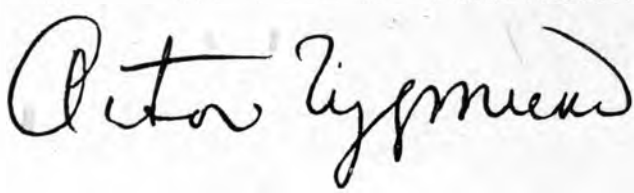
wmptm 1897

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego





ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIX (1976)

CH. FEFFERMAN (Princeton), J. P. KAHANE (Paryż) i E. M. STEIN (Chicago)

O dorobku naukowym Antoniego Zygmunda*

Twórczość Antoniego Zygmunda poświęcona szeregom trygonometrycznym obejmuje okres 50 lat, traktuje o wielu różnych kwestiach i związana jest z rozmaitymi dziedzinami matematyki, jak funkcje jednej i wielu zmiennych rzeczywistych, analiza zespolona, analiza funkcjonalna, teoria prawdopodobieństwa. Jednak sprawia ona wrażenie dzieła jednolitego. Zadaniem tego przeglądu nie jest kompletne omówienie prac Zygmunda, lecz ukazanie zarówno ich rozmaitości, jak i wzajemnych związków.

Zagadnienia, które wybraliśmy, następują w porządku mniej lub bardziej chronologicznym. Z tego powodu zaczynamy nasze omówienie od szeregów trygonometrycznych i kończymy je również na szeregach trygonometrycznych. Oczywiście stosujemy również podział tematyczny, lecz tu trudność naszego zadania leży właśnie we wzajemnym powiązaniu wszystkich tematów. Już proste pytanie, jak sumować szeregi liczbowe, wiąże się z teorią Riemanna szeregów trygonometrycznych, drugą różniczką, funkcjami gładkimi. Funkcje gładkie odgrywają z kolei istotną rolę w aproksymacji, w teorii mnożników, teorii różniczkowania, w zagadnieniu funkcji sprzężonych, w lokalnych własnościach rozwiązań eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych. Równania różniczkowe cząstkowe badane są za pomocą całek osobliwych, całki osobliwe zaś za pomocą interpolacji operatorów. Ze swej strony całki osobliwe dają nowe spojrzenie na starsze zagadnienia: funkcje sprzężone, wyższe sprzężone (wyższe gradienty funkcji harmonicznych), różniczkowalność w sensie Peany, teoria Littlewooda–Paleya, wartości brzegowe funkcji analitycznych, przestrzenie H^p. Teoria przestrzeni H^p w kole jednostkowym wymaga lakunarnych lub losowych szeregów Taylora jako przykładów lub kontrprzykładów. I tutaj pojawia się wiele subtelnych konstrukcji za pomocą lakunarnych szeregów trygono-

*Pierwsza wersja tego omówienia została napisana przez drugiego z autorów z okazji odczytu wygłoszonego w lipcu 1973 r. na uroczystości wręczenia dyplomów członków honorowych Polskiego Towarzystwa Matematycznego (zob. Wiadom. Mat. 18 (1974), str. 191). Marceli Stark był inicjatorem tej pracy. Był on wybitnym edytorem matematycznym i szczerze podziwiał Antoniego Zygmunda. M. Stark był szanowany przez wszystkich matematyków na świecie i kochany przez tych, którzy go naprawdę znali.

metrycznych, iloczynów Riesza, produktów (czynników) Blaschkego. Lakunarne szeregi trygonometryczne nie mogą być oddzielone od szeregów Rademachera i sum niezależnych zmiennych losowych. W końcu dają one właściwe podejście do atakowania problemów dotyczących podwójnych szeregów trygonometrycznych związanych ze starym problemem jednoznaczności. W tej dżungli każdy podział jest nieco sztuczny.

Niemal we wszystkich zagadnieniach występuje osobno przypadek jednej i wielu zmiennych. Wyjątkiem są szeregi lakunarne — tutaj zamiast przypadku wielu zmiennych pojawia się równoległe badanie szeregów nieskończenie wielu zmiennych niezależnych. Typowymi przykładami są: 1) sprzężoność, 2) różniczkowalność. Sprzężoność (przypadek jednej zmiennej) jest związany z transformatą Hilberta (przypadek rzeczywisty) i z funkcjami analitycznymi (przypadek zespolony). Wielu zmiennych dotyczą wyższe sprzężone, całki osobliwe, funkcje analityczne wielu zmiennych zespolonych. Różniczkowalność względem jednej zmiennej jest głównie porównaniem kilku istotnie różnych definicji (pochodne Peany, pochodne Riemanna itd.), specjalna rola części parzystej prowadzi do badania funkcji gładkich. Zagadnienie różniczkowalności funkcji (wielu zmiennych) może być podzielone na dwie główne części: a) badanie roli części parzystej i nieparzystej, uogólnienia pochodnych Peany, wpływ na całki osobliwe; b) różniczkowalność całek zależnie od różnych sposobów ściągania dziedziny do zera i odpowiednie twierdzenia o sumowalności wielokrotnych szeregów trygonometrycznych i wartościach brzegowych funkcji wielu zmiennych zespolonych.

Ponadto w licznych zagadnieniach dotyczących szeregów Fouriera, funkcji sprzężonych, szeregów Rademachera występują oszacowania typu L^p; otrzymali je już Hausdorff–Young, Hardy–Littlewood, M. Riesz i sam A. Zygmund. Bardzo często przypadki $p = 1$ i $p = \infty$ wymagają dodatkowych ograniczeń i są wyłączone z rozważań. Jak dalece można się zbliżyć do $p = 1$ lub $p = \infty$? Zygmund rozstrzygnął te kwestie, wprowadzając obecnie już klasyczne klasy $L \log^+ L$, $\exp \lambda L$, $\exp \lambda L^2$. W ten sam sposób klasy gładkich funkcji Λ^* i λ^* pojawiają się jako właściwe uogólnienia klas Lipschitza Λ_α i λ_α $(0 < \alpha < 1)$ dla $\alpha = 1$.

Odwrotnie, jeśli wiadomo, co się dzieje na końcach przedziału wartości p, to istnieją sposoby badania tego, co się dzieje wewnątrz przedziału: jest to teoria interpolacji operatorów.

Byłoby interesujące kontynuować te rozważania i objaśnić inne aspekty twórczości Antoniego Zygmunda: wpływ jego poprzedników i jego nauczyciela — Rajchmana, rolę jego współpracowników i wśród nich jego uczniów (Saks, Paley, Salem, ...; Marcinkiewicz, A. Calderón, Mary Weiss, E. Stein, ...), wpływ jego wykładów, prac i książek. Ale czas już zacząć.

Sumowalność szeregów liczbowych. Najbardziej klasyczne metody sumacyjne zdefiniowane na szeregach liczbowych $\sum_1^\infty u_n$ powstają przy rozważeniu następujących granic:

(i) $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{1}^{N} u_n$ (zwykła zbieżność),

(ii) $\lim\limits_{r\nearrow 1} \sum\limits_{1}^{\infty} r^n u_n$ (sumowalność metodą Abela–Poissona),

(iii) $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{1}^{N} (1-n/N)u_n$ (Cesàro–Fejér, czyli $(C, 1)$),

(iv) $\lim\limits_{\alpha\searrow 0} \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2\alpha^2} u_n$ (Riemann, czyli $(R, 2)$).

Wszystkie one zostały wprowadzone przy badaniach szeregów potęgowych trygonometrycznych.

Wiele wczesnych prac Antoniego Zygmunda poświęconych jest porównaniu lub uogólnieniu tych metod sumowalności. Przytoczmy parę przykładów:

Jeśli

$$F(x) = -\sum_{1}^{\infty} u_n \frac{\cos nx}{n^2}$$

jest funkcją ciągłą, to

$$\liminf_{r\nearrow 1} \sum_{1}^{\infty} r^n u_n \leqslant \limsup_{\alpha\searrow 0} \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2\alpha^2} u_n,$$

(1)

$$\limsup_{r\nearrow 1} \sum_{1}^{\infty} r^n u_n \geqslant \liminf_{\alpha\searrow 0} \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2\alpha^2} u_n \quad ([2],\ [20]).$$

Jeśli $\lim\limits_{\alpha\searrow 0} \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n\alpha} u_n$ istnieje, to szereg $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ jest sumowalny metodą średnich logarytmicznych, tzn.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N}\left(\frac{s_1}{1} + \ldots + \frac{s_N}{N}\right)$$

istnieje, gdzie $S_N = \sum\limits_{1}^{N} u_n$ [8]. Jeśli $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n\alpha} u_n$ istnieje „aproksymatywnie", tzn. gdy lim rozumieć jako $\lim\limits_{\alpha\in E,\alpha\searrow 0}$, gdzie E jest zbiorem mierzalnym mającym zero jako punkt gęstości [16]. Ostatni rezultat może być uogólniony: jeśli szereg $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ jest sumowalny (C, k), to jest sumowalny aproksy-

matywnie $(R, k+1)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ [16]. $((C, k)$ jest metodą Cesàro rzędu k; tzn. zwykłą zbieżnością dla $k = 0$, a zbieżnością Cesàro–Fejéra dla $k = 1$; (R, k) jest uogólnieniem (iv) określonym przez:

$$\text{(v)} \qquad \lim_{\alpha \searrow 0} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^k u_n;$$

punktem wyjścia teorii Riemanna szeregów trygonometrycznych jest fakt, że zwykła zbieżność implikuje $(R, 2)$.)

We wszystkich przytoczonych przypadkach (R, k) odgrywa rolę. Suma (R, k) może być uważana za symetryczną pochodną rzędu k pewnej funkcji i to tłumaczy stałe zainteresowanie Antoniego Zygmunda różniczkowymi własnościami funkcji zmiennej rzeczywistej.

Sumowalność ogólnych szeregów ortogonalnych. Gdy dany jest szereg funkcyjny, zbieżność i sumowalność może być rozpatrywana bądź punktowo, bądź w dogodnych przestrzeniach, bądź też prawie wszędzie (p.w.).

Szereg S: $\sum_{1}^{\infty} a_n \varphi_n$ jest zbieżny w L^2, gdy φ_n jest systemem ortonormalnym w L^2, a $a_n \in l^2$ jest ciągiem liczbowym. Zachowanie prawie wszędzie jest znacznie trudniejsze do badania. Kaczmarz uzyskał następujący ważny wynik: jeśli szereg S jest sumowalny p.w. metodą Abela–Poissona, to jest p.w. sumowalny $(C, 1)$ (twierdzenie odwrotne jest oczywiste, gdyż sumowalność $(C, 1)$ pociąga sumowalność metodą Poissona dla szeregów liczbowych). Zygmund udowodnił, że sumowalność $(C, 1)$ może tu być zastąpiona przez (C, ε) $(\varepsilon > 0)$ [23]. Bardziej zaskakujący jest fakt, że sumowalność $(C, 1)$ implikuje znacznie silniejsze własności prawie wszędzie:

Jeśli szereg S jest sumowalny $(C, 1)$ na zbiorze E z sumą s, tzn.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} (s - s_N) = 0,$$

to p.w. na E

$$\text{(*)} \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} |s - s_N|^2 = 0,$$

skąd wynika, że $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} |s - s_N| = 0$ ([32], [43]).

W konsekwencji szereg S jest „prawie zbieżny" p.w. na E w następującym sensie: dla każdego x spełniającego (*) istnieje zbiór liczb całkowitych $\Lambda(x)$ o gęstości zero (dokładniej $\sum_{n \in \Lambda(x)} \frac{1}{n} < \infty$) taki, że $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n \notin \Lambda(x)}} s_n(x) = s(x)$ [66].

Dwa klasyczne twierdzenia Mieńszowa podają kryteria zbieżności prawie wszędzie i sumowalności $(C, 1)$ p.w. Uogólnieniem ich obu jest następująca własność: jeśli $\sum a_n^2(\log\log\lambda_n)^2 < \infty$, gdzie (λ_n) jest ciągiem rosnącym rozbieżnym do nieskończoności, to sumy $\sum_{n=0}^{N}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_N}\right)a_n\varphi_n$ są zbieżne p.w. [31] (w szczególności dla $\lambda_n = 2^n$ i $\lambda_n = n$). Sumy te zostały wprowadzone przez M. Riesza wraz z innymi metodami sumacyjnymi badanymi w [31].

Pewne uogólnienie systemów ortonormalnych jest badane i stosowane w [111]. System (φ_n) nazywa się quasi-ortonormalny, jeśli jeden z następujących warunków równoważnych jest spełniony:

1) dla pewnego M i wszystkich $f \in L^2$ $\sum|\int f\overline{\varphi_n}|^2 \leqslant M\int|f|^2$,

2) dla wszystkich $c_n \in l^2$ szereg $\sum C_n\varphi_n$ jest zbieżny w L^2.

Pierwsze twierdzenie Mieńszowa przenosi się na systemy quasi-ortonormalne: jeśli $\sum a_n^2\log^2 n < \infty$, to szereg $\sum a_n\varphi_n$ jest zbieżny p.w. Jest to prawdziwe dla szeregów postaci $\sum a_n f(\lambda_n x)$, o ile $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqslant q > 1$ i f jest „dostatecznie dobrą" funkcją w L^2 [111].

Formalne mnożenie i równozbieżność. W przypadku szeregów trygonometrycznych ważnym narzędziem wprowadzonym przez Rajchmana jest mnożenie formalne. Iloczynem formalnym dwóch szeregów liczbowych $\sum a_n$ i $\sum\alpha_n$ jest $\sum b_n$, gdzie $b_n = \sum a_p\alpha_{n-p}$, o ile ostatni szereg jest zbieżny ($\sum$ oznacza $\sum_{-\infty}^{\infty}$ i zwykle zbieżność oznacza zbieżność symetrycznych sum częściowych $\sum_{-N}^{N}$, gdy $N\to\infty$). Na przykład jeśli $a_n = o(1)$ i $\sum|\alpha_n| < \infty$, to mamy $b_n = o(1)$. Jeśli $a_n = o(|n|^\gamma)$ i $\sum|\alpha_n|\,|n|^\gamma < \infty$ $(\gamma \geqslant 0)$, to $b_n = o(|n|^\gamma)$. Jeśli $a_n = o(|n|^{-\gamma})$ i $\alpha_n = o(|n|^{-\gamma-1})$ $(\gamma > 0)$, to $b_n = o(|n|^{-\gamma})$ [10]. Gdy $a_n = o(1/n)$ i $\alpha_n = O(1/n)$ i szeregi $\sum a_n$ i $\sum\alpha_n$ są zbieżne, to szereg $\sum b_n$ jest zbieżny i $\lim_{N\to\infty}\sum_{-N}^{N} b_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{-N}^{N} a_n \lim_{N\to\infty}\sum_{-N}^{N}\alpha_n$ [53].

Iloczyn formalny dwóch szeregów trygonometrycznych $\hat{a} = \sum a_n e^{int}$ i $\hat{\alpha}_n = \sum\alpha_n e^{int}$ jest zdefiniowany w ten sam sposób, tzn. $\hat{b} = \sum b_n e^{int}$, gdzie $b_n = \sum a_p\alpha_{n-p}$. Pojęcie to było znane wcześniej w przypadku, gdy $\hat{\alpha}$ jest elementem algebry funkcji $\mathfrak{A}$ i $\hat{a}$ jest formą liniową na $\mathfrak{A}$ (na przykład $\hat{\alpha}$ jest funkcją klasy C^∞ i $\hat{a}$ jest dystrybucją; $\hat{\alpha}$ ma absolutnie zbieżny szereg Fouriera i $\hat{a}$ jest pseudomiarą). Oto istotny fakt (Rajchman): jeśli $a_n = o(1)$ i $\alpha_n = O(|n|^{-3})$, to iloczyn formalny $\sum b_n e^{int}$ i szereg $\hat{\alpha}(t)\sum a_n e^{int}$ są jednostajnie równozbieżne, tzn. ich różnica dąży jednostajnie do zera. Przy tym samym założeniu różnica $\sum b_n \operatorname{sign} n e^{int} - \hat{\alpha}(t)\sum a_n \operatorname{sign} n e^{int}$ jest jednostajnie zbieżna (niekoniecznie do 0) [10].

Wiele rezultatów tego typu z innymi rodzajami zbieżności lub sumowalności jest zawartych w [10], [44], [53], [27] i w [108]. Ich główne zastosowanie to: 1) jednostronna lokalizacja, 2) zbieżność szeregów specjalnych i całek trygonometrycznych, 3) porównanie zbiorów jednoznaczności.

