ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIX (1976)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

L. A. STEEN

Momenty zwrotne w historii teorii spektralnej*

Rozwój teorii spektralnej jest jednym z najbardziej pouczających rozdziałów historii matematyki współczesnej. W dużym stopniu przyczynia się do tego fakt, że tak różne obiekty jak atomy, operatory i algebry mają spektra. Centralnym punktem nowoczesnego ujęcia twierdzenia spektralnego jest stwierdzenie, że pewne operatory liniowe na nieskończenie wymiarowej przestrzeni mogą być przedstawione w postaci „diagonalnej". Na początku dwudziestego wieku ani twierdzenia spektralnego, ani nawet słowa „spektrum" nie można jeszcze znaleźć w repertuarze matematyka. Matematyczna teoria spektralna, mimo korzeni tkwiących głęboko w przeszłości, jest więc wyraźnie tworem dwudziestego wieku.

Dzisiaj każdy student matematyki zapoznaje się z twierdzeniem spektralnym najpóźniej na wykładzie analizy funkcjonalnej, a często nawet wcześniej, na wykładzie algebry liniowej. Zwykle zajmuje się on jednym przykładem twierdzenia spektralnego, wyrwanym z kontekstu historycznego, a pogrążonym w logicznym nurcie pewnego szczególnego wykładu. I chociaż taki schemat jest dydaktycznie wydajny i logicznie estetyczny, to często przesłania on fakt, że twierdzenie spektralne było (i być może wciąż jest) gatunkiem rozwijającym się. Ewolucja twierdzenia spektralnego jest dobrym przykładem współbrzmienia między matematyką czystą a stosowaną. Jakkolwiek siłą napędową rozwoju tego twierdzenia była próba stworzenia teorii matematycznych odpowiednich dla opisu różnych zjawisk fizycznych, to kolejne formy, przez jakie ono przechodziło, odpowiadają formom, które znaczyły rozwój nowoczesnej analizy abstrakcyjnej.

Dajemy więc tu powierzchowny zarys ewolucji twierdzenia spektralnego, jako mikrokosmiczny przykład z historii matematyki dwudziestego stulecia. Aby zrozumieć znaczenie współczesnych osiągnięć i ich związek z przeszłością, zaczynamy od podania głównych historycznych źródeł naszego przedmiotu.

1. Twierdzenie o osiach głównych. Jedynym twierdzeniem znanym na przełomie dwudziestego wieku, w którym — z perspektywy czasu — możemy rozpoznać

---

* Jest to tłumaczenie artykułu *Highlights in the history of spectral theory*, który został opublikowany w The American Mathematical Monthly 80 (1973), s. 359–381 (*przyp. red.*).

bezpośredniego zwiastuna nowoczesnego twierdzenia spektralnego, jest twierdzenie o osiach głównych w geometrii analitycznej. Nie powinien być zaskoczeniem fakt, że najprostszą formę tego twierdzenia odnajdujemy w pracach twórców geometrii analitycznej: Pierre de Fermata (1601–1665) i Réné Descartesa (1596–1650). Dla płaszczyzny euklidesowej R^2 twierdzenie to mówi, że forma kwadratowa $ax^2+2bxy+cy^2$ może być sprowadzona przez obrót płaszczyzny do postaci normalnej $ax^2+\beta y^2$, przy czym osie główne formy normalnej pokrywają się z nowymi osiami współrzędnych. Istotną zawartość tego twierdzenia: algebraiczna redukcja do postaci normalnej odpowiada geometrycznemu obrotowi do osi głównych — odnajdujemy w Geometrii Kartezjusza [1637](1). W tym samym czasie twierdzenie o osiach głównych znał Fermat, lecz go nie opublikował i ukazało się ono dopiero po jego śmierci [1679]. Pojęcie osi głównych było wprowadzone przez Leonharda Eulera (1707–1783) w jego badaniach nad mechaniką obracających się ciał [1765]. Euler zajmował się również (w [1748]) redukcją form kwadratowych w dwóch i w trzech wymiarach.

