ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIX (1976)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

JAN MIKUSIŃSKI i PIOTR MIKUSIŃSKI (Katowice)

Liczby naturalne i ich aksjomatyka

1. Aksjomatyzacja pewnego działu matematyki jest końcowym etapem jego rozwoju, kiedy już pojęcia jego są ugruntowane i istnieje duża ilość twierdzeń, czyli zdań, które uważamy za prawdziwe, powiązanych implikacjami. Aksjomatyzacja polega na wybraniu pewnej liczby pojęć, zwanych *pierwotnymi*, za pomocą których wszystkie inne dają się zdefiniować, oraz pewnej liczby twierdzeń, którym nadajemy miano *aksjomatów* i z których wszystkie inne dają się wyprowadzić.

Już samo to sformułowanie mówi, że dany dział można zaksjomatyzować na różne sposoby, na różne bowiem sposoby można wybrać pojęcia pierwotne i aksjomaty. Każda aksjomatyka jest logicznie dobra i może służyć do uporządkowania danego działu matematyki, jeżeli spełnia wspomniane wyżej warunki. Ale w praktyce żądamy od niej czegoś więcej. Chcemy, żeby wybrane na aksjomaty twierdzenia wydawały nam się proste i naturalne i żeby układ ich tworzył ładną i łatwą do zapamiętania całość. Żądania te nie dadzą się ująć w formy logiczne i z punktu widzenia poprawności teorii nie mają znaczenia. Praca matematyka, który je uwzględnia, podobna jest raczej do pracy artysty, dbającego o wygląd estetyczny swego dzieła. Bo brzydko jest, jeżeli np. twierdzenie Kuratowskiego–Zorna, o głębokim, lecz trudnym dla początkującego do uchwycenia sensie, przyjmuje się za aksjomat, a potem za pomocą niego dowodzi się pewnika wyboru, który jest intuicyjnie tak oczywisty, że większość matematyków wcale nie zauważa, że go stosuje w swoich pracach.

Wśród aksjomatów Peano, przyjmowanych często dla liczb naturalnych, są dwa, które początkującemu matematykowi sprawiają pewną trudność. Jednym z nich jest aksjomat 1°, który mówi, że 1 jest liczbą naturalną. Co to jest bowiem 1? — Symbol? — Farba drukarska ułożona na papierze w odpowiedni kształt, czy co innego? Drugim „trudnym" aksjomatem jest aksjomat 5°, dotyczący indukcji matematycznej, który robi wrażenie jakiegoś niezbyt oczywistego twierdzenia. (Pełny układ aksjomatów Peano podajemy na początku paragrafu 3).

Poza tym konstrukcja aksjomatyki Peano jest trochę inna niż opisaliśmy na początku. W wyborze pojęć pierwotnych autor nie ograniczył się do pojęć występujących w arytmetyce, ale stworzył *ad hoc* nowe pojęcie „następnika", które wcale

nie jest potrzebne w arytmetyce i o którym właściwie należy jak najprędzej zapomnieć w dalszym rozwinięciu teorii.

Wskutek tego też pewne aksjomaty mają charakter prowizoryczny i tworzą jakby przybudówkę do arytmetyki, z której się wychodzi, ale do której nigdy się nie wraca.

2. W tym artykule podajemy aksjomatykę wolną od tych wad. Na tle współczesnych badań nad podstawami matematyki nie stanowi ona żadnej rewelacji i nie ma pretensji do odkrycia naukowego. Może mieć natomiast pewne znaczenie dydaktyczne. Oparta jest na relacji „mniejszy—większy", która w rozwoju umysłowym człowieka wydaje się wcześniejsza niż pojęcie liczenia. Już bowiem małe dziecko, mając do wyboru dwa lub trzy cukierki, wybierze trzy, choć nie umie jeszcze liczyć. Liczby naturalne uważamy za pojęcie pierwotne, to znaczy nie odpowiadamy na pytanie, czym są liczby naturalne, lecz podajemy ich własności związane z relacją nierówności $<$. Piszemy np. $x < y$, a czytamy „x jest mniejsze od y" lub „y jest większe od x". Jako pierwszą własność przyjmujemy *przechodniość*:

I. *Jeżeli* $x < y$ *i* $y < z$, *to* $x < z$,

która intuicyjnie jest zupełnie oczywista. Za oczywistą przyjmujemy też własność, że jeżeli dane są dwie liczby, to albo są równe, albo jedna jest większa od drugiej. Wyrażamy to jako prawo *trychotomii*:

II. *Dla każdej pary liczby* x *i* y *zachodzi zawsze jedna* (*i tylko jedna*) *z relacji*:

$$x < y \quad albo \quad x = y \quad albo \quad y < x.$$

Bardzo intuicyjne są też pojęcia „najmniejszy" i „największy". Małe dziecko, mając do wyboru kilka jabłek, z łatwością wybiera sobie największe. Matematycznie precyzujemy te pojęcia w następujący sposób:

Mówimy, że liczby x jest *najmniejsza* w pewnym zbiorze Z (liczb naturalnych), jeżeli dla każdej liczby y ze zbioru Z zachodzi $x = y$ lub $x < y$. Podobnie mówimy, że liczba x jest *największa* w zbiorze Z (liczb naturalnych), jeżeli zachodzi $x = y$ lub $y < x$ dla każdej liczby y ze zbioru Z.

Trochę trudniejsze jest pojęcie zbioru ograniczonego liczb naturalnych. Mówimy, że zbiór Z (liczb naturalnych) jest *ograniczony*, jeżeli wszystkie liczby doń należące są mniejsze od pewnej ustalonej liczby. Innymi słowy, istnieje taka liczba x, że dla wszystkich y należących do Z zachodzi $y < x$. Trudność pojęcia ograniczoności pochodzi stąd, że wszystkie zbiory występujące w życiu codziennym są ograniczone. Aby więc wyczuć sens pojęcia ograniczoności, trzeba mieć przykłady zbiorów nieograniczonych, co oczywiście jest pewną abstrakcją. Ile kroków możemy uczynić w jednym kierunku? Dowolnie wiele, przynajmniej teoretycznie. Zbiór liczb wyrażających możliwe ilości kroków nie jest więc ograniczony. Przykładów tego typu można podawać wiele.

Jako dalsze aksjomaty przyjmujemy następujące:

III. *Każdy* (*niepusty*) *zbiór liczb naturalnych ma liczbę najmniejszą.*

IV. *Każdy ograniczony* (*i niepusty*) *zbiór liczb naturalnych ma liczbę największą.*

V. *Zbiór wszystkich liczb naturalnych nie jest ograniczony.*

Trudno jest dyskutować oczywistość aksjomatów III, IV i V, co bowiem dla jednego jest oczywiste, dla drugiego może być nieoczywiste. W każdym razie aksjomaty te wydają się proste i łatwe do przyswojenia.

Z aksjomatów powyższych wynikają następujące własności:

III′. *Liczba najmniejsza, o której jest mowa w aksjomacie* III, *jest jedyna dla ustalonego zbioru.*

IV′. *Liczba największa, o której jest mowa w aksjomacie* IV, *jest jedyna dla ustalonego zbioru.*

Dowód. Jeżeli a jest najmniejszym elementem pewnego zbioru Z (liczb naturalnych) i b należy do Z, to

$$a = b \quad \text{lub} \quad a < b,$$

Jeżeli ponadto założymy, że b jest najmniejszym elementem zbioru Z, to

$$b = a \quad \text{lub} \quad b < a.$$

Stąd wynika jedyna możliwość, że elementy a i b są równe, na podstawie II. A to dowodzi prawdziwości III′.

Dla IV′ dowód jest analogiczny.

3. W tym paragrafie udowodnimy równoważność układu aksjomatów I–V z układem aksjomatów Peano. Dla krótkości zbiór wszystkich liczb naturalnych będziemy oznaczać literą N i będziemy też używali symboli $\in$ ($x \in Z$ znaczy: x należy do Z) i $\subset$ ($Z \subset N$ znaczy: zbiór Z zawiera się w N). Aksjomaty Peano mają następującą postać:

1° $1 \in N$;

2° Każda liczba $a \in N$ ma jeden i tylko jeden następnik $a^+ \in N$;

3° $a^+ \neq 1$;

4° Z równości $a^+ = b^+$ wynika $a = b$;

5° Jeżeli $1 \in Z \subset N$ oraz z $a \in Z$ wynika $a^+ \in Z$, to $Z = N$.

Jest rzeczą wiadomą, że z aksjomatów Peano wynikają wszystkie własności I–V (po odpowiednim zdefiniowaniu nierówności $<$). Pozostaje do udowodnienia, że także odwrotnie, z własności I–V wynikają własności 1°–5°.

Zakładamy więc, że pewien zbiór N ma własności I–V. Z aksjomatu III wynika, że istnieje w N liczba najmniejsza; oznaczamy ją symbolem 1. Wtedy własność 1° jest spełniona. Dla wyprowadzenia dalszych własności potrzebne jest pojęcie *następnika* a^+, który określamy jako najmniejszą liczbę naturalną większą od a.