Jednostronna lokalizacja. Powiedzieliśmy już, że iloczyn formalny dwóch zbieżnych szeregów $\sum a_n e^{int}$ i $\sum a_n e^{int}$, gdzie $a_n = o(1/n)$ i $a_n = O(1/n)$ jest zbieżny do iloczynu ich sum. W konsekwencji jeśli $g \in L^1(0, \pi)$ i sinusowy szereg Fouriera g ma współczynniki $o(1/n)$ i jest jednostajnie zbieżny, to cosinusowy szereg Fouriera g zbiega również jednostajnie [53]. Otrzymuje się to, przyjmując za $\hat{a}(t)$ szereg Fouriera $\operatorname{sign} t$ $(0 < |t| < \pi)$.

Używając podobnego argumentu, można udowodnić, że każdy szereg $\sum a_n e^{int}$, gdzie $a_n = o(1/n)$, zbieżny do 0 dla $t \in]t_0, t_0+\varepsilon]$ jest zbieżny do zera dla $t = t_0$ [36]. (Oczywiście jest to fałszywe, gdy zastąpić $o(1/n)$ przez $O(1/n)$.) W tym przypadku $\hat{a}(t) = 1_{]t_0, t_0+\varepsilon[}(t)$, co oznacza funkcję charakterystyczną przedziału $]t_0, t_0+\varepsilon[$. W [159] rozpatrywane są subtelniejsze zagadnienia. Szereg $\hat{a} = \sum a_n e^{int}$ nazywa się *lokalizowalnym* w t_0, jeśli istnieje szereg trygonometryczny $\sum b_n e^{int}$ równozbieżny z $\sum a_n e^{int}$ w pewnym przedziale $]t_0, t_0+\varepsilon[$, tzn. $\sum_{-N}^{N} (b_n - a_n) e^{int} \to 0$, gdy $t_0 < t < t_0+\varepsilon$ i zbieżny do 0 na pewnym przedziale, $]t_0-\varepsilon', t_0[$ (oczywiście zmiana prawego przedziału na lewy nie zmienia definicji). Ponadto szereg $\hat{a}$ jest lokalizowalny w przedziale $]t_1, t_2[$, jeśli istnieje szereg trygonometryczny równozbieżny z $\hat{a}$ na $]t_1, t_2[$ i zbieżny do zera poza $]t_1, t_2[$. Zostało udowodnione, że następujące warunki są równoważne: 1) szereg $\hat{a}$ jest lokalizowalny na $]t_1, t_2[$, 2) szereg $\hat{a}$ jest lokalizowalny w t_1 i t_2, 3) iloczyn formalny $\hat{a}$ i szeregu Fouriera $1_{]t_1, t_2[}$ jest dobrze określony. Następujący warunek jest konieczny i dostateczny dla lokalizowalności $\hat{a}$ w t_0: transformata Hilberta $\eta_n = \lim_{P \to \infty} \sum_{0<|p|<P} \frac{a_p e^{ipt_0}}{n-p}$ istnieje dla wszystkich n i $\lim_{|n| \to \infty} \eta_n = 0$. Zatem jeśli szereg $\hat{a}(t)$ jest lokalizowalny w każdym punkcie zbioru E, to szereg sprzężony $\tilde{\hat{a}}(t) = \sum a_n \operatorname{sign} n e^{int}$ jest lokalizowalny w prawie każdym punkcie E. Istnieją takie szeregi $\hat{a}(t)$, że ani one, ani szeregi z nimi sprzężone nie są nigdzie lokalizowalne [159].

Szeregi specjalne i całki trygonometryczne. W wielu przypadkach (Sturm–Liouville, Legendre, Jacobi, Bessel) problemy związane ze zbieżnością szeregów ortogonalnych $\sum a_n v_n(t)$ mogą być zredukowane do analogicznych problemów dla szeregów trygonometrycznych. Asymptotyczne rozwinięcia v_n i mnożenie formalne szeregów trygonometrycznych są narzędziami używanymi w [44] i [53]. Główne rezultaty są następującego typu: gdy szereg $\sum a_n v_n(t)$, gdzie $a_n = o(1)$, jest zdefiniowany w otwartym przedziale I, a $J \subset I$ jest domkniętym podprzedziałem I, to istnieje szereg trygonometryczny $\sum (a'_n \cos \omega nt + b'_n \sin \omega nt)$ równozbieżny z $\sum a_n v_n(t)$ na J. Redukuje to badanie zbiorów jednoznaczności do przypadku trygonometrycznego.

To samo jest prawdą dla całek trygonometrycznych [27], [108]. Oto rezultat ogólny [108]:

Mając daną funkcję o wartościach zespolonych $\varphi(t)$ zdefiniowaną na prostej, lokalnie ograniczoną i taką, że $\sup_{|u| \leqslant 1} |\varphi(t+u) - \varphi(t)|$ dąży do 0, gdy $|t| \to \infty$, rozważa się całki

$$I_\omega(t) = \int_{-\omega}^{\omega} e^{int}\, d\varphi(u), \qquad \tilde{I}_\omega(t) = \int_{-\omega}^{\omega} \operatorname{sign} u\, e^{int}\, d\varphi(u),$$

(zdefiniowane przez całkowanie przez części, gdy zajdzie potrzeba) i przedział domknięty $[a, b]$ zawarty w $]-\pi, \pi[$; wtedy istnieje szereg trygonometryczny $\sum c_n e^{int}$, $c_n = o(1)$ $(|n|\to\infty)$ taki, że szeregi

$$\sum_{|n|\leqslant\omega} c_n e^{int} - I_\omega(t), \qquad \sum_{|n|\leqslant\omega} \operatorname{sign} n c_n e^{int} - \tilde{I}_\omega(t)$$

są jednostajnie zbieżne dla $a \leqslant t \leqslant b$, przy czym pierwszy z nich do 0. Wynika stąd, że zbiory jednoznaczności dla szeregów trygonometrycznych i całek trygonometrycznych są te same.

Zbiory jednoznaczności. Problem pochodzi od Cantora i jest główną motywacją badania mnożenia formalnego. Zbiór $E \subset [0, 2\pi]$ nazywany jest *zbiorem jednoznaczności* lub *zbiorem U*, jeśli jedynym szeregiem trygonometrycznym zbieżnym do 0 poza E jest szereg zerowy. Przykładem zbiorów U są zbiory puste (Cantor), zbiory przeliczalne (Cantor–Young), klasyczny zbiór Cantora w przedziale $[0, 2\pi]$ (Rajchman) przeliczalne sumy domkniętych zbiorów U (twierdzenie Niny Bari); wszystkie mierzalne zbiory U mają miarę zero, ale zbiory miary zero nie muszą być zbiorami U([1]).

Gdy dany jest dodatni ciąg $\varepsilon = \varepsilon_n^*$ zbieżny do zera, Zygmund określa pojęcie zbioru $U(\varepsilon)$ jak następuje: E jest zbiorem $U(\varepsilon)$, jeśli założenia $\lim \sum_{-N}^{N} a_n e^{int} = 0$ $(t \notin E)$ i $|a_n| \leqslant \varepsilon_n$ implikują, że wszystkie $a_n = 0_N$. Stwierdził fakt nieoczekiwany, a mianowicie istnienie zbiorów $U(\varepsilon)$ miary dodatniej (nawet dowolnie bliskiej 2π) [9]. Zagadnienie, czy istnieją zbiory $U(\varepsilon)$ miary 2π, zostało rozwiązane pozytywnie dopiero w 1973 r. przez J. P. Kahane'a i Y. Katznelsona.

Inne rodzaje zbiorów jednoznaczności są rozważane w [10], [44], [53], [73]. Gdy dana jest metoda sumacyjna M, to zbiór E nazywa się *zbiorem* U_M, jeśli jedynym szeregiem trygonometrycznym $S = \sum a_n e^{int}$, $a_n = o(1)$, który jest M-sumowalny do 0 poza E jest szereg zerowy; zbiór E jest *zbiorem* U'_M, jeśli założenie, że szereg S jest M-sumowalny do f poza E i $f \in L^1(0, 2\pi)$ implikuje, że S jest szeregiem Fouriera f; zbiór E jest *zbiorem* U''_M, jeśli założenie, że szereg S jest M-sumowalny do f poza E i $f \geqslant g$ dla pewnego $g \in L^1$ implikuje, że S jest szeregiem Fouriera f. Zależności między zbiorami U_M, U'_M a U''_M nie są jeszcze całkowicie wyjaśnione.

([1]) To, że przeliczalna suma domkniętych zbiorów U jest zbiorem U, jest jednym z najpiękniejszych wyników teorii. Właściwe jest nazwanie go twierdzeniem Niny Bari już z tego powodu, że czyni tak profesor Zygmund (por. [151], I, s. 349). Fakt, że profesor Zygmund mógłby rościć sobie prawo do priorytetu, był starannie ukrywany. Zainteresowani historią przedmiotu mogą zajrzeć do zbioru Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris 1923 i 1924 do not Zygmunda pod datą 1 października 1923 i 22 grudnia 1923 (nie cytowanych przez prof. Zygmunda w jego bibliografii), do not N. Bari pod datą 3 grudnia 1923 i w końcu mogą przeczytać to, co Zygmund napisał na końcu [6].

Gdy M jest zwykłą zbieżnością, to piszemy U, U', U''. Gdy metoda M jest silniejsza od zwykłej zbieżności, można narysować następujący oczywisty diagram:

$$\begin{array}{ccccc} U & \longleftarrow & U' & \longleftarrow & U'' \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ U_M & \longleftarrow & U'_M & \longleftarrow & U''_M \end{array}$$

Przykładami zbiorów U'' są zbiory przeliczalne (Steinhaus, Banach) lub też zbiory H Rajchmana (uwaga A. Zygmunda). Przypadek $M = P$ (metoda Abela–Poissona) jest specjalnie interesujący. Dowiedzione jest w [21], s. 284, że zbiór przeliczalny jest zbiorem U''_p, nawet gdy warunek $a_n = o(1)$ jest nieznacznie osłabiony; natomiast w [10], s. 94, dowodzi się, że każdy domknięty zbiór U jest zbiorem U'_p (więc również zbiorem U_p i U'). Podstawowa jest tu nierówność (1). Praca [73] zawiera dwa interesujące rezultaty. Pierwszy brzmi: zbiory jednoznaczności są zachowywane przez homotetię. Jest to prosta konsekwencja twierdzenia (odkrytego już przez Zygmunda w r. 1928), że zbiory jednoznaczności dla szeregów i dla całek trygonometrycznych są te same. Drugi rezultat to przykład metody sumacyjnej M takiej, że zbiór pusty nie jest zbiorem U_M. Objaśnimy ten przykład bardziej szczegółowo, ponieważ jest całkiem prosty i ściśle związany ze wspólną pracą Zygmunda i Marcinkiewicza (o różniczkowalnych własnościach funkcji) i pracą Salema (o zbiorach doskonałych konstruowanych za pomocą postępowania Cantora ze stałym stosunkiem podziału ξ). Rozważmy szereg losowy

$$\frac{\pi}{1-\xi} \sum_0^\infty \pm \xi^m \qquad (0 < \xi < \tfrac{1}{2});$$

jego zbiorem wartości jest zbiór doskonały E_ξ zawarty w $[-\pi, \pi]$ (dla $\xi = \frac{1}{3}$, E_ξ jest klasycznym zbiorem Cantora) i naturalna miara probabilistyczna na E_ξ, μ ma współczynniki Fouriera $\hat{\mu}(n)$ zbieżne do 0 ($|n| \to \infty$), jeśli ξ nie należy do pewnego wyjątkowego zbioru, który oznaczamy przez S. Zakładamy, że $\xi \notin S$ i $\xi < \frac{1}{5}$. Niech φ_m będzie funkcją trójkątną określoną na przedziale

$$I_m = \left[\frac{\pi \xi^m}{1-\xi}, \frac{3\pi \xi^m}{1-\xi} \right]$$

o średniej wartości 1. Oczywiście $\mu * \varphi_m$ jest funkcją ciągłą określoną na $E_\xi + I_m$, a założenie $\xi < \frac{1}{5}$ powoduje, że $\limsup (E_\xi + I_m) = \emptyset$. Splot z φ_m definiuje metodę sumacyjną silniejszą niż zwykła zbieżność i szereg Fouriera μ jest sumowalny wszędzie do 0. Daje to również przykład nieliniowej funkcji ciągłej (druga funkcja pierwotna μ) takiej, że przesunięta druga pochodna wszędzie znika.

Powróćmy do zbiorów E_ξ ze stałym stosunkiem podziału ξ. Salem udowodnił, że warunkiem koniecznym na to, żeby E_ξ było zbiorem U jest, aby $\xi \in S$, gdzie S jest zbiorem wszystkich liczb Pisota–Vijayaraghavana, to jest liczb algebraicznych $\theta_1 > 1$ takich, że ich sprzężenia $\theta_2, \ldots, \theta_n$ leżą wewnątrz otwartego koła jednostkowego $|z| < 1$. Przypuszczał, że warunek ten jest również dostateczny (1944).

Ta piękna hipoteza została udowodniona przez Salema i Zygmunda w 1955 [135] za pomocą wielowymiarowej metody wprowadzonej przez Piateckiego-Szapirę.

Sumowalność wielokrotnych szeregów Fouriera. Jest to ściśle związane z różniczkowymi własnościami funkcji wielu zmiennych rzeczywistych. Mówiąc z grubsza, sumy Fejéra

$$\sigma_{mn}(x, y) = \sum_{|\mu|<m,\ |\nu|<n} \left(1-\frac{|\mu|}{m}\right)\left(1-\frac{|\nu|}{n}\right)\hat{f}(\mu, \nu)e^{i(\mu x+\nu y)}$$

zachowują się w taki sam sposób jak wartości średnie

$$M_{hk}(x, y) = \frac{1}{hk}\int_0^h\int_0^k f(x+u, y+v)\,du\,dv.$$

Saks udowodnił, że granice $\lim_{m,n\to\infty} \sigma_{mn}(x, y)$ i $\lim_{h,k\to 0} M_{hk}(x, y)$ mogą nie istnieć w żadnym punkcie, jeśli założyć tylko, że $f\in L^1$.

Ulepszając wynik A. Zygmunda [62], autorzy [65] pokazują, że te granice istnieją prawie wszędzie, jeśli $f\in L^1\log L^1$ (tzn. $f\log^+|f|\in L^1$) i jest to możliwie najlepszy rezultat. Następujący odpowiednik klasycznego twierdzenia Lebesgue'a udowodniony jest w [85]: jeśli $\lambda > 1$ i $f\in L^1$, to $\lim\sigma_{mn}(x, y) = f(x, y)$ p.w., jeśli $(m, n)\to\infty$ w kącie $\lambda^{-1}\leqslant m/n\leqslant\lambda$. Nie tylko wynik jest tu interesujący, ale również i metoda. Analogia rezultatów co do σ_{mn} i M_{hk} przesłania bardzo dużą różnicę dowodów, mimo że w obu używany jest lemat Vitaliego o pokryciu i fakt, że zarówno odwzorowanie $f\to\sup M_{hk}$, jak i $f\to\sup\sigma_{mn}$ jest słabego typu $(1, 1)$; tego rodzaju rozumowań używał A. Zygmund także później w badaniach całek osobliwych.

Najostrzejsze rezultaty zawarte są w [106]. Oto jeden z nich: jeżeli $m(t)$ i $n(t)$ są dowolnymi funkcjami o wartościach całkowitych rosnącymi do ∞ i $f\in L^1$, to $\lim_{t\to\infty}\sigma_{m(t)n(t)}(x, y) = f(x, y)$ p.w. Znowu „kąt" może zastąpić „krzywą" $m = m(t)$, $n = n(t)$.

Od 1947 do 1972 roku nie pojawia się żadna publikacja A. Zygmunda o wielokrotnych szeregach Fouriera, z wyjątkiem pracy [117], która dotyczy głównie szeregów potęgowych wielu zmiennych zespolonych. Powinniśmy wymienić pracę [168] zwaną przez A. Zygmunda „post scriptum do [65]" o różniczkowalności całek wielokrotnych. Omówimy dalej jego niedawne wyniki w tym zakresie.

Różniczkowalność funkcji. Różniczkowe własności funkcji zmiennej rzeczywistej były ulubionym tematem badań profesora Zygmunda od jego wczesnych prac (na przykład w [5] jest następujący rezultat: dla dowolnej funkcji rzeczywistej $f(t)$, określonej na prostej, zbiór tych t, gdzie

$$\lim_{h\to 0,\ h>0}\frac{|f(t+h)-f(t)|}{h} = \infty$$

ma miarę zero). Ograniczymy się najpierw do głównej pracy [67], a później zajmiemy się funkcjami gładkimi [98], [155], [161].