W swej ogólnej postaci twierdzenie o osiach głównych stwierdza, że dowolna symetryczna forma kwadratowa $(Ax, x) = \sum a_{ij}x_ix_j$ może być po pewnej ortogonalnej transformacji T: $R^n \to R^n$ zapisana w postaci normalnej $\sum \lambda_i x_i^2$ (macierz A jest symetryczna, jeśli $a_{ij} = a_{ji}$; transformacja T jest ortogonalna, jeśli zachowuje metrykę euklidesową w R^n). Algebraiczną część twierdzenia (forma kwadratowa może być zapisana jako suma kwadratów) z przypadku R^2 do R^n uogólnił Joseph Louis Lagrange (1736–1813) w artykule [1759] o minimach i maximach funkcji wielu zmiennych. W [1827] Carl Gustaw Jocob Jacobi (1804–1851) badał osie główne różnych powierzchni kwadratowych, a mniej więcej w tym samym czasie Augustin-Louis Cauchy (1789–1867) wykazał w [1829] i [1830], że współczynniki λ_i symetrycznej formy kwadratowej muszą być liczbami rzeczywistymi.

Dopiero jednak w drugiej połowie XIX w. uzyskano ogólną postać twierdzenia o osiach głównych, gdy James Joseph Sylwester (1814–1897) i Arthur Cayley (1821–1895) użyli zapisu macierzowego dla systematycznego algebraicznego opisu przestrzeni n-wymiarowej. W [1852] Sylwester udowodnił, że współczynniki λ_i postaci normalnej formy (Ax, x) są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $\det(\lambda I - A) = 0$; w [1858] Cayley zapoczątkował rachunek macierzowy, w którym redukcja do postaci normalnej odpowiadała procesowi diagonalizacji macierzy A. W języku macierzy twierdzenie o osiach głównych stwierdza, że każda rzeczywista symetryczna macierz A jest ortogonalnie równoważna pewnej diagonalnej macierzy D; innymi słowy, istnieje macierz ortogonalna T taka, że macierz $D = T^{-1}AT$ jest diagonalna. Współczynniki na przekątnej macierzy D są wartościami własnymi macierzy A, tzn. pierwiastkami równania wielomianowego $\det(\lambda I - A) = 0$.

Chociaż nowe koncepcje teorii macierzy miały natychmiastowy i głęboki wpływ na matematykę brytyjską, na kontynencie ich oddźwięk był stosunkowo słaby.

---

(1) Data w nawiasach kwadratowych oznacza, oprócz roku ukazania się dzieła, jego pozycję w bibliografii zamieszczonej na końcu artykułu.

Szczególnie w Niemczech, nawet jeszcze w dwudziestym wieku, formy dwuliniowe pozostawały głównym narzędziem geometrii analitycznej, a w [1878] Georg Frobenius (1849–1917) opublikował systematyczny wykład algebry macierzy całkowicie w języku form dwuliniowych. Tak więc, w końcu dziewiętnastego stulecia rozróżnić można dwie wersje twierdzenia o osiach głównych: redukcja symetrycznej formy kwadratowej do postaci normalnej i diagonalizacja rzeczywistej macierzy symetrycznej.

2. Nieskończone układy równań liniowych. Centralnym faktem nowoczesnej teorii spektralnej jest to, że również w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych pewne operatory liniowe mogą być przedstawione w postaci „diagonalnej". Tak więc, drugim historycznym źródłem teorii spektralnej jest ewolucja nieskończenie wymiarowej teorii z przypadków skończenie wymiarowych. Ten rozwój nastąpił najpierw w algebrze — w rozwiązywaniu układów równań liniowych — a dopiero znacznie później w geometrii. W osiemnastym i dziewiętnastym wieku skończone systemy równań liniowych były rozwiązywane najczęściej metodą eliminacji. Metoda ta została rozwinięta na przykład w [1770] i [1779] przez Eulera i Etienne Bezout (1730–1783). W [1750] Gabriel Cramer (1704–1752) przedstawił metodę. rozwiązywania układów równań typu 3×3, która nosi jego imię, chociaż, oczywiście, nie używał on ani pojęcia, ani zapisu wyznacznikowego.

Nieskończone systemy równań były używane w osiemnastym i dziewiętnastym wieku do otrzymywania formalnych rozwiązań równań różniczkowych metodą współczynników nieokreślonych: jeśli szereg formalny o nieznanych współczynnikach wstawimy na miejsce niewiadomej w danym równaniu różniczkowym, to rozwiązanie równania różniczkowego sprowadzi się do znalezienia nieskończenie wielu nieznanych współczynników. (Oczywiście, mało kto wówczas troszczył się o to, czy otrzymany w ten sposób szereg potęgowy jest zbieżny.) W dobrych przypadkach nieskończony system równań na współczynniki dawał wzór rekurencyjny, który umożliwiał rozwiązanie nieskończonego układu za pomocą skończenie wymiarowych metod. Z tego też właśnie powodu otrzymywane tak rekurencyjne techniki w małym stopniu przyczyniły się do rozwoju ogólnej teorii systemów nieskończenie wymiarowych.

