i opuszczeń. Należy więc odnosić się do tekstu nieufnie i podejrzliwie, tym nieufniej, im wyraźniejsza jest nonszalancja autora. Szczególnie podejrzane są zawsze miejsca, w których występuje słowo »oczywiście« i »łatwo«".

Cytat powyższy jest jednym z wielu, które można by przytoczyć dla zilustrowania stylu, dzięki któremu udaje się autorowi uniknąć popadania w patos (i gadulstwo), a zamiłowania do ścisłości nie zmieniać w niestrawną pedanterię.

A oto przegląd treści poszczególnych rozdziałów. Materiał uzupełniający program zajęć fakultatywnych, podobnie jak w książce, oznaczamy znakiem (').

1. Ciągi. Rozdział zawiera materiał w zasadzie powtórzeniowy (funkcje, ciągi, granica ciągu, ciągi zbieżne). W dwóch paragrafach uzupełniających zdefiniowano pojęcia podciągu, granicy górnej i dolnej oraz udowodniono twierdzenie o ciągach ograniczonych i warunek Cauchy'ego.

2. Szeregi liczbowe. (Definicje, przykłady, własności szeregów zbieżnych, szeregi o wyrazach nieujemnych — kryteria porównawcze, Cauchy'ego i d'Alemberta; szeregi o wyrazach dowolnych — zbieżność szeregów zbieżnych bezwzględnie, szeregi naprzemienne).

3. (') Szeregi liczbowe — ciąg dalszy. (Formalna definicja, warunek Cauchy'ego, zbieżność bezwzględna, podsumowanie wiadomości, przestawianie wyrazów szeregu zbieżnego bezwzględnie, przestawianie wyrazów szeregu zbieżnego warunkowo, mnożenie szeregów, dalsze kryteria zbieżności — mocniejsze kryterium Cauchy'ego, twierdzenie o zagęszczaniu, kryterium całkowe i kryterium Dirichleta).

4. Szeregi potęgowe. (Szeregi funkcyjne, szeregi potęgowe, zbieżność szeregów potęgowych, szeregi Taylora i ich związek z wzorem Taylora, (') zbieżność jednostajna, (') szeregi zbieżne jednostajnie — twierdzenie Weierstrassa, ciągłość, różniczkowalność, (') kilka podanych bez dowodu twierdzeń i trudniejszych zadań o szeregach potęgowych, m. in. twierdzenie Cauchy'ego i Hadamarda oraz twierdzenie Abela).

Zakończenie. (Uwagi historyczne i bibliograficzne).

Bibliografia. (7 pozycji sprawiających wrażenie dość przypadkowych).

Dla uzupełnienia tego przeglądu dodać trzeba, że po niemal każdym paragrafie podane jest kilka ćwiczeń bardzo starannie dobranych. Wszystkich ćwiczeń jest 196. Każde zaopatrzone jest wskazówką bądź odpowiedzią. Nawet zadanie 67: „Rozwiązać wszystkie dotychczas nie przero-

bione zadania". Jedynie jedno zadanie nie ma odpowiedzi (ani numeru) („Zadanie bez numeru. Sprawdzić czy rzeczywiście wszystkie definicje, własności, twierdzenia i umiejętności opatrzone powyżej przymiotnikiem „znane" są znane Czytelnikowi" (str. 64)).

Jak widać, materiał ujęty w książeczce jest obszerny. Jednocześnie nie dubluje ona żadnego podręcznika. Ze względu na jej charakter potraktowane są w niej marginesowo szeregi potęgowe, stanowiące trzon wykładu teorii szeregów w kursie akademickim. Za to dokładnie omówiono szereg zagadnień jedynie marginesowo poruszanych w podręcznikach akademickich lub wręcz w nich pomijanych. Myślę tu o twierdzeniu o permutowaniu wyrazów szeregu warunkowo zbieżnego, o twierdzeniu o zagęszczaniu czy też o ilorazowym kryterium porównawczym. Są to wyniki ciekawe warte przypomnienia i całkowicie leżące na przedłużeniu obecnego programu matematyki w szkołach średnich.

Dwie rzeczy budzą wątpliwości. Autor definiuje szereg jako parę $((a_n), (s_n))$, gdzie $(a_n)$ jest zadanym ciągiem, a $(s_n)$ ciągiem sum częściowych tego ciągu. Czy nie prościej jest po prostu identyfikować szereg i ciąg sum częściowych? Tak zresztą czyni autor (nieformalnie) wszędzie, poza definicją. Druga wątpliwość dotyczy doboru materiału. Wydaje się, że przy takim przeglądowym charakterze książeczki warto było dodać kilka stronic dla poinformowania czytelników o istnieniu nieskończonych iloczynów.

Książeczka została niezmiernie starannie przygotowana do druku. Znalazłem w niej jedynie trzy błędy, a raczej usterki, korektorskie. Na str. $17_8$ zamiast „$\sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n}$" powinno być „$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$", na str. $31_7$ zamiast „równość" powinno być „nierówność", w tytule paragrafu 3.2 (str. 58) należy pominąć znak (′), poprzedzający cały rozdział 3.

*Jan Waszkiewicz*

T. Brocker und K. Janich, *Einführung in die Differentialtopologie*, Heidelberg Taschenbücher, Band 143, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1973, str. VIII + 168, cena DM 14,80.

Recenzowana książeczka jest elementarnym wstępem do teorii rozmaitości gładkich. Jest dostępna dla studentów, nawet niższych lat, kierunków ścisłych i technicznych, ponieważ do jej zrozumienia wystarcza znajomość analizy i topologii w bardzo skromnym zakresie.

W pierwszym rozdziale podana jest definicja rozmaitości i odwzorowań gładkich, w następnym wprowadzone jest pojęcie przestrzeni stycznej w punkcie. Trzy podane tam równoważne definicje związane są z intuicjami: analityczną, fizyczną i geometryczną. Ja bym co prawda nazwał definicją geometryczną tę, którą Autorzy nazywają fizyczną i odwrotnie, ale oczywiście kwestia nazwy jest mało istotna.

Rozdziały trzeci i czwarty poświęcone są, jak można oczekiwać, teorii wiązek wektorowych i są ukoronowane podaniem (dość formalnej) definicji wiązki stycznej. W rozdziale piątym wprowadza się pojęcie rangi odwzorowania w punkcie i związane z tym pojęcie imersji, submersji oraz transwersalności.

Dalszy ciąg podręcznika zawiera dowody trzech podstawowych twierdzeń: (i) twierdzenia Sarda, (ii) twierdzenia Whitneya o imersji, (iii) twierdzenia Thoma o przedłużaniu izotopii. Stanowi to dużą zaletę książki, bo dowody te, jako techniczne, są chętnie w podręcznikach pomijane i nie łatwo je znaleźć.

Omówione są również potoki na rozmaitościach (nazywane układami dynamicznymi) i ich związek z polami wektorowymi oraz układy równań stopnia drugiego (tzw. spryskiwania według terminologii Langa) i związane z nimi odwzorowania wykładnicze. Jako zastosowanie podana jest konstrukcja otoczenia normalnego i wykazana jego jednoznaczność.

Książka zawiera też rozdział poświęcony rozmaitościom z brzegiem oraz rozdział poświęcony pojęciu sumy spójnej rozmaitości; ten ostatni chyba jako przykład zastosowania twierdzenia o rozszerzaniu izotopii.