Główne twierdzenie [67] mówi, że jeśli k-ta pochodna Riemanna funkcji f (odtąd

f jest zawsze funkcją mierzalną) istnieje na zbiorze E, to k-ta pochodna Peany istnieje prawie wszędzie na E. Wytłumaczymy to i sformułujemy dokładniej. Niech

$$\Delta_k(x, h; f) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+jh-\tfrac{1}{2}kh) \qquad (h > 0).$$

Jeśli granica $\lim_{h\to 0} h^{-k}\Delta_k(x, h; f) = D_k f(x)$ istnieje, to nazywa się ona k-tą pochodną Riemanna funkcji f w punkcie x. Z drugiej strony, jeśli

$$f(x+t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_k \frac{t^k}{k!} + o(t^k) \qquad (t \to 0),$$

to liczby $a_j = a_j(x)$ nazywają się *pochodnymi Peany funkcji* f w x i są oznaczane przez $f_{(j)}(x)$ (w [67] pochodne Peany nazywane są *pochodnymi Valleé-Poussina*). Jest bardzo łatwo sprawdzić, że $D_k f(x) = f_{(k)}(x)$, o ile prawa strona istnieje. Odwrotnego wynikania nie ma, ale zgodnie z twierdzeniem Zygmunda, zachodzi ona jednak p.w. Dokładniejsze jest twierdzenie następujące: jeśli $\overline{\lim}\, |h^{-k}\Delta_k(x, h; f)| < \infty$ dla $x \in E$, to $f_{(k)}(x)$ istnieje prawie wszędzie na E.

Oto zastosowanie: Niech $F \in L^1(0, 2\pi)$ ze średnią wartością 0 i niech $\Phi(x)$ oznacza całkę funkcji $F(x)$, a $\tilde{\Phi}(x)$ funkcję sprzężoną do $\Phi(x)$. Jeśli $F_{(k)}(x)$ istnieje na zbiorze E, to $\Phi_{(k+1)}(x)$ istnieje p.w. na E. Są również zastosowania do średnich Cesàry szeregów Fouriera F i $\tilde{F}$; nie będziemy ich teraz wymieniać, ponieważ autorzy dali lepszą ich wersję później za pomocą innej metody w [87].

Funkcje gładkie. Praca [98] wprowadza pojęcie funkcji gładkich, bardzo istotne w analizie rzeczywistej. Funkcja jest gładka w x_0, jeśli $f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0) = o(h)$. Klasa λ_* składa się z funkcji ciągłych, które są jednostajnie gładkie, tzn. $\sup_x |f(x+h)+f(x-h)-2f(x)| = o(h)$ jednostajnie w x na odcinku lub na okręgu; odtąd zakładamy, że funkcja f jest określona na okręgu. Definicję klasy Λ_* otrzymuje się zastępując $o(h)$ przez $O(h)$, a definicję klasy Λ opuszczając ponadto warunek jednostajności. Z kolei definiuje się klasy λ_*^p i Λ_*^p (oznaczone w [98] przez λ_p i Λ_p, zastępując normę $\sup_x \|\ \|$ przez normę L_p $(1 \leqslant p < \infty)$. Według profesora Zygmunda „pojęcie gładkości było po raz pierwszy rozważane przez Riemanna w jego klasycznej pracy o szeregach trygonometrycznych". (Riemann dowiódł, że funkcja ciągła f, o współczynnikach Fouriera $\hat{f}(n) = o(1/n^2)$ jest gładka.) Innym przykładem są szeregi lakunarne $f(x) = \sum_0^\infty a_n \cos 2^n x$. Gdy $a_n = o(2^{-n})$, to $f \in \lambda_*$; jeśli $a_n = O(2^{-n})$, to $f \in \Lambda_*$. Przykład ten pokazuje, że funkcja w Λ_* może nie być nigdzie różniczkowalna. Natomiast funkcje *rzeczywiste* w λ_* są różniczkowalne na gęstym i nieprzeliczalnym zbiorze (Rajchmann–Zalcwasser) i ich pochodne mają własność Darboux na ich zbiorze określoności (o ile nam wiadomo, zagadnienie różniczkowalności jest otwarte dla funkcji *zespolonych*). Jako zastosowanie tego mamy, że jeśli rzeczywisty szereg trygonometryczny ma współczynniki $= o(1/n)$ i E jest zbiorem punktów zbieżności szeregu, to suma $s(x)$ ma własność Darboux na E.

Pod wieloma względami klasy Λ_* i λ_* pojawiają się jako naturalne rozszerzenia klas Lipschitza Λ_α i λ_α $(0 < \alpha < 1)$ w przypadku $\alpha = 1$. Jeśli $f \in \Lambda_*$ lub λ_*, to funkcja sprzężona ma tę samą własność. Klasa Λ_* lub λ_* może być określona za pomocą najlepszej aproksymacji przez szeregi trygonometryczne: jeśli $E_n(f) = \inf \|f - T_n\|$ dla wszystkich wielomianów trygonometrycznych rzędu $\leqslant n$, to f należy do Λ_* lub do λ_* wtedy i tylko wtedy, gdy $E_n(f) = O(1/n)$ lub $o(1/n)$. Przypomnijmy, że f należy do klasy Lipschitza Λ_α lub λ_α $(0 < \alpha < 1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E_n(f) = O(1/n^\alpha)$ lub $o(1/n^\alpha)$ odpowiednio. Jak później zobaczymy, funkcje gładkie odgrywają również ważną rolę w problemach mnożników.

Przykład $\sum_1^\infty n^{-1/2} 2^{-n} \cos 2^n x$ pokazuje, że funkcje w λ_* niekoniecznie są różniczkowalne p.w. Pewien lokalny warunek dostateczny różniczkowalności funkcji f nałożony na jej „część parzystą" $\frac{1}{2}(f(x+t)+f(x-t))$ został odkryty w [155]. Mianowicie, jeśli $\varepsilon(t)$ jest taką funkcją rosnącą na odcinku $[0, 1]$, że $\int_0^1 \frac{\varepsilon^2(t)}{t}\, dt < \infty$, i

$$f(x+t)+f(x-t)-2f(x) = O(t\varepsilon(t)),$$

gdy $x \in E$, niekoniecznie jednostajnie w x, to funkcja f jest różniczkowalna p.w. na E. Warunek ten nie da się osłabić przy założeniu, że $\varepsilon(t)$ dąży monotonicznie do 0 i $\varepsilon(2t)/\varepsilon(t) \to 1$. Jednak w [161] zawarte jest twierdzenie ostrzejsze, a mianowicie: Niech $f \in L^2$ i f spełnia Λ w każdym punkcie zbioru E; wówczas warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcja f była różniczkowalna p.w. na E, jest $\int_0^\infty \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|^2}{3}\, dt < \infty$ dla prawie wszystkich $x \in E$.

Uogólnia się to na wyższe pochodne, jak następuje. Mówimy, że dla k nieparzystego funkcja f spełnia warunek Λ_k w punkcie x, jeśli

$$f(x+t)+f(x-t) = a_0 + a_2 t^2 + \ldots + a_{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \varepsilon_x(t) t^k,$$

$$\varepsilon_x(t) = O(1) \qquad (t \to 0) \qquad (a_j = a_j(x_0)).$$

Jeśli k jest parzyste, warunek Λ_k oznacza, że

$$f(x+t)-f(x-t) = a_1 t + a_3 t^3 + \ldots + a_{k-1} \frac{t^{k-1}}{k-1} + \varepsilon_x(t) t^k,$$

$$\varepsilon_x(t) = O(1) \qquad (t \to 0).$$

Jeśli $f \in L^2$ spełnia warunek Λ_k w każdym punkcie zbioru E, to na to, aby funkcja f miała k-tą pochodną p.w. na E (obojętnie, czy w sensie Riemanna, czy w sensie Vallée Poussina; gdyż te definicje są równoważne p.w. [por. poprzedni paragraf]) potrzeba i wystarcza, by $\int_0^\infty \frac{\varepsilon_x^2(t)}{t}\, dt < \infty$ dla prawie wszystkich $x \in E$ [161]. Dowody są skomplikowane i opierają się na teorii szeregów Fouriera i funkcji

zmiennych zespolonych. Rola szeregów Fouriera i sprzężonych szeregów Fouriera jest całkiem naturalna z powodu roli „parzystej części" $\frac{1}{2}\big(|f(x+t)-f(x-t)|$ i „nieparzystej części" $\frac{1}{2}\big(f(x+t)-f(x-t)\big)$ w sumacyjnych własnościach $S(f)$ i $\tilde{S}(f)$.

Klasy funkcji i szeregi Fouriera. Jak własności funkcji odzwierciedlają się w ich szeregach Fouriera? Pewne klasyczne wyniki w tym kierunku należą do S. Bernsteina, Hardy'ego i Littlewooda. Wymieńmy kilka spośród nich. Przez Λ_α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ oznaczamy klasę Lipschitza o wykładniku α, tj. klasę ciągłych 2π-okresowych funkcji f, których moduł ciągłości spełnia $\omega_f(\delta) = O(\delta^\alpha)$ $(\delta \searrow 0)$. Oznaczamy przez f_γ ułamkową całkę funkcji f rzędu γ (γ — rzeczywiste), tj. funkcję sumowalną (jeśli istnieje), której szereg Fouriera jest postaci:

$$\sum_{n\neq 0} (in)^{-\gamma}\hat{f}(n)e^{int};$$

jeśli jest to szereg Fouriera funkcji ciągłej, to zakłada się, że funkcja f_γ jest ciągła.

Jeśli $\alpha > \frac{1}{2}$ i $f \in \Lambda_\alpha$, to $\sum |\hat{f}(n)| < \infty$ (S. Bernstein).

Jeśli $0 < \alpha < 1$ i $f \in \Lambda_\alpha$, to sumy Fejéra

$$\sigma_n(t) = \sum_{|j|\leqslant n} \left(1 - \frac{|j|}{n}\right)\hat{f}(n)e^{ijt}$$

spełniają $\|\sigma_n - f\|_\infty = O(n^{-\alpha})$ (S. Bernstein).

Jeśli $0 < \alpha < \alpha+\gamma < 1$, to $f \in \Lambda_\alpha \Leftrightarrow f_\gamma \in \Lambda_{\alpha+\gamma}$ (Hardy–Littlewood). Zygmund poważnie się przyczynił do rozwoju teorii absolutnie zbieżnych szeregów Fouriera, teorii aproksymacji i teorii mnożników.

Absolutnie zbieżne szeregi Fouriera. „Uwagą" profesora Zygmunda jest następujące twierdzenie: jeśli $f \in \Lambda_\alpha$ $(\alpha > 0)$ i f ma ograniczoną wariację, to $\sum|\hat{f}(n)| < \infty$ [25]. Z dowodu wynika trochę więcej, mianowicie $\sum|\hat{f}(n)|^k < \infty$ dla $k > 2/(2+\alpha)$ (Waraszkiewicz 1929). Nie jest to prawdziwe dla $k = 2/(2+\alpha)$ [63]. Zacytujmy inny interesujący wynik Zygmunda inspirowany przez twierdzenie Lévy'ego–Wienera i metodę Marcinkiewicza. Klasa Gevreya o indeksie $1/k$ działa na A_k, gdzie A_k oznacza klasę wszystkich funkcji ciągłych f takich, że $\sum|\hat{f}(n)|^k < \infty$ $(0 < k < 1)$. Innymi słowy, jeśli F jest funkcją klasy C^∞, której pochodne $F^{(p)}$ są $O\big(K^p(p!)1/K\big)$ $(p\to\infty)$ jednostajnie na każdym zwartym przedziale i jeśli $f \in A_k$, to $F(f) \in A_k$. Riviere i Sagher dowiedli, że ten wynik jest możliwie najlepszy; jedyną o nim informację przynosi ich praca (Studia Mathematica 28 (1966), s. 133–238). Klasa A_k jest interesująca przez to, że daje nietrywialny przykład algebry lokalnie ograniczonej, nie będącej algebrą Banacha.

Teoria aproksymacji. Oto wczesny wynik [18]. Jeśli $f \in \lambda_\alpha$, tzn. $\big(\omega_f(\delta) = o(\delta^\alpha)\big)$, to szereg Fouriera f jest sumowalny jednostajnie do f metodą Cesàro (C, α). Główne rezultaty zostały ogłoszone koło 1945 r. Oto kilka z nich.

Jeśli $f \in C^k$ (k-ta pochodna istnieje i jest ciągła) i

$$X_{k,\omega}(t) = \sum_{|n|<\omega} \left(1 - \frac{|n|^k}{\omega^k}\right) \hat{f}(n) e^{int} \quad \text{(typowa średnia)},$$

to $\|X_{k,\omega} - f\|_\infty = O(\omega^{-k})$ dla k parzystego i $O(\omega^{-k} \log \omega)$ dla k nieparzystego. Jeśli k jest nieparzyste, to czynnika $\log\omega$ na ogół nie można pominąć; jeśli jednak f jest ponadto typu Taylora, tzn. $f \sim \sum_0^\infty \hat{f}(n) e^{int}$, to znów $\|X_{k,\omega} - f\|_\infty = O(\omega^{-k})$ [100]. W przypadku gdy $k = 1$, to samo jest prawdą, gdy C^1 zastąpi się przez Λ_1 (zwykłą klasę Lipschitza [96]; tutaj typową średnią są sumy Fejéra i mamy graniczny przypadek twierdzenia Bernsteina. Ogólnie mamy tylko $\|\sigma_n - f\|_\infty = O(n^{-1} \log n)$, jeśli $f \in \Lambda_1$; jednakże $\|\sigma_n - f\|_\infty = O\big(\omega_f(1/n)\big)$, o ile f jest typu Taylora.

Co do aproksymacji przez sumy częściowe s_n (przypadek $k = 0$) klasyczne twierdzenie Lebesgue'a orzeka, że $\|s_n - f\|_\infty = O(n^{-\alpha} \log n)$, gdy $f \in \Lambda_\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$. W jakim stopniu oszacowanie to można polepszyć przy dalszych założeniach o f? Gdy f jest „typu monotonicznego" (tzn. $f(x) + Cx$ jest monotoniczne dla pewnego C), to $\|s_n - f\|_\infty = O(n^{-\alpha})$. Gdy założy się tylko, że f ma ograniczone wahanie, to oszacowania $O(n^{-\alpha} \log n)$ nie można poprawić [102].

Wspomnijmy, że kilka własności klasy Λ_α można wywieść z charakteryzacji $f \in \Lambda_\alpha \Leftrightarrow \|2\sigma_{2n} - \sigma_n - f\|_\infty = O(n^{-\alpha})$. Przypadek graniczny daje Λ_*: $f \in \Lambda_* \Leftrightarrow \|2\sigma_{2n} - \sigma_n - f\|_\infty = O(n^{-1})$. Dla każdego $p \geqslant 1$ $f \in \Lambda_*^p \Leftrightarrow \|2\sigma_{2n} - \sigma_n - f\|_p = O(n^{-1})$. Jest to równoważne z charakteryzacją Λ_*^p za pomocą najlepszej aproksymacji wielomianami trygonometrycznymi w L^p, już wspomnianej w przypadku $p = \infty$. Wyrażenia $2\sigma_{2n} - \sigma_n$ nazywają się *sumami Vallée Poussina funkcji f*.

Mnożniki i operatory niezmiennicze przy przesunięciach. Całkowanie ułamkowe jest przykładem operatora niezmienniczego względem przesunięć. Ogólnie, operator T na okręgu niezmienniczy względem przesunięć jest określony przez ciąg λ_n taki, że $\widehat{(Tf)}(n) = \lambda_n \hat{f}(n)$. Jeśli T zachowuje pewną klasę funkcji, to ciąg $\{\lambda_n\}$ nazywa się *ciągiem mnożników* dla tej klasy.

Funkcje gładkie odgrywają ważną rolę w tej problematyce. Rozszerzona wersja twierdzenia Hardy'ego–Littlewooda brzmi jak następuje: jeśli f jest funkcją ciągłą ze średnią wartością 0 i $0 < \alpha < 1$, to $f \in \Lambda_* \Leftrightarrow f_{1-\alpha} \in \Lambda_\alpha$ [100].

Następujące wyniki były publikowane po 1959 r.

Ciągi mnożników dla Λ_α, λ_α, Λ_*, λ_* są takie same; $\{\lambda_m\}$ jest takim ciągiem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{n \neq 0} \frac{\lambda_n}{in} e^{inx} \in \Lambda_*^1 \quad [154].$$

Ciąg $\{n^{i\gamma}\}$ jest ciągiem mnożników dla szeregu trygonometrycznego, który jest zbieżny prawie wszędzie [171]. Niech T będzie operatorem niezmienniczym przy przesunięciach w n-wymiarowej przestrzeni R^n. Jeśli T przeprowadza Λ_α w Λ_β,

gdzie $\beta > \alpha$, to przeprowadza L^p w L^q, gdzie $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\beta-\alpha}{n}$ $(1 < p < q < \infty)$. Z drugiej strony istnieje operator T niezmienniczy przy przesunięciach, który przeprowadza Λ_α w Λ_α, L^2 w L^2, ale nie przekształca żadnego innego L^p w L^p; przykład jest skonstruowany za pomocą odpowiednio wybranego ciągu mnożników [169].