Joseph Fourier (1768–1830) przypuścił na szerokim froncie pierwszy znaczący atak na problem nieskończonych układów równań, gdy próbował wykazać [1822], że każda funkcja może być wyrażona jako nieskończona kombinacja liniowa funkcji trygonometrycznych. Zadanie wyznaczenia nieznanych współczynników tych kombinacji liniowych bezpośrednio doprowadziło go do ogólnego problemu rozwiązywania nieskończonego układu równań liniowych. Metoda Fouriera (nazwana przez Fryderyka Riesza [1913a] *principe des reduites*) polegała na tym, by rozwiązać najpierw układ $n \times n$ zwykłymi środkami, a następnie przejść do granicy z $n \to \infty$.

I chociaż wypowiedziane przez Fouriera twierdzenie o możliwości rozwinięcia „dowolnej" funkcji w szereg trygonometryczny dało bodziec do intensywnej pracy

nad teorię całkowania, to jego metoda rozwiązywania nieskończonych układów równań została zignorowana. Ponad pięćdziesiąt lat upłynęło nim Teodor Kötteritzsch z Saksonii wznowił te badania; w artykule [1870] próbował uogólnić prawo Cramera na układy nieskończone. W siedem lat później amerykański astronom George William Hill (1838–1914) opublikował w Cambridge, Massachusetts, monografię [1877b], w której z powodzeniem zastosował teorię wyznaczników do nieskończenie wymiarowego przypadku. W owym czasie była ona stosowana jedynie dla skończenie wymiarowych systemów. Praca Hilla dotarła do Europy w [1886a], gdy G. Mittag-Leffler przedrukował ją w Acta Mathematica. Było to w rok po ukazaniu się we Francji artykułu [1885a] Paula Appella (1855–1930), w którym zastosował on *principe des réduites* do wyznaczenia współczynników rozwinięcia funkcji eliptycznych w szeregi potęgowe.

W tym czasie do dyskusji włączył się Henri Poincaré (1854–1912) w dwóch artykułach ([1885b], [1886b]), w których, mając na celu wyjaśnienie prac Hilla i Appella, podał on ścisłą definicję nieskończonego wyznacznika. Dzieło rozpoczęte w Paryżu przez Poincarégo było kontynuowane w Sztokholmie przez Helge von Kocha (1870–1924), który w latach 1890–1910 rozwinął obszerną teorię wyznaczników nieskończonych. Pierwsze poważne artykuły von Kocha na ten temat ukazały się w [1891] i [1892]; jego własny przegląd tej dziedziny zawarty w [1910d] dostarcza dalszych referencji. Najnowszy przegląd [1968] dokonany przez Michaela Bernkopfa zawiera dokładną dyskusję tych podstawowych artykułów.

3. Równania całkowe. Teoria macierzy i wyznaczników nieskończonych doprowadziłaby bezpośrednio do elementarnego twierdzenia spektralnego, gdyby ktoś uogólnił twierdzenie o osiach głównych w jego postaci mówiącej o diagonalizowalności. Jednak droga do teorii spektralnej nie była tak prosta: pierwsze twierdzenie spektralne otrzymano dopiero po zastosowaniu wyznaczników nieskończonych do równań całkowych, a więc po rozszerzeniu teorii z przeliczalnej do nieprzeliczalnej.

Zazwyczaj uważa się, że pierwsze formalne badania równań całkowych zawarte są w [1823] i [1826], gdzie młody norweski geniusz Niels Henrik Abel (1802–1829) użył równania całkowego dla rozwiązania uogólnionego problemu wahadła. Problem ten dotyczył kształtu drutu, po którym doskonale gładki koralik porusza się pod wpływem siły ciężkości. Nieco później Joseph Liouville (1809–1882) wprowadził (w [1837]) metodę iteracji dla rozwiązania równań całkowych szczególnej postaci; w [1877a] Carl Neumann (1832–1925), badając problem wartości brzegowych dla funkcji harmonicznych, rozciągnął iteracyjną metodę Liouville'a na sytuację bardziej ogólną.