Dla udowodnienia 2° trzeba wykazać, że taka liczba istnieje i jest jedyna. Istnienie wynika z aksjomatu V. Gdyby istniały dwie różne takie liczby, to większa z nich nie miałaby żądanej własności. Muszą więc być równe, na podstawie aksjomatu II, co oznacza, że następnik jest jedyny.

Dla dowodu 3° wystarczy zauważyć, że zgodnie z określeniem liczby 1 jest $1 < n$ lub $1 = n$ dla każdego $n \in N$. Na podstawie II nie może więc zachodzić $n < 1$.

Do udowodnienia dwóch pozostałych własności wprowadzimy

LEMAT. *Jeżeli liczba a jest największą liczbą naturalną mniejszą od liczby naturalnej b, to b jest najmniejszą liczbą naturalną większą od a, i odwrotnie.*

Dowód. Niech a będzie największą liczbą naturalną mniejszą od danej liczby b. Zgodnie z III istnieje w zbiorze liczb naturalnych większych od a liczba najmniejsza. Oznaczmy ją przez c. Wtedy jest

$$a < c \tag{1}$$

i z nierówności $a < b$ wynika, że $c = b$ lub $c < b$. Gdyby było $c < b$, to z faktu że a jest największą liczbą mniejszą od b wynikałoby, że $c = a$ lub $c < a$. Ale to jest niemożliwe wobec nierówności (1) i aksjomatu II. Pozostaje więc jedyna możliwość $c = b$, co dowodzi pierwszej części lematu. Dowód wynikania w odwrotną stronę jest podobny ze względu na symetrię.

Udowodnimy teraz 4°. Załóżmy, że x jest następnikiem dwóch liczb a i b. Oznacza to, że x jest najmniejszą liczbą naturalną większą od a i jednocześnie x jest najmniejszą liczbą naturalną większą od b. Z lematu wynika, że a jest największą liczbą naturalną mniejszą od x i że taką samą własność ma b. Stąd wynika, że $a = b$.

Pozostaje do udowodnienia 5°. Niech Z będzie zbiorem o żądanych własnościach. Przypuśćmy, że zbiór U liczb naturalnych nie należących do Z jest niepusty. Z III wynika, że zawiera on element najmniejszy x. Zbiór liczb naturalnych mniejszych od x oznaczamy T; ponieważ $1 \in Z$, więc też $1 \in T$, czyli zbiór T jest niepusty. Z aksjomatu I wynika, że każdy element zbioru T jest mniejszy od każdego elementu zbioru U, a więc na podstawie II żadnemu z nich nie jest równy. Inaczej mówiąc, żaden element zbioru T nie należy do U, czyli każdy należy do Z. Na podstawie IV istnieje w zbiorze T element największy. Oznaczamy go przez y. Wobec lematu, x jest najmniejszym elementem większym od y, a więc jest następnikiem liczby y. Ponieważ $y \in Z$, więc $x \in Z$, wbrew założeniu. Ta sprzeczność dowodzi, że zbiór U musi być pusty, a więc Z zawiera wszystkie liczby naturalne.

4. Gdyby chcieć rozwinąć arytmetykę liczb naturalnych w oparciu o aksjomaty I–V, to przeprowadzenie dowodu równoważności z aksjomatyką Peano byłoby niepotrzebne. Dowód ten jednak upewnia nas, że takie rozwinięcie jest możliwe. Natomiast poszczególne definicje i dowody prościej byłoby oprzeć bezpośrednio na aksjomatach I–V.

Należy wspomnieć, że prócz aksjomatów Peano znane są też inne sposoby wprowadzenia liczb naturalnych. Jednym z nich jest oparcie tego pojęcia na aksjomatach zbiorów. Ale aksjomatyka zbiorów jest trudniejsza niż bezpośrednia aksjomatyka liczb naturalnych. (Na przykład bardzo wyrafinowany wydaje się aksjomat, że istnieje zbiór wszystkich podzbiorów danego zbioru.) W naszej aksjomatyce I–V, jak też w aksjomatyce Peano, mówi się co prawda także o zbiorach, ale traktowane są one w sposób czysto intuicyjny, jak to się mówi — naiwny. Należą one do języka, którym wyrażamy własności liczb naturalnych i dalsze cofanie się w definicjach wydaje się już nie uproszczeniem, lecz komplikowaniem zagadnienia.