Szeregi sprzężone i szeregi Taylora. Gdy dany jest szereg trygonometryczny $S = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$, to szereg z nim sprzężony określa się jako $\tilde{S} = i \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \operatorname{sign} n e^{int}$. Jeśli rozważymy szereg Taylora $\sum_{1}^{\infty} c_n z^n$ na okręgu $|z| = 1$ i napiszemy $z = e^{it}$, to jego część rzeczywista i urojona są szeregami sprzężonymi. W przypadku gdy S jest szeregiem Fouriera „dobrej" funkcji f, to $\tilde{S}$ jest szeregiem Fouriera funkcji $\tilde{f}$ zdefiniowanej wzorem

$$\tilde{f}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg} t/2} \, dt.$$

Jeżeli ta całka istnieje w sensie $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi}$, to funkcja f, którą definiuje, nazywa się *funkcją sprzężoną* do f.

Wspominaliśmy już o pewnych własnościach szeregów i funkcji sprzężonych w odniesieniu do innych zagadnień. Były one ulubionym tematem Zygmunda i odgrywają centralną rolę w jego badaniach. Transformata Hilberta $f \to \tilde{f}$ jest specjalnym przypadkiem operatora niezmienniczego przy przesunięciach. Jego naturalne uogólnienie na przypadek wielowymiarowy prowadzi do teorii całek osobliwych. Zachowanie się transformaty Poissona S i $\tilde{S}$ (tzn. rzeczywistej i urojonej części szeregu Taylora wewnątrz koła $|z| < 1$) jest związane z metodami zespolonymi w teorii szeregów Fouriera, a rozszerzenie na przypadek wielowymiarowy wymaga teorii gradientów (stopnia $\geqslant 1$) funkcji harmonicznych i prowadzi do nowoczesnej teorii przestrzeni H^p. Te zagadnienia będą rozważane później.

W ważnej pracy [87] napisanej wspólnie z Marcinkiewiczem badane są sumy częściowe szeregów Taylora na brzegu (lub ogólnie średnich Cesàro).

Oto jest główne ogólne twierdzenie.

Rozważamy szereg Taylora $\sum_{0}^{\infty} c_n z^n = S + i\tilde{S}$ *i oznaczamy przez* $\sigma_n^\alpha(t)$ *jego średnią Cesàro rzędu* α $(\alpha > -1)$ *w punkcie* $z = e^{it}$. *Na przykład*

$$\sigma_n^0(t) = \sum_{0}^{n} c_j e^{ijt}, \quad \sigma_n^1(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{0}^{n} \sigma_j^0(t).$$

Jeśli $\overline{\lim} |\operatorname{Re} \sigma_n^\alpha(t)| < \infty$, *gdy* $t \in E$, *to* 1° $\lim \sigma_n^{\alpha+\varepsilon}(t) = \sigma(t)$ *istnieje dla prawie każdego* $t \in E$; 2° *zbiór punktów granicznych* $\sigma_n^\alpha(t)$ $(n \to \infty)$ *jest sumą okręgów o środ-*

kach $\sigma(t)$ *dla prawie każdego* $t \in E$; 3° *w przypadku* $\alpha = 0$ *i* $c_n = o(1)$ *zbiór ten jest domkniętym pierścieniem o środku* $\sigma(t)$ *prawie wszędzie na* E.

Pokrótce warunek 2° mówi, że $\{\sigma_n^\alpha(t)\}$ ma „strukturę kolistą" prawie wszędzie na E.

Ponadto następujące warunki są równoważne: a) $\overline{\lim}\,|\mathrm{Re}\,\sigma_n^\alpha(t)| < \infty$ p.w. na E; b) $\lim \sigma_n^{\alpha+1}(t)$ istnieje p.w. na E; c) $\overline{\lim}\,\mathrm{Re}\,\sigma_n^\alpha(t) < \infty$ i szereg S jest sumowalny metodą Abela.

Dowód powyższego twierdzenia jest trudny. Wykorzystuje poprzednie rezultaty Zygmunda o zbieżności lub sumowalności S i $\tilde{S}$: jeśli szereg S ma ograniczone sumy częściowe i jest zbieżny na E, to szereg $\tilde{S}$ jest zbieżny p.w. na E ([46]; słabszą wersją jest pewne twierdzenie Priwałowa); sumowalność (C, α) szeregu S na E implikuje sumowalność $\tilde{S}$ w tym sensie p.w. na E ([87]; w przypadku $\alpha = 0$ udowodnił to Kuttner); jednostronna ograniczoność sum częściowych szeregu Fouriera S na E implikuje ograniczoność S i $\tilde{S}$ p.w. na E [63]. Twierdzenie powyższe, mimo że głębokie, pozostawia otwartym następujący problem (zakomunikowany nam przez A. Zygmunda): czy jest prawdą (przy założeniach twierdzenia), że sumy $\sigma_n^\alpha(t)$ mają ekwipartycję w otoczeniu swego zbioru granicznego prawie wszędzie na E?

Szeregi lakunarne i losowe. Wykorzystanie lakunarnych i losowych szeregów trygonometrycznych dla konstrukcji przykładów i kontrprzykładów było rozwinięte przez Paleya i Zygmunda w latach trzydziestych i okazało się, że jest to metoda bardzo użyteczna. Podajmy kilka typowych wyników.

1. Żaden słabszy warunek niż to, że $\sum |c_n|^2 < \infty$ nie gwarantuje, że $\sum \pm c_n e^{int}$ jest szeregiem Fouriera. Dowodzi się, że $\sum \pm c_n e^{int}$ nie jest szeregiem Fouriera prawie na pewno, o ile $\pm$ są losowo wybrane z naturalnym prawdopodobieństwem [41].

2. Żaden lepszy warunek niż to, że $f \in L^1$ nie daje możliwości określenia i zbadania funkcji sprzężonej $\tilde{f}$. Istotnie, gdy dana jest funkcja dodatnia $\chi(x) = o(x)$ $(x \to \infty)$ i funkcja $\psi(x)$ rosnąca do ∞ $(x \to \infty)$, to istnieje szereg Taylora $\sum c_n z^n = u(z) + iv(z)$ taki, że $\int \chi(|u(re^{it})|)\,dt = O(1)$ $(r \nearrow 1)$, $\int \psi(|v(re^{it})|)\,dt \underset{r \to 1}{\neq} O(1)$ i $\overline{\lim}\,|v(re^{it})| = \infty$ dla prawie wszystkich t. Funkcję analityczną $u(z)+iv(z)$ można zadać w postaci $\sum \frac{\pm z^{nk}}{1-z^{n}k}$. Gdy ciąg n_k jest wystarczająco szybko rosnący, to ta funkcja losowa ma wymaganą własność p.w. [57].

3. Losowy szereg Taylora $\sum_0^\infty \pm a_n z^n$, gdzie $\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n} = 1$ ma $|z| = 1$ jako naturalny brzeg p.w. ([58], inny piękny dowód zawarty jest w [60]).

4. Funkcja $f(t) = \prod^\infty \left(1 + i\frac{\cos 3^k t}{k}\right)$ ma następujące własności: sumy częściowe jej szeregu Fouriera są jednostajnie ograniczone, zbieżne są prawie wszędzie i rozbieżne quasi-wszędzie (tj. poza zbiorem pierwszej kategorii Baire'a) [115].

Lakunarne i losowe szeregi trygonometryczne same przez się są interesujące, szczególnie w odniesieniu do teorii prawdopodobieństwa. Przedstawimy teraz główne rezultaty Zygmunda dotyczące lakunarnych szeregów trygonometrycznych, szeregów niezależnych zmiennych losowych i losowych szeregów trygonometrycznych. Chociaż rozróżnienie tych tematów jest nieco arbitralne, omawiamy je z osobna.

Lakunarne szeregi trygonometryczne. Mówimy, że szereg trygonometryczny jest *lakunarny*, jeśli może być napisany w postaci

$$(\pm) \qquad \sum_0^\infty r_k \cos(n_k t + \varphi_k), \qquad \inf \frac{n_{k+1}}{n_k} = q > 1.$$

Taki szereg może reprezentować funkcję bardzo nieregularną (przykład Weierstrassa funkcji nigdzie nieróżniczkowalnej). Jednakże takie szeregi są globalnie regularne w sensie określonym przez następujące twierdzenia.

Jeśli $f \in L^1$ i $S(f)$ (szereg Fouriera funkcji f) jest lakunarny, to $f \in L^p$ dla wszystkich $p > 1$ (niekoniecznie $f \in L^\infty$); dokładniej $\exp \lambda |f|^2 \in L^1$ dla wszystkich $\lambda > 0$ [39]. Jeśli ponadto współczynniki Fouriera spełniają $\sum |\hat{f}(n)|^p < \infty$ $(p < 2)$, to $\exp \lambda |f|^{p'} \in L^1$ dla wszystkich $\lambda > 0$, gdzie $1/p + 1/p' = 1$ [69].

Jeśli lakunarny szereg trygonometryczny S jest sumowalny na zbiorze miary dodatniej metodą określoną przez macierz (β_{kl}), która spełnia warunki

$$\lim_{l \to \infty} \sum_{k=1}^\infty \beta_{kl} = 1, \qquad \lim_{l \to \infty} \beta_{kl} = 0,$$

to szereg S jest zbieżny prawie wszędzie i jest szeregiem Fouriera [40].

Zasadniczym punktem dowodu jest lemat, którego ostateczna forma jest następująca [112]: Jeśli E jest zbiorem miary dodatniej na odcinku $[0, 2\pi]$, $\lambda > 1$ i $q > 1$, to istnieje μ takie, że dla każdego wielomianu trygonometrycznego postaci $(\pm)$ gdzie $n_0 \geqslant \mu$, zachodzi

$$\frac{1}{\lambda} \sum r_k^2 < \frac{1}{|E|} \int_E |f|^2 < \lambda \sum r_k^2.$$

W konsekwencji mamy twierdzenie o jednoznaczności [52], [112], [116]: Jeśli lakunarny szereg trygonometryczny jest zbieżny do 0 na zbiorze E miary dodatniej, to jest szeregiem zerowym. Jeśli jest zbieżny na E do funkcji analitycznej (lub funkcji klasy C^∞), to jest szeregiem Fouriera funkcji analitycznej (lub klasy C^∞). Jeśli dwa lakunarne szeregi trygonometryczne (z różnymi ciągami n_k) są równozbieżne na E, to są równe.

Oto jest odpowiednik warunku różniczkowalności funkcji gładkich rzeczywistych (dowód jest całkiem odmienny): jeśli $r_k = o(1)$, to istnieje nieprzeliczalny i wszędzie gęsty zbiór wartości t, dla których szereg $(\pm)$ jest zbieżny [40].

Lakunarne szeregi potęgowe $\sum_0^\infty a_k z^{n_k}$ dają przykłady krzywych Peano. Jeśli szereg $\sum_0^\infty |a_k|$ jest zbieżny dostatecznie wolno i jeśli q jest wystarczająco duże, to obraz $|z| = 1$ pokrywa zbiór otwarty [95].

W przypadku $\sum |r_k^2| = \infty$ można badać rozkład $\dfrac{S_n(t)}{\left(\sum_1^n r_k^2\right)^{1/2}}$, gdzie $S_n(t) = \sum_1^n r_k \cos(nt+\varphi_k)$. W dość ogólnej sytuacji asymptotyczny rozkład jest gaussowski [105], [109] i zachodzi prawo iterowanego logarytmu

$$\overline{\lim} \frac{S_N(t)}{\sqrt{\sum_1^N r_k^2 \operatorname{loglog} \sum_1^N r_k^2}} = 1 \quad \text{p.w.}$$

([122], gdzie nierówność $\leqslant 1$ jest udowodniona, nierówność przeciwna została udowodniona przez Mary Weiss).

Ściśle powiązane z szeregami lakunarnymi są tak zwane iloczyny Riesza $\prod(1+r_k\cos(n_k t+\varphi_k))$. Zwykle zakłada się, że $q > 3$ i $0 \leqslant r_k \leqslant 1$. Taki iloczyn zawsze reprezentuje miarę dodatnią. W przypadku $\sum_1^\infty r_k^2 < \infty$ jest ona absolutnie ciągła, a w przypadku $\sum_1^\infty r_k^2 = \infty$ jest czysto osobliwa, a iloczyny częściowe zbieżne są do 0 p.w. [52].

Urojone iloczyny Riesza $\prod(1+ir_k\cos n_k t)$ zostały wprowadzone w [104] w celu podania prostego dowodu twierdzenia Banacha. Podaliśmy już piękny przykład funkcji skonstruowanej w ten sposób.

Szeregi niezależnych zmiennych losowych. Pod wieloma względami lakunarne szeregi trygonometryczne zachowują się jak szeregi niezależnych zmiennych losowych, dzięki temu, że wyrażenia $\cos n_k t$ są prawie niezależne. Wydać się może paradoksem, że tak wiele idei przenoszono z trudnego przykładu (szeregi lakunarne) do prostego przypadku (sumy niezależnych zmiennych losowych). Badania Zygmunda nad tą problematyką rozpoczęły się w istocie od pracy [40] i rozwijały się w latach 1937–1938 w serii prac wspólnych z Marcinkiewiczem. Wskażemy tylko kilka wyników i pomysłów [71], [74], [75].

1. Oto użyteczny lemat (ważny w późniejszej pracy z Salemem i ukryty w poprzedniej pracy z Paleyem): jeśli X jest dodatnią zmienną losową i $\lambda > 0$, to

$$P\left(X > \lambda E(X)\right) \geqslant (1-\lambda^2)\frac{E^2(X)}{E(X^2)}.$$

2. Dla każdego ciągu niezależnych zmiennych losowych X_n takiego, że $E(X_n) = 0$ i $S = \sum_1^N X_n$ istnieje prawie na pewno, to funkcja maksymalna $S^* = \sup \left| \sum_1^N X_n \right|$ spełnia nierówność $E(S^{*P}) \leqslant AE(|S|^P)$ $(p \geqslant 1)$, gdzie A jest absolutną stałą. Dla $p > 1$

$$E\left(\left(\sum X_n^2\right)^{1/2}\right) \leqslant A_p E(|S|^P).$$

3. Bez założenia $E(X_n) = 0$ zbieżność $\sum X_n$ według prawdopodobieństwa implikuje zbieżność prawie pewną. Sumowalność prawie pewna implikuje, że dla pewnego λ_n szereg $\sum (X_n - \lambda_n)$ jest zbieżny prawie na pewno („istotna zbieżność" w sensie P. Lévy'ego; rezultaty te zostały otrzymane przez P. Lévy'ego niezależnie nieco wcześniej). Sumowalność jest tutaj rozumiana w bardzo ogólnym sensie zaznaczonym powyżej (str. 106). Na przykład, jeśli szereg Taylora jest przedłużalny do punktu z_0, przez koło zbieżności, to jest sumowalny w z_0. Daje to nowy dowód nieprzedłużalności losowego szeregu Taylora $\sum \pm a_n z^n$ przez koło zbieżności (Ryll-Nardzewski).

4. Prawo iterowanego logarytmu (Chinczyn) stwierdza, co następuje: jeżeli X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi, $E(X_n) = 0$, $M_n = \sup |X_n|$, $B_n = E(X_1^2) + \ldots + E(X_n^2)$, $\lim B_N = \infty$ i $M_n = o\sqrt{B_n/\log\log B_n}$, to $\lim \sum_1^n X_n/\sqrt{2B_n \log\log B_n} = 1$ prawie na pewno. W [74] udowodnione jest za pomocą przykładu (postaci $X_n = \pm a_n$), że warunek na M_n nie może być zastąpiony przez $M_n = O\sqrt{B_n \log\log B_n}$. Prawo iterowanego logarytmu pojawia się w wielu pracach od 1930 do 1954 r.

Losowe szeregi trygonometryczne. Wspomnieliśmy już o pracy [60]. Znajduje się tam dość ogólna zasada dotycząca szeregów $\sum_1^\infty X_n \cos(nt + \varphi_n)$, gdzie X_n są symetrycznymi niezależnymi zmiennymi losowymi: jeśli taki szereg ma prawie na pewno własność P na pewnym przedziale, to ma tę własność prawie na pewno i wszędzie (przy pewnych warunkach na P).

Wszystkie inne prace dotyczące tej problematyki powstały w wyniku współpracy z Paleyem lub Salemem.