Praca Neumanna przyśpieszyła poważne badania nad równaniami całkowymi, a w szczególności badania Poincarégo we Francji oraz Vito Volterry (1860–1940) w Rzymie. Ale dopiero w 1900 r. teoria równań całkowych nabrała szczególnego znaczenia w historii teorii spektralnej. W tym roku bowiem szwedzki matematyk Ivar Fredholm (1866–1927), wówczas docent na uniwersytecie w Sztokholmie,

zastosował do równań całkowych teorię macierzy i wyznaczników nieskończonych rozwiniętą przez jego kolegę von Kocha. Naśladując technikę rozwijania wyznaczników nieskończonych von Kocha, Fredholm w [1900] otrzymał swoje sławne „alternatywne" twierdzenie dotyczące rozwiązań równania całkowego

$$\Phi(x)+\int_0^1 K(x, y)\Phi(y)\,dy = \Psi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{1}$$

Podobnie jak Bernoulli (1700–1784), który prawie dwa wieki wcześniej przedstawił drgającą strunę jako granicę n oscylujących cząstek [1732], tak Fredholm rozważał równanie całkowe (1) jako graniczny przypadek odpowiadającego systemu liniowego:

$$\Phi(x_i)+\sum_{j=1}^{n} K(x_i, y_j)\Phi(y_j) = \Psi(x_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{2}$$

Fredholm zdefiniował „wyznacznik" D_K dla równania całkowego (1), który był ciągłym odpowiednikiem klasycznego wyznacznika systemu $n \times n$ (2). Udowodnił też — w ścisłej analogii z teorią klasyczną dla (2) — że jeśli $D_K \neq 0$, to równanie całkowe (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie, które może być wyrażone jako stosunek dwóch „wyznaczników", lub odpowiednio, że jeśli $D_K = 0$, to transponowane równanie jednorodne

$$\Phi(x)+\int_0^1 K(y, x)\Phi(y)\,dy = 0$$

ma nietrywialne rozwiązania i (1) jest rozwiązalne wtedy i tylko wtedy, jeśli Ψ jest ortogonalne do każdego spośród tych rozwiązań. Główny artykuł Fredholma na ten temat ukazał się w [1903a]; streszczenie tej pracy wraz z późniejszym rozwojem badań jest treścią jego przeglądowego artykułu [1910e].

4. Dawid Hilbert. Chociaż w pracach zarówno von Kocha, jak i Fredholma jest niewiele rzeczy, które mogłyby być interpretowane jako bezpośredni wstęp do nowoczesnego twierdzenia spektralnego, to mamy dwa szczególne powody dla omówienia tych badań — jeden z nich jest matematyczny, a drugi historyczny. Ewolucja nieskończenie wymiarowej teorii spektralnej z dużo prostszej, skończenie wymiarowej teorii, która dokonała się w dwudziestym wieku, była poprzedzona w dziewiętnastym wieku rozwojem teorii równań liniowych i wyznaczników z przypadku skończonego do nieskończonego (von Koch) i do ciągłego (Fredholm). Ale można znaleźć nawet bardziej bezpośredni związek, gdyż, zgodnie ze słowami Hermanna Weyla [1944], Hilbert po zapoznaniu się z ideami Fredholma na swym seminarium w latach 1900–1901 (referował je kolega Fredholma, Eric Holmgren) zapalił się do tego od razu (2). Przez następne dziesięć lat Hilbert (1862–1943)

(2) Por. artykuł R. Couranta, *Wspomnienie z Getyngi*, Wiadom. Mat. 18 (1974), s. 145–157 (*przyp. red.*).

skupił swój imponujący talent matematyczny wyłącznie na równaniach całkowych. W serii sześciu artykułów opublikowanych w Göttingen Nachrichten, w latach 1904–1910 (zebranych i opublikowanych jako jeden tom w [1912a]) przedstawił on w zarysie główne definicje i twierdzenia teorii spektralnej (której nazwę wymyślił) oraz teorii przestrzeni Hilberta (jednak bez nadawania tej nazwy i nawet bez bezpośredniej definicji).

Hilbert zajmował się głównie równaniem całkowym

$$\Phi(x)-\lambda\int_0^1 K(x, y)\Phi(y)dy = \Psi(x) \tag{3}$$

wraz z odpowiadającym mu skończenie bądź nieskończenie wymiarowym równaniem macierzowym:

$$\Phi(x_i)-\lambda\sum_j K(x_i, y_i)\Phi(y_j) = \Psi(x_i). \tag{4}$$

W trakcie tworzenia maszynerii niezbędnej do rozwiązania tych równań, Hilbert zdefiniował spektrum formy kwadratowej K, odróżnił spektrum punktowe od spektrum ciągłego oraz zdefiniował pojęcie pełnociągłości. To ostatnie służyło do oddzielenia form, które mają czysto punktowe spektra, od tych o spektrach bardziej skomplikowanych. Jednakże z punktu widzenia naszego eseju najważniejszy jest fakt, że Hilbert sformułował i udowodnił twierdzenie spektralne nie tylko dla form pełnociągłych, lecz również dla form ograniczonych.

Prace Hilberta dotyczące równań całkowych zawierają zadziwiającą ilość faktów, które obecnie rozpoznajemy jako nowoczesną analizę w klasycznym języku. Hilbert głównie był zainteresowany rozwiązywaniem równań całkowych, nigdy więc nie zastosował swoich rezultatów specjalnie do macierzy lub przekształceń; co więcej, z powodu umieszczenia parametru λ przy całce w równaniu (3) wszystkie wartości własne otrzymane przez Hilberta są odwrotnościami używanych obecnie. I podczas gdy twierdzenia Hilberta mają nowoczesną treść, to główną metodą stosowaną przez niego była metoda znana Bernoulliemu i Fredholmowi — pracochłonne przejście do granicy z odpowiadającego przypadku skończonego.

Poczynając od napisanej pod kierunkiem Hilberta pracy doktorskiej w 1905 r., Erhard Schmidt (1876–1959) uogólniał i upraszczał dzieło Hilberta, wprowadzając sugestywny język geometrii euklidesowej. W [1907a], [1907b] i [1908a] Schmidt przedstawił ostateczną teorię „przestrzeni Hilberta" — przestrzeni ciągów sumowalnych z kwadratem, obecnie nazywanej przestrzenią l^2 — teorię przesyconą językiem norm, liniowości, podprzestrzeni i rzutów ortogonalnych. (To Schmidt właśnie uogólnił na przestrzeń l^2 iteracyjny algorytm dla ortonormalizacji, po raz pierwszy wprowadzony w [1883] przez Jörgena Pedersona Grama z Kopenhagi.) Uproszczenia pojęciowe wprowadzone przez Schmidta były natychmiast przyswojone przez Ernsta Hellingera (1883–1950) i Hermanna Weyla (1885–1955) w pracach doktorskich napisanych pod kierunkiem Hilberta w latach 1907 i 1908. W [1909a] Hellinger sformułował teorię form kwadratowych w nowym języku stworzonym

przez Hilberta i Schmidta. W tym samym roku Weyl opublikował obszerne studium na temat form ograniczonych i ich spektrum [1909d]. W ten sposób pod koniec pierwszego dziesięciolecia dwudziestego wieku w pracach Hilberta i jego uczniów możemy dostrzec główną część teorii spektralnej dla ograniczonych transformacji liniowych w l^2.

5. Teoria spektralna Hilberta–Schmidta. Przypominamy tu twierdzenie o osiach głównych dla przestrzeni skończenie wymiarowych. Podobnie zrobił to Hilbert na początku swego pierwszego artykułu poświęconego równaniom całkowym [1904a]. Niech $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ będą n wartościami własnymi (rzeczywistymi) macierzy symetrycznej K wymiaru $n \times n$, wypisanymi zgodnie ze swoimi krotnościami. Niech dalej $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ będzie układem ortogonalnym złożonym z odpowiadających wektorów własnych, tzn. $K\Phi_i = \lambda_i \Phi_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Wówczas, przy obraniu $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ jako bazy, działanie macierzy K wyraża się za pomocą macierzy diagonalnej L o współczynnikach λ_i na przekątnej. Macierz T, której wierszami są wektory $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, jest transformacją ortogonalną przeprowadzającą nowe wektory bazy $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ z powrotem w początkowe (kanoniczne) wektory bazy. A więc $L = T^{-1}KT$ jest diagonalizacją macierzy K za pomocą transformacji ortogonalnej T. Macierz L może być zapisana jako $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$, gdzie P_i jest rzutowaniem na jednowymiarową podprzestrzeń rozpiętą przez Φ_i.