Prace: *O pewnych szeregach funkcji* [41], [58] dotyczą ogólnych własności szeregów $\sum \pm c_n f_n x$ lub szeregów $\sum e^{2\pi i \omega_n} c_n f_n(x)$, gdzie f_n są danymi funkcjami, c_n — współczynnikami, znaki $\pm$ są losowo niezależne, a ω_n są losowo niezależne na odcinku [0, 1] z naturalnym prawdopodobieństwem. Na przykład jeśli

$$\sup \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx < \infty \qquad \text{oraz} \qquad \liminf \int_E |f_n(x)|^2 dx > 0$$

dla każdego zbioru E miary dodatniej, to mamy następującą alternatywę: jeśli $\sum |c_n|^2 < \infty$, to szereg $\sum \pm c_n f_n(x)$ jest zbieżny prawie na pewno, prawie wszędzie do (losowej) funkcji $f \in L^2(0, 1)$, jeżeli zaś $\sum |c_n|^2 = \infty$, to szereg $\sum \pm c_n f_n(x)$ jest

prawie na pewno niesumowalny za pomocą żadnej danej metody sumacyjnej.

W przypadku $f_n(x) = \cos nx$ lub $\sin nx$ własności tych szeregów zbadane są szczegółowiej: Warunki: a) $\sum |c_n|^2 < \infty$, b) $\sum \pm c_n f_n(x)$ jest prawie na pewno szeregiem Fouriera, c) $\sum \pm c_n f_n(x)$ jest prawie na pewno szeregiem Fouriera funkcji $f \in \bigcap_{1 \leqslant p < \infty} L^p$ (lub nawet $\exp \lambda |f|^2 \in L^1$ dla wszystkich $\lambda > 0$) są równoważne. Warunkiem dostatecznym dla jednostajnej zbieżności jest to, że $\sum |c_n|^2 \log^{1+\varepsilon_n} < \infty$, a warunkiem koniecznym jest $\sum \left(\sum_{2^j}^{2^{j+1}} |c_n|^2 \right)^{1/2} < \infty$ (dowód stosuje się do przypadku szeregu $\sum e^{2\pi i \omega_n} c_n \cos nx$; przypadek $\sum \pm c_n \cos nx$ opiera się na pewnym rezultacie P. Billarda (1960).

Praca [133] poprawia powyższy warunek dostateczny i bada takie zagadnienia, jako prawo iterowanego logarytmu i centralne twierdzenie graniczne. Bardzo ważnym narzędziem jest oszacowanie rozkładu P $(M > \lambda)$, gdzie M jest normą supremum losowego wielomianu trygonometrycznego. Był to punkt wyjściowy badań kilku autorów.

Ważnym uzupełnieniem [41] i [58] jest wspólna praca z Paleyem i Wienerem [61] o szeregach Fouriera i Taylora z gaussowskimi współczynnikami. Znajdujemy tam pierwszy publikowany dowód nieróżniczkowalności w żadnym punkcie prawie każdej realizacji ruchu Browna. Zwróćmy się teraz w innym kierunku.

Metody zespolone i funkcje sprzężone. Wspominaliśmy już o pewnych własnościach szeregów sprzężonych lub funkcji sprzężonych odkrytych przez Zygmunda. Rozważane są one w bardzo wielu spośród jego prac. Dobrym wstępem do nich jest praca przeglądowa [90]. Wskazuje ona trzy główne tendencje: a) metoda klas H^p, b) metoda reprezentacji konformicznych, c) metoda Littlewooda–Paleya. Wyłączmy punkt b) z naszego omówienia (mimo że dostarcza jedynego przykładu rysunku w całej opublikowanej twórczości Zygmunda (patrz [151], II, s. 200)(2). Klasy Hardy'ego H^p $(0 < p < \infty)$ składają się z takich funkcji analitycznych w kole jednostkowym $|z| < 1$, że $\int |F(re^{it})|^p dt$ jest ograniczone, gdy $r \to 1$. Mają one niestyczne wartości brzegowe prawie wszędzie, $F(e^{it}) = f(t) + i\tilde{f}(t)$. Jeśli $f \in L^1$, to $\tilde{f}$ jest niczym innym, jak tylko transformatą Hilberta funkcji f.

M. Riesz udowodnił, że $\tilde{f} \in L^p$, gdy $f \in L^p$ dla $1 < p < \infty$. Nie jest to już prawdziwe dla $p = 1$ lub $p = \infty$. Te graniczne przypadki są badane w [35] (por. także [54]). Jeśli $f \in L^\infty$ i $\|f\|_\infty \leqslant 1$, to $\exp \lambda \tilde{f} \in L^1$ dla każdego $0 < \lambda < \pi/2$. Jeżeli $f \lg^+ f \in L^1$, to $\tilde{f} \in L^1$.

W przypadku gdy $f \in L^1$, $\tilde{f}$ istnieje p.w. i $|\tilde{f}|^p \in L^1$ dla każdego $p \in (0, 1)$, ale niekoniecznie dla $p = 1$ (Kołmogorow). Że nie można wyjść poza L^1, wynika z konstrukcji podanej w [57] (szereg losowy).

Przypadek, gdy f i $\tilde{f}$ są sumowalne, był badany [76] i od tamtej pory rezultaty

(2) Gorliwy celnik pewnego razu zauważył wykres funkcji zębatej wśród papierów Zygmunda i błędnie wziął to za projekt bomby wodorowej. Aby wybrnąć z sytuacji, Zygmund musiał objaśnić celnikowi lokalne twierdzenie Fatou–Priwałowa.

zawarte tam nie zostały ulepszone. Napiszmy $F = f + i\tilde{f}$ oraz $S_n = \sum_0^n \hat{F}(j)e^{ijt}$. Mamy

(1) $$\lim S_{2^k} = F \quad \text{p.w.},$$

(2) $$\tfrac{1}{2}\sum_1^n |S_j - F|^2 \to 0 \quad \text{p.w.},$$

(3) S_n zbieżne jest aproksymatywnie do F p.w.

(4) Jeśli ponadto $F\log^+|F| \in L^1$, to $\sup|S_{2^k}| \in L^1$.

W dowodzie (4) używa się metody Littlewooda–Paleya. Wynik ten został opublikowany najpierw jedynie jako uzupełnienie podobnych rezultatów otrzymanych przez Littlewooda i Paleya, a później przez Zygmunda w pracy [77] o szeregach Fouriera $f \in L^p$ $(p > 1)$. Rezultaty te są zawarte w wersji Hunta twierdzenia Carlesona (1967): szereg Fouriera funkcji $f \in L^p$ $(p > 1)$ jest zbieżny prawie wszędzie. Dla $p = 1$ istnieje słynny przykład Kołmogorowa funkcji $f \in L^1$, której szereg Fouriera jest wszędzie rozbieżny, więc twierdzenie Zygmunda o zbieżności funkcji $f \in H'$ zachowuje swoją moc.

Funkcje Littlewooda–Paleya, Łuzina i Marcinkiewicza. Wspomnieliśmy już o teorii Littlewooda-Paleya w odniesieniu do sumowalności szeregów Fouriera i Taylora [76], [77]. Poza tym istnieje wiele prac Zygmunda odnoszących się do teorii Littlewooda–Paleya [80], [93], [97], [146]. Niektóre z nich dotyczą klas Hardy'ego H^p, gdzie $0 < p < 1$.

„Klasyczna" teoria Littlewooda–Paleya dzieli się na dwie części: (a) oszacowania typu L^p dla pomocniczych operatorów określonych w terminach funkcji harmonicznych lub analitycznych, (b) zastosowanie tych pomocniczych operatorów do dowodów twierdzeń o szeregach Fouriera.

Te operatory pomocnicze były z początku określane dla funkcji analitycznych w kole jednostkowym. Nieco przejrzystsze są analogiczne operatory dla funkcji harmonicznych $u(x, y)$ określonych w półpłaszczyźnie $y > 0$ (oznaczonej R^2_+), mianowicie

$$g(x) = \Big(\int_0^\infty t|\nabla u(x,t)|^2 dt\Big)^{1/2},$$

$$s(x) = \Big(\iint_{|y-x|<t} |\nabla u(y,t)|^2 dy\, dt\Big)^{1/2},$$

$$g^*(x) = \left(\iint_{R^2_+} \left(\frac{t}{|x-y|+t}\right)^2 |\nabla u(y,t)|^2 dy dt\right)^{1/2}.$$

Dla funkcji harmonicznych $u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ określonych w kole $r < 1$ rozważamy

$$g(\theta) = \left(\int_0^1 (1-r)|\nabla u(r\cos\theta, r\sin\theta|^2 dr\right)^{1/2}$$

i odpowiednie $s(\theta)$ i $g^*(\theta)$. Wszędzie tu u jest całką Poissona funkcji f (f w pierwszym przypadku jest określone na prostej, w drugim na okręgu). Funkcje g i g^* zostały wprowadzone przez Littlewooda i Paleya, którzy zauważyli, że $g(\theta) \leqslant 2g^*(\theta)$ i udowodnili nierówności postaci $\|g\|_p \leqslant C_p\|f\|_p$ dla $p > 1$ i $\|g^*\|_p \leqslant C_p\|f\|_p$ dla $p = 2, 4, 6, \ldots$ Funkcja s została wprowadzona przez Łuzina, który udowodnił, że $\|s\|_2 \leqslant C\|f\|_2$; ma ono prostą geometryczną interpretację i często nazywana jest całką obszaru.

Prace [77] i [76] dotyczą części b) programu. Ich ideą jest oszacowanie funkcji

$$\gamma(\theta) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|S_n(\theta)-\sigma_n(\theta)|^2}{n+1}\right)^{1/2}$$

w terminach $g(\theta)$ (S_n są częściowymi sumami Fouriera, a σ_n sumami Cesàro–Fejéra f). Wynika stąd łatwo wcześniejszy rezultat Littlewooda i Paleya $\lim S_{2^k}(\theta) = f(\theta)$ p.w., jeśli $f \in L^P$ ($p > 1$), i nie publikowane twierdzenie Paleya o aproksymatywnej zbieżności, gdy $f \in L^P$ [77]. Przytoczyliśmy już odpowiednie wyniki otrzymane dla $f \in H^1$ [76].

Znacznie później, w 1956 r. [146], Zygmund powrócił do tej tematyki. Praca [146] zawiera różne niespodzianki. Główną jest to, że dwie funkcje, które występują w teorii Littlewooda–Paleya, wytrzymały próbę czasu, mianowicie g^* i γ są w zasadzie identyczne, mianowicie $c \leqslant g^*/\gamma \leqslant C$ w każdym punkcie. Łatwo to udowodnić bezpośrednio rachunkiem, gdy się już wie, że tak jest. Ponadto pewne modyfikacje g^* i γ zostały użyte do badania sum Cesàro szeregów Fouriera funkcji z H^p ($0 < p < 1$). Wynikające stąd nierówności, udowodnione niezależnie przez G. Sanouchi, dają nowy dowód wcześniejszego twierdzenia Zygmunda [89]: jeśli $f \in H^p$ ($0 < p < 1$), to sumy Cesàro $\sigma_n^\alpha(f)$ dążą do f p.w., gdy $\alpha = 1/p-1$ (to jest wynik najlepszy z możliwych; przypadek $\alpha > 1/(p-1)$ był rozpatrywany już przez Hardy'ego i Littlewooda).

Funkcja Łuzina s jest rozważana w [80]. Marcinkiewicz i Zygmund dowodzą, że jeśli funkcja u jest analityczna w kole, to $\|s\|_{L^p} \leqslant C_p\|u\|_{H^p}$ dla wszystkich p, $0 < p < \infty$ (to samo zachodzi dla górnej półpłaszczyzny). Znowu w dowodzie używa się $g(\theta)$ jako decydującego narzędzia.

Tytuł [93] *O pewnych całkach* jest niejasny. Praca zawiera dwa istotne wyniki. Po pierwsze uzupełnia nierówności Littlewooda–Paleya dowodząc, że $\|g^*\|_p \leqslant C_p\|f\|_p$ dla wszystkich p, $1 < p < \infty$. Po drugie, wykorzystuje g^* do udowodnienia, że $\|\mu\|_p \sim \|f\|_p$, gdzie μ jest tak zwaną „całką Marcinkiewicza" określoną przez

$$\mu(x) = \left(\int_0^\infty \frac{|F(x+t)-F(x-t)-2F(x)^2|}{t^3}\, dt\right)^{1/2};$$

funkcja F jest tu całką nieoznaczoną funkcji f (Marcinkiewicz wprowadził μ jako

odpowiednik g zdefiniowany wyłącznie za pomocą pojęć teorii zmiennej rzeczywistej bez użycia funkcji zespolonych analitycznych lub harmonicznych).

W [97] podany jest nowy dowód nierówności $\|g\|_p \leqslant C_p\|f\|_p$ używający raczej funkcji harmonicznych niż analitycznych.

Opiera się on na pomysłowym zastosowaniu twierdzenia Greena z rachunku różniczkowego wraz z tożsamością $\Delta|u|^2 = C|\nabla u|^2$, która zachodzi dla funkcji harmonicznych. Dowód ten odegrał ważną rolę w dalszych uogólnieniach.

Prace [80] i [93] są związane także z promienistym zachowaniem się funkcji analitycznych i lakunarnych oraz losowych szeregów Taylora. W [80] udowodniono, używając funkcji $g(\theta)$, że wahanie funkcji analitycznej $u \in H^p$ $(p > 0)$ w kole jednostkowym na promieniu od początku układu do $re^{i\theta}$ jest $O\left(\sqrt{|\log(1-r)|}\right)$ dla prawie każdego θ. Ograniczenie to jest istotne nawet dla $u \in H^2$, a kontrprzykładem jest pewien lakunarny lub losowy szereg Taylora [93] podobny do szeregów rozpatrywanych w pracy [61] napisanej z Paleyem i Wienerem.

W historii teorii Littlewooda i Paleya nastąpił zwrot, gdy pojawiły się całki osobliwe. Od razu, gdy w 1952 r. ukazała się praca Calderóna i Zygmunda [131], było jasne, że technika tam użyta ma znacznie szersze zastosowanie niż tylko do uzyskania wyników tej pracy. Wkrótce potem E. Stein odkrył, że można jej użyć do udowodnienia n-wymiarowych uogólnień nierówności dla g, s, g^*, μ itd. metodami teorii zmiennej rzeczywistej. Później prace Hörmandera, J. T. Schwartza i Benedecka–Calderóna–Panzone pokazały, że w rzeczywistości g, s, μ są całkami osobliwymi, gdzie osobliwe jądra splotowe przyjmują wartości w przestrzeni Hilberta. Funkcja g^* jest nieco bardziej skomplikowana, ale technika zmiennej rzeczywistej dalej się stosuje. Tak więc badania Zygmunda nad całkami osobliwymi przeobraziły całą treść teorii Littlewooda–Paleya.

Wartości brzegowe funkcji analitycznych i harmonicznych. Funkcji harmonicznych i analitycznych $u(z)$ w kole jednostkowym $|z| < 1$ używa się bardzo często w teorii szeregów Fouriera (patrz [90]). Rozpatrywaliśmy już niektóre prace dotyczące wartości brzegowych takich funkcji [57], [80], [93] (ostatnia część); patrz także [118], [158]. Badania te prowadziły do nowych rozwinięć funkcji analitycznych wielu zmiennych lub funkcji harmonicznych więcej niż dwóch zmiennych [117], [120], [123], [162], [163], [170].

Punktem wyjścia jest [117] (1949). Niech $f(z)$ $(z = (z_1, z_2, \ldots, z_k))$ będzie funkcją analityczną w polidysku $|z_1| < 1, \ldots, |z_k| < 1$. Gdy f jest funkcją ograniczoną, to zachodzi odpowiednik twierdzenia Fatou, tzn. dla prawie każdego $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ na wyróżnionym brzegu $(|\zeta_1| = |\zeta_2| = \ldots = |\zeta_k| = 1)$ istnieje granica kątowa $f(\zeta) = \lim_{z \to \zeta} f(z)$ (oznacza to, że z_j dąży niestycznie do ζ_j w kole $|z_j| < 1$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Rezultat ten jest prawdziwy dla dogodnie zdefiniowanego odpowiednika klasy Nevanlinny, tzn. kiedy

$$(\mp) \qquad \sup_r \int_{T^k} \log^+|f(re^{i\theta})|\left(\log^+\log^+|f(re^{i\theta})|\right)^{k-1} d\theta < \infty,$$

gdzie $r = (r_1, \ldots, r_k) \in [0, 1]^k$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in T^k$ i $re^{i\theta}$ oznacza $(r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, r_k e^{i\theta_k})$. Ponadto, gdy $f \in H^p$ $(p > 0)$, tzn.

$$\sup_r \int_{T^k} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty,$$

to

$$\lim_{r \to 1} \int_{T^k} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0$$

$(r \to 1$ oznacza, że $r_j \to 1$ dla każdego $j)$.