Pierwszym krokiem Hilberta w rozszerzaniu tego twierdzenia było zdefiniowanie pojęcia wartości własnej również dla nieskończonej formy symetrycznej K. Jego nowym pomysłem było spektrum formy K, oznaczane $\sigma(K)$. Jest to zbiór tych λ, dla których transformacja $\lambda I - K$ nie jest odwracalna. (W rzeczywistości Hilbert używał transformacji $I - \lambda K$, podczas gdy Schmidt posługiwał się transformacją $\lambda I - K$.) Podzbiór zbioru $\sigma(K)$, składający się z tych λ, dla których równanie $K\Phi = \lambda\Phi$ ma nietrywialne rozwiązania, nazywa się *spektrum punktowym transformacji* K; jest to ścisły odpowiednik zbioru wartości własnych. Dopełnienie punktowego spektrum w zbiorze $\sigma(K)$ jest nazywane *spektrum ciągłym*. Duża część czwartego artykułu Hilberta [1906a] jest poświęcona badaniom związków między transformacją K a jej spektrum $\sigma(K)$.

Jedną z najprostszych zależności odkrytych przez Hilberta był fakt, że spektrum $\sigma(K)$ jest zbiorem ograniczonym, jeśli K jest transformacją ograniczoną — to znaczy, jeśli zbiór $S = \{\|Kx\| : \|x\| \leqslant 1\}$ jest ograniczony (gdzie znak $\| \|$, który zawdzięczamy Schmidtowi, oznacza normę w l^2. W rzeczywistości, jeżeli forma K jest symetryczna, to kres górny zbioru S (nazywany *ograniczeniem* lub *normą* transformacji K i oznaczany $\|K\|$) jest równy kresowi górnemu zbioru $\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(K)\}$; fakt ten obecnie nazywamy *twierdzeniem o promieniu spektralnym*. Ograniczone transformacje liniowe w l^2 są ważne jeszcze z innego punktu widzenia, który również zawdzięczamy Hilbertowi: są bowiem one dokładnie ciągłymi transformacjami liniowymi, w tym sensie, że zachowują mocną zbieżność (tzn. $\|Kx_n - Kx\| \to 0$, jeśli tylko $\|x_n - x\| \to 0$).

Hilbert rozciągnął twierdzenie o osiach głównych na symetryczne, ograniczone transformacje liniowe; spektra tych transformacji są ograniczonymi podzbiorami osi rzeczywistej. Te wartości λ, które należą do punktowego spektrum $\sigma(K)$ transformacji K są podobne do wartości własnych, ponieważ istnieje odpowiadający im ortogonalny układ wektorów własnych Φ_λ, spełniających równość $K\Phi_\lambda = \lambda\Phi_\lambda$. Jeśli przez P_λ oznaczymy rzut na podprzestrzeń generowaną przez Φ_λ, to możemy utworzyć transformację diagonalną $L = \sum \lambda P_\lambda$, gdzie λ należy do punktowego spektrum $\sigma(K)$. L odpowiada dokładnie działaniu transformacji K na podprzestrzeni generowanej przez wektory własne Φ_λ. Ponieważ jednak ta podprzestrzeń na ogół jest istotnie mniejsza od l^2 — pominęliśmy bowiem spektrum ciągłe — nie możemy powiedzieć, że L i K są tą samą transformacją.

Aby opisać udział spektrum ciągłego, Hilbert wprowadził pewien rodzaj całki wzorowanej na tej, którą w [1894] zdefiniował duński matematyk Thomas Jean Stieltjes (1856–1894). W badaniach ułamków łańcuchowych Stieltjes doszedł (poprzez problem momentów) do całki $\int_a^b f(x)dg(x)$ jako do granicy sum $\sum f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]$ (dla f ciągłej i g rosnącej). Zapisując sumę $\sum \lambda_i P_{\lambda_i}$ w postaci $\sum \lambda_i[E_{\lambda_i}-E_{\lambda_{i-1}}]$, gdzie $E_{\lambda_i} = \sum_{j=1}^{i} P_{\lambda_j}$, Hilbert skonstruował dla ciągłego spektrum $s(K)$ całkę Stieltjesa $\int_{s(K)} \lambda dE_\lambda$ jako granicę sum postaci $\sum \lambda_i[E_{\lambda_i}-E_{\lambda_{i-1}}]$. Twierdzenie spektralne Hilberta mówiło, że każda ograniczona symetryczna transformacja liniowa w l^2 może być przedstawiona (za pomocą ortogonalnego przekształcenia) w postaci „diagonalnej":

$$\sum_{\varrho(K)} \lambda P_\lambda + \int_{s(K)} \lambda dE_\lambda, \tag{5}$$

gdzie sumowanie jest po spektrum punktowym, a całkowanie po spektrum ciągłym.