Wydaje się, że warunek $(\neq)$ nie może być osłabiony. Jednakże słabszy warunek

$$(\overset{\neq}{+}) \qquad \sup_r \int_{T^k} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty$$

(który określa klasę Nevanlinny tak samo jak $(\neq)$, gdy $k = 1$) gwarantuje słabszą formę zbieżności prawie wszędzie, tj. $\lim_{z \to \zeta} f(z)$ istnieje, gdy z_j dąży do ζ_j niestycznie i wszystkie liczby $1 - |z_j|$ są porównywalne [123]. Mimo że metody się różnią, rezultaty te przypominają odpowiednie wyniki dotyczące silnej lub ograniczonej różniczkowalności całek wielokrotnych [65], [168], i silnej lub ograniczonej sumowalności wielokrotnych szeregów Fouriera [85], [106].

Praca [120] dotyczy sfery zamiast polidysku i używając rozumowania Calderóna podaje naturalny analogon klasy Nevanlinny dla sfery.

Istotne we wszystkich przypadkach jest to, że $\log^+ \left(f(x_1 + iy_1, \ldots, x_k + iy_k)\right)$ jest funkcją podharmoniczną $2k$ zmiennych $x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k$.

W 1960 r. E. Stein i G. Weiss rozważali odpowiedni problem dla gradientów funkcji harmonicznych $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (gdy $n = 2$, funkcja ∇u może być uważana za funkcję analityczną $x_1 + ix_2$, dlatego gradienty funkcji harmonicznych są jedynym z możliwych uogólnień funkcji analitycznych zmiennej zespolonej). Udowodnili oni, że $|\nabla u|^p$ jest podharmoniczna dla pewnych $p < 1$, a mianowicie dla $p \geqslant \frac{n-2}{n-1}$. Mimo że ta nierówność jest możliwie najlepsza, to [162] podaje jej uogólnienie przez rozważanie wyższych gradientów $\nabla^k u$ funkcji harmonicznych (można uważać $\nabla^k u$ za wektor, którego współrzędnymi są wszystkie różne pochodne rzędu k funkcji harmonicznej u): funkcja $|\nabla^k u|$ jest podharmoniczna, o ile $p \geqslant \frac{n-2}{n-1+k}$. Dało to zaczątek teorii klas H^p w półprzestrzeniach R_n^+, która była później rozwijana za pomocą metod zmiennej rzeczywistej (Fefferman, Stein) lub metod martyngałowych (Burkholder, Gundy, C. Herz).

Całki osobliwe. Od czasu ukazania się pracy Calderóna i Zygmunda w 1952 r. teoria całek osobliwych stała się bardzo popularna i ważna. Odświeżyła ona starsze zagadnienia, takie jak teoria Littlewooda–Paleya i stworzyła jedno z najsilniejszych

narzędzi w teorii równań różniczkowych cząstkowych (jak przypuszczał Giraud już w 1936 r., patrz nota bibliograficzna w [147]). Wiele prac poświęconych jest tej tematyce: [131], [133], [139], [141], [142], [144], [147], [148], [149], [165], [179]. Ponadto [178] jest krótką rozprawą o tym przedmiocie, a całki osobliwe są używane w wielu innych pracach, jak [162], [163], [164]. Praca [147] jest artykułem przeglądowym, który omawia stan i smak tego przedmiotu w 1958 r. wkrótce po ukazaniu się podstawowych prac [131] i [141] (wspólnych z Calderónem).

Oto oznaczenia: litery $x, y, \ldots$ oznaczają wektory w przestrzeni euklidesowej E_n, $|x|$ jest normą x, i $x' = x|x|^{-1}$ jest rzutem x na sferę jednostkową Σ. Jądrem jest $K(x) = \Omega(x')|x|^{-n}$, gdzie Ω jest daną funkcją ze średnią wartością 0 na Σ. $K_\varepsilon(x)$ oznacza jądro obcięte, które jest zdefiniowane jako $K(x)$, gdy $|x| \geqslant \varepsilon$ i 0, gdy $|x| < \varepsilon$.

Gdy dana jest funkcja f określona na E_n, $f * K_\varepsilon$ oznacza splot, o ile istnieje. Problem polega na określeniu i badaniu $\tilde{f} = \lim_{\varepsilon \to 0} f * K_\varepsilon$ z odpowiednim pojęciem zbieżności.

Gdy $n = 1$, całka osobliwa jest niczym innym jak transformatą Hilberta i $\tilde{f}$ jest zwykłą funkcją sprzężoną do f. Ta sytuacja jest dobrze znana. Gdy $n > 1$ i $\Omega(-x') = -\Omega(x')$ (jądro nieparzyste), to używając przypadku jednowymiarowego (transformaty Hilberta) i metody obrotu (wprowadzonej w [141]) można udowodnić co następuje: gdy $\Omega \in L^1(\Sigma)$, Ω nieparzyste i $f \in L^p(E_n)$ $(p > 1)$, to $\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f * K_\varepsilon(x)$ istnieje prawie wszędzie i również $\tilde{f} = \lim_{\varepsilon \to 0} f * K_\varepsilon$ w $L^p(E_n)$.

W ogólnym przypadku Ω jest sumą jądra nieparzystego i parzystego, i metoda obrotu w swej prostej formie stosuje się jedynie do części nieparzystej. Część parzystą można badać przez rozpatrywanie operatora, który pojawia się jako superpozycja dwóch operatorów o jądrach nieparzystych.

Transformata Fouriera rzuca dużo światła na te operatory. Jeśli $\Omega \log^+ |\Omega| \in L^1(\Sigma)$, to transformata Fouriera $\hat{K}_\varepsilon$ („symbol" jądra K) może być zdefiniowana jako funkcja ograniczona (w rzeczywistości jednorodna stopnia 0), $\hat{K}_\varepsilon$ są jednostajnie ograniczone i punktowo zbieżne do $\hat{K}$, gdy $\varepsilon \to 0$, dlatego $\tilde{f} = \lim f * K_\varepsilon$ w L^2, o ile $f \in L^2$ [131]. Ponadto $\tilde{f} = \lim f * K_\varepsilon$ w L^p i punktowo prawie wszędzie, o ile $f \in L^p$ $(1 < p < \infty)$ [141]. Decydująca rola warunku $\Omega \log^+ |\Omega| \in L^1(\Sigma)$ została wyjaśniona później [165].

Istnieje wiele pokrewnych rezultatów i uogólnień. W szczególności rozważa się istnienie ogólniejszej całki osobliwej $Tf(X) = \int_{E_n} K(x, y) f(y)\, dy$. W tym przypadku $K(x, y) = \Omega(x, z')|z|^{-n}$, gdzie $z = x - y$ i dla każdego x w E_n funkcja $\Omega(x, \cdot)$ ma średnią wartość 0 na Σ. Oto typowy rezultat: jeśli $\sup_x \int_\Sigma |\Omega(x, z)|^2 dz' < \infty$ i $f \in L^2(E_n)$, to funkcja $Tf(x)$ może być zdefiniowana jako główna wartość prawie wszędzie i $\|Tf\|_2 \leqslant A\|f\|_2$; zawiera to rozwiązanie problemu Michlina ([139]–[149]), a różne uogólnienia z normami L^p i L^q zamiast L^2 są zawarte w [141]. Tam symbol jądra K jest zdefiniowany jako transformata Fouriera $\Omega(x, z')|z|^{-n}$ względem z.

Przypadek funkcji okresowych f rozpatrywany jest w [138] z jądrem $K(x) = \Omega(x')|x|^{-n}$. Obejmuje to przypadek transformaty Hilberta na torusie (to jest może najprostsze ujęcie problemu, nawet gdy $n = 1$). Ważny jest tutaj warunek gładkości na Ω, tzn. warunek Diniego na moduł ciągłości $\int_0^1 \omega(t)dt/t < \infty$.

Warunek Diniego występuje już w [131] i jego rola jest dobrze wyjaśniona w pracy [ ](3) z Calderónem i Mary Weiss. Podaje ona słabe oszacowania w L^1 typu

$$\text{meas}\{x| \, |\tilde{f}(x)| > y\} < A\|f\|_1.$$

Bez żadnych warunków regularności oszacowania w L^p $(p > 1)$ pozostają jeszcze w mocy, ale przypadek graniczy $p = 1$ nie poddaje się rozwiązaniu.

Mimo że nie jest możliwe opisanie metod, to może warto poświęcić chwilę ukazaniu głównych narzędzi używanych w tej teorii.

Zaznaczyliśmy już rolę transformat Fouriera (dla $p = 2$) i metody obrotu (gdy Ω jest nieparzyste). Pierwotna idea w [131] polega na otrzymaniu słabych jednostajnych oszacowań w L^p dla $f*K_\varepsilon$ $(p \geqslant 1)$ i użycia ich dla otrzymania silnych oszacowań w L^p $(p > 1)$ i zbieżności prawie wszędzie. Teoria interpolacyjna Marcinkiewicza jest więc istotnie potrzebna. Ciekawe jest, że pierwsze syntetyczne omówienie interpolacyjnej teorii Marcinkiewicza powstało dopiero w 1956 r. [145], ale już od 1951 r. Calderón i Zygmund wspólnie badali interpolację operacji, w tym samym czasie co całki osobliwe [125], [140].

Słabe oszacowania w L^1 opierają się na dwóch lematach, które same w sobie są bardzo interesujące (lematy I i II, s. 488, w [147]). Pierwszy jest przypisywany Marcinkiewiczowi i stwierdza, że:

$$I(x) = \int_{\Delta} \frac{\delta^\lambda(y)}{|x-y|^{n+\lambda}}\, dy < \infty$$

dla prawie wszystkich x w E^n, gdzie $\delta(y)$ jest odległością y od danego zbioru doskonałego P w E^n, Δ kulą zawierającą P, a $\lambda > 0$. Drugi jest lematem pokryciowym Calderóna–Zygmunda: jeśli I jest kostką w E_n, $f \in L^1(I)$ i $y > 0$ jest duże, to istnieje ciąg rozłącznych podkostek I_k takich, że $|f| < y$ prawie wszędzie w $I \setminus \sum I_k$ i wartość średnia $|f|$ na każdym I_k jest zawarta między y a $2^n y$.

Równania różniczkowe cząstkowe. Te same fragmenty pojawiają się w kilku pracach wspólnych z Calderónem poświęconych równaniom różniczkowym cząstkowym [148], [156], [157].

Związek między równaniami różniczkowymi a operatorami osobliwymi jest następujący. Jeśli P jest liniowym operatorem cząstkowo różniczkowym z gładkimi współczynnikami i jednorodnego stopnia m, to $P = HA^m$, gdzie A jest pierwiastkiem

(3) Być może [166] lub [167], których brak na naszej liście. Chodzi o pracę: „On the existence of singular integrals", A. P. Calderón, Mary Weiss, A. Zygmund, in Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, AMS, vol. 10, Singular Integrals.

kwadratowym laplasjanu, a H jest operatorem osobliwym. Mianowicie jeśli $P(u) = \sum a_\alpha(x) D_\alpha u$, gdzie $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ oraz $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = m$, to $P(u) = H\Lambda^m u$, gdzie H jest osobliwym operatorem całkowym z symbolem $\sigma(H) = (-1)^m \sum a_\alpha(x) z^\alpha |z|^{-m}$ $(z = (z_1, \ldots, z_n) \in E^n)$ [148]. Ponadto złożenie operatorów odpowiada zwykłemu mnożeniu symboli, co jest obecnie już klasyczne w równaniach różniczkowych cząstkowych. Praca [157] (streszczona w [156]) bada lokalne własności rozwiązań eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych. Wprowadza ono pojęcie różniczkowalności dobre do badania całek osobliwych. Dla $x_0 \in E_n$, $p > 1$ i całkowitego $v \geqslant 0$ klasa $T_v^p(x_0)$ lub $t_v^p(x_0)$ składa się ze wszystkich funkcji $f \in L^p(E_n)$, które spełniają następujący warunek: dla pewnego wielomianu P stopnia $< v$ (stąd $P = 0$, gdy $v = 0$).

$$\left(\varrho^{-n} \int\limits_{|x-x0|<\varrho} |f-P|^p dx\right)^{1/p} = O(\varrho^v) \quad \text{(lub odpowiednio } o(\varrho^v) \ (\varrho \to 0).$$

Inymi słowy, $f \in t_v^p(x_0)$ oznacza, że f ma pochodną Peany rzędu v w sensie L^p (a w zwykłym sensie, gdy $p = \infty$).

Oto typowy rezultat: Przypuśćmy, że w dystrybucyjnym sensie

$$\mathscr{L} f = \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha(x) D_\alpha f = g,$$

gdzie $\mathscr{L}$ jest operatorem eliptycznym ze współczynnikami w $T_v^\infty x_0$, a $g \in T_v^p$ $(1 < p < \infty)$ dla x_0 z pewnego zbioru Q o dodatniej mierze Lebesgue'a w E_n. Wtedy $f \in t_{v+m}^p(x_0)$ prawie wszędzie na Q. Kilka subtelniejszych wyników uwzględniających niecałkowite wartości v i różne wykładniki p znajduje się w [157]. Główna idea, interesująca już w prostym przypadku $n = 1$, polega na tym, że dobry osobliwy operator całkowy S odwzorowuje funkcję, która należy do $T_v^p(x_0)$ dla wszystkich $x_0 \in Q$, na funkcję $S(f)$, która należy do $T_v^p(x_0)$ dla prawie wszystkich $x_0 \in Q$. Nie jest tak nawet dla transformaty Hilberta, gdy $p = \infty$, i dlatego wprowadzenie klas T_v^p ma doniosłe znaczenie.

Prace [156] i [157] zawierają także rezultaty dotyczące poszczególnych punktów x_0; w tych zagadnieniach trzeba używać także niecałkowitych v. Nowe rezultaty otrzymuje się nawet dla rozwiązania równania Laplace'a $\Delta f = g$. Na przykład, jeśli funkcja g jest ciągła w danym punkcie x_0, to każde rozwiązanie równania $\Delta f = g$ ma pochodne ciągłe w otoczeniu x_0 i gładkie w x_0 [156].

Interpolacja operatorów. Obecnie są już bardzo dobrze znane dwa główne twierdzenia o interpolacji. Oba dotyczą liniowych operatorów T przeprowadzających proste funkcje mierzalne na funkcje mierzalne. Twierdzenie Riesza–Thorina mówi, że jeśli nierówność $\|Tf\|_q \leqslant \|f\|_p$ jest prawdziwa dla wszystkich prostych f, gdzie $p = p_j$ i $q = q_j$ $(j = 1, 2)$, to jest również prawdziwa, o ile punkt $(1/p, 1/q)$ leży na odcinku łączącym $(1/p_1, 1/q_1)$ i $(1/p_2, 1/q_2)$. Twierdzenie Marcinkiewicza mówi, że jeśli operator T jest słabego typu (p, q), gdzie $p = p_j$ i $q = q_j$ $(p_j \leqslant q_j)$, to jest silnego typu (p, q), gdy $(1/p, 1/q)$ leży na tym samym odcinku, tzn. jest wtedy $\|Tf\|_q \leqslant A_{pq}\|f\|_p$.

Praca [94] — wspólna z J.D. Tamarkinem — podaje dowód twierdzenia Riesza–Thorina za pomocą zmiennych zespolonych i twierdzenia Hadamarda o trzech prostych.

W [145] znajdują się dowody i nowe zastosowania twierdzenia, które Marcinkiewicz w 1939 r. zaledwie wysłowił. Mimo że spotykano się z nierównościami słabego typu, od długiego czasu (istotne w twierdzeniu Kołmogorowa orzekającym, że funkcja $\tilde{f}$ sprzężona z funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a jest całkowalna w sensie Denjoy, było odkrycie, że transformata Hilberta jest słabego typu (1, 1)), wszystkie nowe rezultaty dotyczące słabych przestrzeni L^p i ich uogólnień (przestrzenie Lorentza, badane przez Calderóna) mają swój początek w tej pracy.

Wyniki te są typowe, ale istnieją inne prace dotyczące interpolacji powstałe w latach 1939–1956 [84], [110], [124], [125], [131].

Niektóre ostatnie wyniki. Zakończymy krótkim omówieniem dwóch ostatnich prac A. Zygmunda [175], [176].

Dotyczą one podwójnych szeregów trygonometrycznych

$$(\emptyset) \qquad \sum c_\nu e^{2\pi i(\nu,\xi)} = \sum_R \sum_{|\nu|=R} c_\nu e^{2\pi i\nu\xi} = \sum_R A_R(\xi).$$

Obie prace były inspirowane przez pracę Cooke'a (1971), w której dowodzi się nierówności

$$(*) \qquad \int_{T^2} |A_R(\xi)|^4 d\xi \leqslant 5 \Big(\sum_{|\nu|=R} |c_\nu|^2 \Big)^2$$

i stosuje się ją do problemu jednoznaczności dla podwójnych szeregów trygonometrycznych.