Hilbert uzupełnił swoją teorię spektralną, wyznaczając szeroką klasę transformacji, których spektrum ciągłe jest zbiorem pustym. Nazwał on takie transformacje pełnociągłymi, a Schmidt scharakteryzował je jako takie, które mają własność przeprowadzania słabo zbieżnych ciągów w mocno zbieżne. Innymi słowami, transformacja liniowa K jest pełnociągła, gdy z tego, że $(y, x_n) \to (y, x)$ dla każdego y wynika

$$\|Kx_n - Kx\| \to 0.$$

Pełnociągłe transformacje są najbliższym nieskończenie wymiarowym odpowiednikiem transformacji w przestrzeniach skończenie wymiarowych. Ich spektra składają się z wartości własnych, których jedynym możliwym punktem skupienia jest zero; co więcej, każda pełnociągła, symetryczna transformacja liniowa K może być wyrażona za pomocą pewnego przekształcenia ortogonalnego w postaci diagonalnej $\sum \lambda P_\lambda$ (gdyż $s(K) = \emptyset$).

Chociaż Hilbert początkowo używał nieskończonych macierzy jedynie jako wygodnego aparatu w równaniach całkowych, to zakończył swoje badania teoretyczne, znajdując główne ogniwo łączące te dwie teorie. Jest nim zupełny system ortogo-

nalny. Taki system $\{\Phi_n\}$ złożony bądź to z wektorów w przestrzeni ciągów l^2, bądź to z funkcji ciągłych na odcinku [0, 1], jest scharakteryzowany warunkiem ortogonalności $(\Phi_n, \Phi_m) = 0$, jeśli $n \neq m$, oraz faktem, że każdy wektor (bądź funkcja ciągła) Φ może być zapisany za pomocą szeregu Fouriera $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n$. Macierz równania (4) może być otrzymana (za pomocą metod matematycznych, a nie przez analogię) z równania całkowego (3) przez zastąpienie każdej funkcji ciągłej Φ, Ψ przez jej rozwinięcie Fouriera w zupełnym systemie ortogonalnym $[\Phi_n]$. Takie zastosowanie zupełnego układu ortogonalnego pozwoliło Hilbertowi otrzymać alternatywne twierdzenie Fredholma dla równania całkowego (1) bezpośrednio z odpowiadającego twierdzenia dla nieskończonego układu liniowego (2).

Aby być w zgodzie z historią, chcemy jeszcze raz podkreślić fakt, że Hilbert wprowadził teorię spektralną w języku form kwadratowych, podczas gdy my przekazaliśmy jego dzieło głównie w języku transformacji liniowych w nieskończenie wymiarowej przestrzeni l^2. Zaledwie pięćdziesiąt lat dzieliło Hilberta od czasów, gdy Cayley w Anglii i Hermann Grassman (1809–1877) w Niemczech rozpoczęli w [1843] i [1844] systematyczne badanie n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej dla $n > 3$. Hilbert i Schmidt byli pierwszymi, którzy zapuścili się w całkowicie nieznane głębie przestrzeni nieskończenie wymiarowej i dopiero gdy takie przestrzenie zostały zbadane, mogły ukazać się grube zarysy teorii transformacji liniowych. Rozwój teorii nieskończenie wymiarowych (funkcyjnych) przestrzeni, który nastąpił na początku dwudziestego wieku, został opisany w [1966].

6. Całka Lebesgue'a. Mniej więcej w tym czasie, gdy Hilbert tworzył swoją teorię spektralną dla przestrzeni ciągów sumowalnych z kwadratem, Henri Lebesgue (1875–1941) rozwijał teorię nowej całki, która obecnie nosi jego imię ([1901], [1904c]). W trzech krótkich artykułach w 1907 r. Friedrich Riesz (1880–1956) i Ernst Fischer (1875–1959) wykazali związek między pracami Hilberta i Lebesgue'a dowodząc, że przestrzeń Hilberta l^2 jest izomorficzna z przestrzenią L^2 funkcji, których kwadrat jest całkowalny w sensie Lebesgue'a. Riesz stworzył w swojej następnej pracy [1910c] (w której wprowadził też bardziej ogólne pojęcie przestrzeni L^p) spektralną teorię dla L^2 całkowicie odpowiadającą tej, która została rozwinięta dla l^2 przez Hilberta i Schmidta.