W [176] nierówność (*) stosuje się do tak zwanych twierdzeń o restrykcji, tzn. oszacowań pewnej normy $L^p(\mu)$ transformaty Fouriera funkcji $f \in L^p$, gdzie μ jest zwykle pewną miarą równo rozłożoną na okręgu lub sferze lub jest miarą powierzchniową na pewnej krzywej. W tym zakresie Ch. Fefferman i E. Stein i ostatnio P. Sjölin i T. Tomas otrzymali najlepsze możliwe wyniki. Nierówność (*) nie ma ciągłego odpowiednika, jak pokazuje miara równo rozłożona na okręgu.

Wynik pracy [175] związany jest z problemem jednoznaczności. W przypadku zwykłego szeregu trygonometrycznego, ze zbieżności na zbiorze miary dodatniej wynika bardzo łatwo, że współczynniki są zbieżne do zera. To jest prawdziwe również dla szeregu (Ø), ale dowód jest całkiem inny i polega na podwójnej nierówności:

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{|\nu|=R} |c_\nu|^2 \leqslant \int_E |A_R(\xi)|^2 d\xi \leqslant \lambda \sum_{|\nu|=R} |c_\nu|^2,$$

a więc na nierówności takiego typu, jaki pojawia się w teorii szeregów lakunarnych. Problem jest dalej otwarty dla wyższych wymiarów.

Jest rzeczą interesującą prześledzić, jak w tych ostatnich pracach zastosowano do owych problemów metody rozwinięte już dawno w innych celach.

Nasz przegląd jest już dość długi. Jednakże, jak powiedzieliśmy na początku, jest daleki od pełności. Wyjaśnijmy w zakończeniu, dlaczego tak jest i czym można by go uzupełnić.

Po pierwsze, istnieje szereg prac, których nie rozpatrywaliśmy, a pośród nich kilka wspólnych prac z Marcinkiewiczem lub z Salemem (najważniejsza to [103]).

Po drugie, nie każdy wynik Zygmunda może być znaleziony w jego pracach. Niektóre pojawiły się w pracach jego uczniów lub innych matematyków (przykład jest podany na str. 102).

Po trzecie, Zygmund ukazywał pracę innych matematyków czasami (patrz przypisek na str. 97) w ten sposób, że ukrywał własny w niej udział. Musimy tu wymienić Marcinkiewicza, który był jego uczniem przed wojną. Prawdopodobnie część prac Marcinkiewicza byłaby nieznana, w szczególności prace o interpolacji operatorów, gdyby nie zostały dopracowane przez Zygmunda.

A oto główna luka w naszym omówieniu: Pozostawiliśmy na uboczu wszystkie prace Zygmunda o innych matematykach: o polskich matematykach okresu 1919–1939 [126]; o Marcinkiewiczu [153] (patrz także angielskie tłumaczenie w *Dziełach zebranych* Marcinkiewicza); o Salemie (patrz wstęp do *Dzieł* Salema); o Mary Weiss [172]. Znaczenie tych prac polega nie tylko na tym, że służą ocenie działalności tych matematyków; pozwalają one także zrozumieć poglądy Zygmunda na matematykę. Nie uwzględniliśmy większości skryptów z jego wykładów, a także jego książek [64], [119], [129], [130], [137], [151], [178], [180], [181], [182]. W szczególności nie wspomnieliśmy jeszcze wcale o jednym z jego największych osiągnięć, którym jest traktat o szeregach trygonometrycznych.

Powiedzmy o nim słów parę. Pierwsze wydanie w 1935 r. było jedną z najsławniejszych polskich monografii. Miała ona decydujący wpływ na rozwój teorii szeregów trygonometrycznych, tak że nowe wydanie 25 lat później całkowicie różniło się od oryginału [151]. Po 15 z górą latach można ocenić, że to drugie wydanie było jednym z matematycznych pomników stulecia. Zawiera bogactwo rezultatów, nowych metod (interpolacji w szczególności), uwag historycznej natury. Mimo że od tego czasu nastąpił duży rozwój teorii szeregów Fouriera (Katznelson, Malliavin, Carleson), monografia ta pozostaje najbardziej wartościowym źródłem w tej dziedzinie.

Mimo że obie książki (wydania z 1935 r. i 1959 r.) były pisane dla specjalistów, ich wartość przekracza krąg ludzi zajmujących się szeregami trygonometrycznymi. Pierwsza jest nadal doskonałym wstępem do klasycznej analizy, a druga jest cytowana w wielu pracach dotyczących innych zagadnień. Przyczyną jest to, że Zygmund nigdy nie uważał teorii szeregów trygonometrycznych za dział zamknięty, co próbowaliśmy uzasadnić w naszym omówieniu. Drugą przyczyną jest jego styl: elegancki, precyzyjny, chłodny i ostry. Istnieją i powstaną inne książki w tej dziedzinie, ale można oczekiwać, że te dwie zachowają swój niezwykły charakter i pozostaną niedoścignionym wzorem w literaturze matematycznej.

Spis prac naukowych A. Zygmunda

[1] *Sur une fonction que est discontinue sur tout ensemble de puissance du continu*, Fund. Math. 4 (1923), s. 316–318 (razem z W. Sierpińskim).

[2] *Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques*, C. R. (1923), s. 521–523.

[3] *Sur les séries trigonométriques*, ibidem (1923), s. 576–579.

[4] *Sur une généralisation de la méthode de Cesàro*, C. R. 179 (1924), s. 870–872.

[5] *Sur les faisceaux des tangentes à une courbe*, Fund. Math. 6 (1924), s. 117–121 (razem z S. Saksem).

[6] *Sur les séries de Fourier restrientes*, C. R. 178 (1924), s. 181–182.

[7] *Sur un théorème de M. Marcel Riesz*, Ann. Soc. Polon. Math. 3 (1924), s. 153.

[8] *Sur la dérivation des séries de Fourier*, Bull. Internat. Acad. Polon. 1924, A, s. 243–249.

[9] *Contribution à l'unicité du développement trigonométrique*, M. Z. 24 (1924), s. 40–46.

[10] *Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques*, M. Z. 24 (1924), s. 47–104.

[11] *Sur la sommation des séries trigonométriques conjuguées aux séries de Fourier*, Bull. Internat. Acad. Polon. 1924, A, s. 251–258.

[12] *Sur les principles et problèmes de la théorie riemannienne des séries trigonométriques*, Ann. Soc. Polon. Math. 3 (1924), s. 147–148 (razem z A. Rajchmanem).

[13] *Sur la sommation des séries trigonométriques et celles de puissances par les moyennes typiques*, C. R. 181 (1924), s. 1122–1123.

[14] *Un teorema sulle curve continue*, Bolletino U. M. I. 4 (1924), s. 7–10 (razem z S. Saksem).

[15] *Sur un théorème de la théorie de la sommabilité*, M. Z. 25 (1924), s. 291–296.

[16] *Sur la relation du procédé de sommation de Cesàro et celui de Riemann*, Bull. Internat. Acad. Polon. 1925 A, s. 69–80 (razem z A. Rajchmanem).

[17] *Sur la sommation des séries par le procédé des moyennes typiques*, Bull. Internat. Acad. Polon. 1925, A, s. 265–287.

[18] *Sur la sommabilité des séries de Fourier des fonctions vérifiant la condition de Lipschitz*, Bull. Internat. Acad. Polon. 1925, A, s. 1–9.

[19] *Sur un théorème de M. Gronwall*, Bull. Internat. Acad. Polon. 1925, A, s. 207–217.

[20] *Sur la possibilité d'appliquer la méthode de Riemann aux séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson*, M. Z. 25 (1925), s. 261–273 (razem z A. Rajchmanem).

[21] *Sur les séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson*, M. Z. 25, s. 274–290.

[22] *Sur le module de continuité de la somme de la série conjuguée de la série de Fourier*, Prace Mat.-Fiz. 33 (1924), s. 125–132.

[23] *Remarque sur la sommabilité des séries de fonctions orthogonales*, Bull. Internat. Acad. Polon. 1926, A, s. 185–191.

[24] *Une remarque sur un théorème de M. Kaczmarz*, M. Z. 25, s. 297–298.

[25] *Remarque sur la convergence absolue des séries de Fourier*, Journal L. M. S. 3 (1928), s. 194–196.

[26] *Sur les fonctions conjuguées*, C.R. 187, s. 1025–1026.

[27] *Über die Beziehungen der Eindeutigkeitsfragen in den Theorien der trigonometrischen Reihen und Integrale*, Math. Ann. 99, s. 562–589.

[28] *Über einige Sätze aus der Theorie der divergenten Reihen*, Bull. Internat. Acad. Polon. 1927, A, s. 309–331.

[29] *Remarque sur les sommes positives des séries trigonométriques*, Bull. Internat. Acad. Polon. 1927, A, s. 333–341.

[30] *Remarque sur un théorème de M. Fekete*, Bull. Internat. Acad. Polon. 1927, A, s. 343–347.

[31] *Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales*, Bull. Internat. Acad. Polon. 1927, A, s. 295–308.

[32] *Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales*, Fund. Math. 10 (1927), s. 356–362.

[33] *Sur la convergence absolue des séries de Fourier*, Ann. Soc. Polon. Math. 7 (1928), s. 266–267.

[34] *Sur le problème d'unicité pour certaines systèmes orthogonaux*, Ann. Soc. Polon. Math. 7 (1928), s. 267.

[35] *Sur les fonctions conjuguées*, Fund. Math. 13 (1929), s. 284–303.

[36] *Über einseitige Lokalisation*, Jahresbericht D. M. V. 39 (1930), s. 47–52.

[37] *A note on series of sines*, Quart. J. Math. Oxford ser. 1, s. 102–107.

[38] *Remarque sur les ensembles d'unicité dans quelques systèmes orthogonaux*, Atti Congresso Bologna 2, s. 309–311.

[39] *Sur les séries trigonométriques lacunaires*, Journal L. M. S. 5 (1930), s. 138–145.

[40] *On the convergence of lacunary trigonometric series*, Fund. Math. 16 (1930), s. 90–107.

[41] *On some series of functions*. I, II, Proceedings Cambridge 26, s. 337–357, s. 458–474 (razem z R. E. A. C. Paleyem).

[42] *On the partial sums of Fourier serier*, Studia Math. 2 (1930), s. 221–227 (razem z R.E.A.C. Paleyem).

[43] *Un théorème sur les séries orthogonales*, Studia Math. 2 (1930), s. 181–182.

[44] *Sur la théorie riemannienne de certains systèmes orthogonaux, I*, Studia Math. 2 (1930), s. 97–170.

[45] *Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques et celles de puissances*, Studia Math. 3 (1931), s. 77–91.

[46] *On a theorem of Privaloff*, Studia Math. 3 (1931), s. 239–247.

[47] *On a theorem of Ostrowski*, Journal L. M. S. 6 (1931), s. 162–163.

[48] *O pewnych nierównościach*, Mathesis Polska 5 (1930), s. 83–100.

[49] *Uwaga o funkcjach ciągłych nieróżniczkowalnych*, Mathesis Polska 4 (1929), s. 1–7.

[50] *O pewnych zagadnieniach teorii szeregów trygonometrycznych*, Mathesis Polska 7 (1932), s. 49–58.

[51] *A remark on conjugate series*, Proceedings L. M. S. (2) 34 (1932), s. 392–400.

[52] *On lacunary trigonometric series*, Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932), s. 435–446.

[53] *Sur la théorie riemannienne de certains systèmes orthogonaux*. II, Prace Mat.-Fiz. 39 (1932), s. 73–117.

[54] *Errata et remarques à mon travail „Sur les fonctions conjuguées"*, Fund. Math. 13 (1930), s. 284–303; Fund. Math. 18 (1932), s. 312.

[55] *On lacunary trigonometric series*, Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932), s. 344.

[56] *Sur un théorème de M. Pólya*, Verhandlungen Kongress Zürich 1932, 2, s. 53–54.

[57] *A note on analytic functions in the unit circle*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 28 (1932), s. 266–272 (razem z R. E. A. C. Paleyem).

[58] *On some series of functions*. III, Proc. Cambridge Philos. Soc. 28 (1932), s. 190–205 (razem z R. A. E. C. Paleyem).

[59] *On an integral inequality*, J. London Math. Soc. 8 (1933), s. 175–178.

[60] *On continuability of power series*, Acta Litt. Sci. Szeged 6 (1933), s. 80–84.

[61] *Notes on random functions*, Math. Z. 37 (1933), s. 647–668 (razem z R. E. A. C. Paleyem i N. Wienerem).

[62] *On the differentiability of multiple integrals*, Fund. Math. 23 (1934), s. 143–149.

[63] *Some points in the theory of trigonometric and power series*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), s. 586–617.

[64] *Trigonometrical series* (Monografie Mat. Tom 5), Warszawa–Lwów 1935, s. 331.

[65] *Note on the differentiability of multiple integrals*, Fund. Math. 25 (1935), s. 217–234 (razem z B. Jessenem i J. Marcinkiewiczem).

[66] *Sur le caractère de divergence des séries orthogonales*, (2, congr. des math. roum. Turnu-Severin, 5.–9. V. 1932) Mathematica, Cluj. 9 (1935), s. 86–88.

[67] *On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series*, Fund. Math. 26 (1936), s. 1–48 (razem z J. Marcinkiewiczem).

[68] *A remark on Fourier transforms*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 32 (1936), s. 321–327.

[69] *Note on trigonometrical and Rademacher's series*, Prace Mat.-Fiz. 44 (1936), s. 91–107.

[70] *Some theorems on orthogonal systems*, Fund. Math. 28 (1936), s. 309–335 (razem z J. Marcinkiewiczem).

[71] *Sur les fonctions indépendantes*, Fund. Math. 29 (1937), s. 60–90 (razem z J. Marcinkiewiczem).

[72] *Mean values of trigonometrical polynomials*, Fund. Math. 28 (1936), s. 131–166 (razem z J. Marcinkiewiczem).

[73] *Two theorems on trigonometrical series*, Math. Sb. 2 (44) (1937), s. 733–737 (razem z J. Marcinkiewiczem).

[74] *Remarque sur la loi du logarithme itéré*, Fund. Math. 29 (1937), s. 215–222 (razem z J. Marcinkiewiczem).

[75] *Quelques théorèmes sur les fonctions indépendantes*, Studia Math. 7 (1938), s. 104–120 (razem z J. Marcinkiewiczem).

[76] *On the convergence and summability of power series on the circle of convergence*, Fund. Math. 30 (1938), s. 170–196.

[77] *Proof of a theorem of Paley*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 34 (1938), s. 125–133.

[78] *Proof of a gap theorem*, Duke Math. J. 4 (1938), s. 469–472 (razem z J. Marcinkiewiczem).

[79] *A remark on conjugate series*, Bull. Sémin. Mat. Univ. Wilno Nr 1 (1938), s. 16–18.

[80] *A theorem of Lusin*. I, Duke Math. J. 4 (1938), s. 473–485 (razem z J. Marcinkiewiczem).

[81] *Sur les séries de puissances*, Mathematica, Cluj 14 (1938), s. 21–30 (razem z J. Marcinkiewiczem).

[82] *Sur la dérivée seconde généralisée*, Bull. Sémin. Math. Univ. Wilno Nr 2 (1939), s. 35–40 (razem z J. Marcinkiewiczem).

[83] *Note on the formal multiplication of trigonometrical series*, Bull. Sémin. Math. Univ. Wilno Nr 2 (1939), s. 52–56.

[84] *Quelques inégalités pour les opérations linéaires*, Fund. Math. 32 (1939), s. 115–121 (razem z J. Marcinkiewiczem).

[85] *On the summability of double Fourier series*, Fund. Math. 32 (1939), s. 122–132 (razem z J. Marcinkiewiczem).

[86] *Sur un théorème de M. Fejér*, Bull. Sémin. Math. Univ. Wilno Nr 2 (1939), s. 3–12.

[87] *On the behavior of trigonometric series and power series*, Trans. Amer. Math. Soc. 50 (1941), s. 407–463 (razem z J. Marcinkiewiczem).

[88] *Two notes on inequalities*, J. Math. Phys. 21 (1942), s. 117–123, MR 4–135.

[89] *On the convergence and summability of power series on the circle of convergence*, Proc. London Math. Soc. (2) 47 (1942), s. 326–350; MR 4–76.

[90] *Complex methods in the theory of Fourier series*, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), s. 805–822; MR 5–119.

[91] *A theorem of generalized derivatives*, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), s. 917–923; MR 5–175.

[92] *A property of the zeros of Legendre polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943), s. 39–56; MR 5–180.

[93] *On certain integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944), s. 170–204; MR 5–230.

[94] *Proof of a theorem of Thorin*, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), s. 279–282; MR 5–229 (razem z J. D. Tamarkinem).

[95] *Lacunary power series and Peano curves*, Duke Math. J. 12 (1945), s. 569–578; MR 7–378 (razem z R. Salemem).

[96] *On the degree of approximation of functions by Fejér means*, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), s. 274–278; MR 6–265.
[97] *Proof of a theorem of Littlewood and Paley*, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), s. 439–446; MR 7–8.
[98] *Smooth functions*, Duke Math. J. 12 (1945), s. 47–76; MR 7–60.
[99] *A theorem on fractional derivatives*, Duke Math. J. 12 (1945), s. 455–464; MR 7–148.
[100] *The approximation of functions by typical means of their Fourier series*, Duke Math. J. 12 (1945), s. 695–704; MR 7–435.
[101] *On the theorem of Fejér–Riesz*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), s. 310–318; MR 7–434.
[102] *The approximation by partial sums of Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 59 (1946), s. 14–22; MR 7–435 (razem z R. Salemem).
[103] *Capacity of sets and Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 59 (1946), s. 23–41; MR 7–434 (razem z R. Salemem).
[104] *On a theorem of Banach*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 33 (1947), s. 293–295; MR 9–88 (razem z R. Salemem).
[105] *On lacunary trigonometric series*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 33 (1947), s. 333–338; MR 9–181.
[106] *On the summability of multiple Fourier series*, Amer. J. Math. 69 (1947), s. 836–850; MR 9–235.
[107] *A remark on characteristic functions*, Ann. Math. Statistics 18 (1947), s. 272–276; MR 9–88.
[108] *On trigonometric integrals*, Ann. of Math. (2) 48 (1947), s. 393–440; MR 9–88.
[109] *On lacunary trigonometric series*. II, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 34 (1948), s. 54–62; MR 9–425 (razem z R. Salemem).
[110] *A convexity theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 34 (1948), s. 443–447; MR 10–247 (razem z R. Salemem).
[111] *A gap theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948), s. 235–243; 9–426 (razem z M. Kacem i R. Salemem).
[112] *On a theorem of Hadamard*, Ann. Soc. Polon. Math. 21 (1948), s. 52–69; MR 10–186.
[113] *Two notes on the summability of infinite series*, Colloq. Math. 1 (1948), s. 225–229; MR 10–446.
[114] *On certain methods of summability associated with conjugate trigonometric series*, Studia Math. 10 (1948), s. 97–103; MR 10–31.
[115] *An example in Fourier series*, Studia Math. 10 (1948), s. 113–119; MR 10–603.
[116] *Errata to the paper „On a theorem of Hadamard"*, Ann. Soc. Polon. Math. 21 (1948), s. 357–358; (1949), MR 11–20.
[117] *On the boundary values of functions of several complex variables*. I, Fund. Math. 36 (1949), s. 207–235; MR 12–18.
[118] *On a theorem of Littlewood*, Summa Brasil. Math. 2, No. 5 (1949), s. 51–57; MR 12–88.
[119] *Trigonometric interpolation*, University of Chicago, 1950, s. iv+99; MR 11–654.
[120] *A remark on functions of several complex variables*, Acta Sci. Math. Szeged 12, Leopoldo Fejér et Frederico Riesz LXX annos natis dedicatus, Pars B (1950), s. 66–68; MR 11–652.
[121] *A remark on the integral modulus of continuity*, Univ. Nac. Tucumán. Revista A. 7 (1950), s. 259–269; MR 13–118.
[122] *La loi du logarithme itéré pour les séries trigonométriques lacunaires*, Bull. Sci. Math. (2) 74 (1950), s. 209–224; MR 12–605 (razem z R. Salemem).
[123] *Note on the boundary values of functions of several complex variables*, Contributions to Fourier Analysis, s. 145–165. Ann. of Math. Studies, 25. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1950; MR 12–19 (razem z A. Calderónem).
[124] *On the theorem of Hausdorff–Young and its extensions*, Contributions to Fourier Analysis, s. 166–188. Ann. of Math. Studies 25. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1950; MR 12–255 (razem z A. Calderónem).

[125] *A note on the interpolation of linear operations*, Studia Math. 12 (1951), s. 194–204; MR 13–754 (razem z A. Calderónem).

[126] *Polish mathematics between the two wars (1919–1939)*, Proc. Second Canadian Math. Congress, Vancouver, 1949, s. 3–9. Univ. of Toronto Press, 1951; MR 13–197.

[127] *A remark on characteristic functions*, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, s. 369–372. Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles 1951; MR 13–362.

[128] *An individual ergodic theorem for non-commutative transformations*, Acta Sci. Mat. Szeged 14 (1951), s. 103–110; MR 13–661.

[129] *Trigonometrical series*, 2-nd ed. Chelsea Publishing Co., New York 1952; MR 17–844.

[130] *Analytic functions*, Translated by B. J. Scott. Monografie Matematyczne, Tom XXVII, Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa–Wrocław 1952. MR 14–1073 (razem z S. Saksem).

[131] *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. 88 (1952), s. 85–139; MR 14–637 (razem z A. Calderónem).

[132] *Sur les séries trigonométriques dont les coefficients ont des signes aléatoires*, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 236 (1953), s. 571–573; MR 14–1081 (razem z R. Salemem).

[133] *Some properties of trigonometric series whose terms have random signs*, Acta Math. 91 (1954), s. 245–301; MR 16–467 (razem z R. Salemem).

[134] *On certain mean values of polynomials*, J. Analyse. Math. 3 (1954), s. 225–244; MR 16–355 (razem z G. Szegö).

[135] *Sur un théorème de Piatecki–Shapiro*, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 240 (1955), s. 2040–2042; MR 17–150 (razem z R. Salemem).

[136] *Sur les ensembles parfaits dissymétriques à rapport constant*, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 240 (1955), s. 2281–2283; MR 17–150 (razem z R. Salemem).

[137] *Trigonometrical series*, Dover Publications, New York 1955, s. vii+329; MR 17–361.

[138] *Singular integrals and periodic functions*, Studia Math. 14 (1954), s. 249–271 (1955); MR 16–1017 (razem z A. Calderónem).

[139] *On a problem of Mihlin*, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), s. 209–224; MR 16–816 (razem z A. Calderónem).

[140] *A note on the interpolation of sublinear operations*, Amer. J. Math. 78 (1956), s. 282–288; MR 18–586 (razem z A. Calderónem).

[141] *On singular integrals*, Amer. J. Math. 78 (1956), s. 289–309; MR 18–894 (razem z A. Calderónem).

[142] *Algebras of certain singular operators*, Amer. J. Math. 78 (1956), s. 310–320; MR 19–414 (razem z A. Calderónem).

[143] *A note on random trigonometric polynomials*, Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954–1955, vol. II, s. 243–246. Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles 1956; MR 18–891 (razem z R. Salemem).

[144] *Hilbert transforms in E^n*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, vol. III, s. 140–151. Erven P. Noordhoff N. V., Groningen North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1956; MR 19–139.

[145] *On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations*, J. Math. Pures Appl. (9) 35 (1956), s. 223–248; MR 18–321.

[146] *On the Littlewood–Paley function $g^*(\theta)$*, Proc. Nat. Sci. U.S.A. 42 (1956), s. 208–212; MR 17–1080.

[147] *On singular integrals*, Rend. Math. Appl. (5) 16 (1957), s. 468–505; MR 20–2585.

[148] *Singular integral operators and differential equations*, Amer. J. Math. 79 (1957), s. 901–921; MR 20–7196 (razem z A. Calderónem).

[149] *Addenda to the paper „On a problem of Mihlin"*, Trans. Amer. Math. Soc. 84 (1957), s. 559–560; MR 18–894 (razem z A. Calderónem).

[150] *A note on smooth functions*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 62 = Indag. Math. 21 (1959), s. 52–58; MR 21–5849 (razem z Mary Weiss).

[151] *Trigonometric series*, 2nd ed. Vols. I, II, Cambridge Univ. Press, N. Y., 1959; MR 21–6498.

[152] *On the existence of conjugate functions of higher order*, Fund. Math. 48 (1959/60), s. 175–187; MR 22–3934 (razem z Mary Weiss).

[153] *Józef Marcinkiewicz*, Wiadom. Mat. (2) 4 (1960), s. 11–41; MR 22–6683.

[154] *On the preservation of classes of functions*, J. Math. Mech. 8 (1959), s. 889–895; erratum, 9 (1960), s. 663; MR 22–8277.

[155] *Smoothness and differentiability of functions*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math. 3–4 (1960–1961), s. 295–307; MR 24–A 1982 (razem z E. M. Steinem).

[156] *A note on local properties of solutions of elliptic differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 46 (1960), s. 1385–1389; MR 25–4243 (razem z A. Calderónem).

[157] *Local properties of solutions of elliptic partial differential equations*, Studia Math. 20 (1961), s. 171–225; MR 25–310 (razem z A. Calderónem).

[158] *Note on the limit values of analytic functions*, Revista Union Matematica Argentina 14 (1948), s. 16–19 (razem z A. Calderónem i A. González-Dominguezem).

[159] *On one-sided localization of trigonometric series*, Studies in Mathematical Analysis and Related Topics, 435–447, Stanford University Press, Stanford, California 1962; MR 26–2794.

[160] *On the differentiability of functions which are of bounded variation in Tonelli's sense*, Revista Union Mat. Argentina 20 (1962), s. 102–121; MR 27–1542 (razem z A. P. Calderónem).

[161] *On the differentiability of functions*, Studia Math. 23 (1963–1964), s. 247–285; MR 28–2176 (razem z E. M. Steinem).

[162] *On higher gradients of harmonic functions*, Studia Math. 24 (1964), s. 211–226; MR 29–4903 (razem z A. P. Calderónem).

[163] *On higher gradients of harmonic functions*, Joint Symposium on Partial Differential Equations, Novosibirsk 1963; Acad. Sci. USSR, Siberian Branch, Moskwa 1963, s. 199–204; MR 35–5647 (razem z A. P. Calderónem).

[164] *On the fractional differentiability of functions*, Proc. London Math. Soc. 14a (1965), s. 249–264; MR 31–1340 (razem z E. M. Steinem).

[165] *An example in the theory of singular integrals*, Studia Math. 26 (1965), s. 101–111; MR 32–8067 (razem z Mary Weiss).

[168] *A note on the differentiability of integrals*, Colloq. Math. 16 (1967), s. 199–204; MR 35–1732.

[169] *Boundedness of translation invariant operators on Hölder spaces and L^p-spaces*, Ann. of Math. 85 (1967), s. 337–349; MR 35–5964 (razem z E. M. Steinem).

[170] *On the boundary behavior of harmonic functions. Orthogonal expansions and their continuous analogues*, Orthogonal Expansions, 1967, s. 127–141 (razem z E. M. Steinem).

[171] *On multipliers preserving convergence of trigonometric series almost everywhere*, Studia Math. 30 (1968), s. 111–120; MR 38–2526 (razem z Mary Weiss).

[172] *Mary Weiss*, December 11, 1930–October 8, 1966 (nekrolog), Orthogonal Expansions, 1967, xi–xviii; MR 37–6153.

[173] *On certain lemmas of Marcinkiewicz and Carleson*, Journal Approximation Theory 2 (1969), s. 249–257; MR 41–6022.

[174] *A theorem on the formal multiplication of trigonometric series*, Proc. Conference for M. Stone, U. of Chicago Press; przedrukowane w Functional Analysis and Related Fields, Springer Verlag, 1970, s. 224–227; MR 43–800.

[175] *A Cantor–Lebesgue theorem for double trigonometric series*, Studia Math. 43 (1972), s. 173–178.

[176] *On Fourier coefficients and transforms of functions of two variables*, Studia Math. 50 (1974), s. 189–201.

[177] *Harmonic analysis and integral transforms*, to appear in Encyclopedia Britannica, 1974 (razem z Ch. Feffermanem).

[178] *Intégrales singulières*, Lecture Notes in Mathematics 204 (1971), s. 1–52, Springer Verlag.
[179] *Addendum to the paper „On singular integrals"*, Studia Math. 46 (1973), s. 297–299 (razem z A. P. Calderónem).
[180] *Algunos resultados y problemas sobre differenciabilidad de funciones* (skrypt), Universidad de Madrid, Madrid 1971, s. 1–24.
[181] *Analytic functions*, 3-rd ed., Elsevier Publishing Company 197, XIV + 504 (razem z S. Saksem).
[182] *Fonctions analytiques*, francuskie tłumaczenie z języka angielskiego, Paris 1970, Masson et C^{ie}, s. 1–389 (razem z S. Saksem).

Wykaz prac doktorskich napisanych pod kierunkiem A. Zygmunda

1. W Polsce przed wojną:
   Z. Lepecki (Wilno 1939), zob. MR 4–157.
   J. Marcinkiewicz (Wilno 1935), zob. Collected Papers.
   K. Sokół-Sokołowski, zob. MR 9–89.
2. W Filadelfii (1947):
   N. Fine, zob. MR 11–352 i 13–126.
3. W Chicago:

Ching-Tsün Loo, *Note on the properties of Fourier coefficients*, 18 VI 1948.

Alberto P. Calderón, I. *On the ergodic theorems*, II. *On the behavior of harmonic functions at the boundary*, III. *On the theorem of Marcinkiewicz and Zygmund*, 22 XII 1950.

Leonard D. Berkovitz, I. *Circular summation and localization of double trigonometric series*, II. *On double trigonometric integrals*, III. *On double Sturm–Liouville expansions*, 31 VIII 1951.

Richard P. Gosselin, *The theory of localization for double trigonometric series*, 31 VIII 1951.

George Klein, *On the approximation of functions by polynomials*, 31 VIII 1951.

Henry William Oliver, *Differential properties of real functions*, 31 VIII 1951.

Bethumne Vanderburg, *Linear combinations of Hausdorff summability methods*, 31 VIII 1951.

Victor L. Shapiro, I. *Square summation and localization of double trigonometric series*, II. *Summability of double trigonometric integrals*, III. *Circular summability C of double trigonometric series* 13 VI 1952.

Mischa Cotlar, *On the theory of Hilbert transforms*, 20 III 1953.

George Morgenthaler, *The central limit theorem for orthonormal systems; the Walsh functions*, 12 VI 1953.

Daniel Waterman, I. *Integrals associated with functions of class L^p*, II. *A convergence theorem*, III. *On some high indices theorems*, 11 VI 1954.

William J. Riordan, *On the interpolation of operations*, 16 XII 1955.

Elias M. Stein, *Linear operators on L^p spaces*, 16 XII 1955.

Izaak Wirszup, *On an extension of the Cesàro method of summability to the logarithmic scale*, 16 XII 1955.

Vivienne E. Morley, *Singular integrals*, 31 VIII 1956.

Guido L. Weiss, *On certain classes of function spaces and on the interpolation of sublinear operators*, 14 XII 1956.

Mary Bishop Weiss, *The law of the iterated logarithm for lacunary series and applications to Hardy–Littlewood series*, 7 VI 1957.

Paul Joseph Cohen, *Topics in the theory of uniqueness of trigonometric series*, 13 VI 1958.

Benjamin Muckenhoupt, *On certain singular integrals*, 29 VIII 1958.

John Edward Bishop, *On the summability of double series*, 12 VI 1959.

Richard O'Neil, *Fractional integration and Orlicz spaces*, 16 XII 1960.

Efrem Herbert Ostrow, *A theory of generalized Hilbert transforms*, 2 IX 1960.
Marvin Barsky, *On repeated convergence of series*, 4 IX 1964.
Chao Ping Chang, *On certain exponential sums arising in conjugate multiple Fourier series*, 18 XII 1964.
Eugene Barry Fabes, *Parabolic partial differential equations and singular integrals*, 11 VI 1965.
Richard Lee Wheeden, *On trigonometric series associated with hypersingular integrals*, 3 IX 1965.
J. Marshall Ash, *Generalization of Riemann derivative*, 10 VI 1966.
I. Louis Gordon, *Perron's integral for derivatives in L^r*, 9 VI 1967.
Sim Lasher, *On derivatives and derivgates in L^r*, 1 IX 1967.
Yoram Sagher, *On hypersingular interals with complex homogeneity*, 1 IX 1967.
Leo Frank Ziomek, *On the boundary behavior in the metric L^p of subharmonic functions*, 15 XII 1967.
William C. V. Connett, *Formal multiplication of trigonometric series and the notion of generalized conjugacy*, 13 VI 1969.
Thomas Walsh, *Singular integrals of L^1-functions*, 12 XII 1969.
Marvin J. Kohn, *Riemann summability of multiple trigonometric series*, 12 VI 1970.
Stylianus C. Pichorides, *On the best values of the constants in the theories of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov*, 11 VI 1971.