W roku poprzedzającym ukazanie się jego pracy o przestrzeniach L^p Riesz udowodnił w [1909b] słynne twierdzenie o reprezentacji. Rozwiązał on w ten sposób problem po raz pierwszy badany w [1903b] przez Jacquesa Hadamarda (1865–1963). Riesz udowodnił, że każdy ciągły funkcjonał liniowy na $C([a, b])$ jest całką Stieltjesa $\int f dg$ ze względu na pewną funkcję g o ograniczonej wariacji. Następnie Lebesgue w odpowiedzi na artykuł Riesza wykazał w [1910f], że każda całka Stieltjesa może być interpretowana jako całka Lebesgue'a przy odpowiednim rozumieniu formuły heurystycznej

$$\int f(x)dg(x) = \int f(x)g'(x)dx.$$

To pozwoliło Johannowi Radonowi (1887–1956) rozwinąć (w [1913b]) teorię całkowania ze względu na dowolną miarę (tzn. przeliczalnie addytywną funkcję zbioru). W ten sposób zamknął on w jednej teorii całkę Lebesgue'a i Stieltjesa, a więc dał podstawę dla całej nowoczesnej teorii całki abstrakcyjnej.

Z tej dygresji wynika, że ewolucja nowoczesnego pojęcia całki była ściśle związana ze stworzeniem przez Hilberta teorii spektralnej. I chociaż żadna z tych teorii nie zależy logicznie od drugiej, to ich historyczne powiązanie jest jasne: Hilbert użył całki Stieltjesa do otrzymania teorii spektralnej dla l^2, a Riesz, idąc w ślad za Hilbertem, posłużył się całką Lebesgue'a w rozwijaniu teorii spektralnej dla L^2.

Drugie dziesięciolecie rozwoju teorii spektralnej było raczej ubogie w wydarzenia. W Getyndze Hilbert zwrócił swoją uwagę na aksjomatyzację fizyki. Było to zadanie, które zaproponował na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w 1900 r. jako szósty wśród swoich 23 sławnych problemów matematyki dwudziestego wieku. Powiedział: „Fizyka jest zbyt trudna dla fizyków" [1970]. W Stanach Zjednoczonych Eliakim Hastings Moore (1862–1932) na Uniwersytecie w Chicago rozwinął system „analizy ogólnej" ([1908b], [1912b]). System ten miał zawierać wyniki Hilberta, Fredholma i Riesza jako szczególne przypadki. Ale oddźwięk rezultatów Moore'a był ograniczony przez to, że europejscy badacze nie byli przyzwyczajeni do przyjmowania nowych idei matematycznych z Ameryki. Poszukiwania Moore'a miały duże znaczenie dla rozwoju matematyki w Stanach Zjednoczonych, nie wpłynęły jednak znacząco na kierunek badań w teorii spektralnej.

W latach 1910–1925 wiele wysiłku włożono w Europie w wyjaśnianie i rekapitulację. Riesz [1913a], Fredholm [1910e] i von Koch [1910d] opublikowali przeglądy teorii nieskończenie wielu zmiennych i teorii równań całkowych. Każda z tych prac zawierała różne warianty teorii spektralnej Hilberta. Zebrane prace Hilberta na temat równań całkowych były opublikowane w formie książkowej w [1912a]. Ale z pewnością najbardziej imponującą pracą przeglądową tego okresu była ogromna *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, która w tomie II.3.2. zawierała napisany przez Hellingera i Otto Toeplitza (1881–1940) zrozumiały wykład teorii równań całkowych i teorii spektralnej; ten przeglądowy artykuł był również opublikowany oddzielnie [1928a].

7. Mechanika kwantowa. W Getyndze w latach 1925–1926 Werner Heisenberg (1901–) i Erwin Schrödinger (1887–1961) stworzyli teorię mechaniki kwantowej. W teorii Heisenberga fizyczny fakt, że pewne obserwacje atomów nie mogą być dokonywane jednocześnie, był matematycznie interpretowany jako nieprzemienność operacji reprezentujących te obserwacje. Wykorzystując to, że algebra macierzy jest nieprzemienna, Heisenberg razem z Maxem Bornem i Pascualem Jordanem ([1925a], [1926a]) przedstawili każdą wielkość fizyczną za pomocą odpowiedniej (skończonej bądź nieskończonej) macierzy, nazwanej transformacją; zbiorem możliwych wartości wielkości fizycznej było spektrum transformacji (tak, że spektrum transformacji, która reprezentowała energię atomu, było właśnie spektrum atomu).

Natomiast Schrödinger rozwijał bardziej ortodoksyjną teorię opartą na badaniu odpowiedniego cząstkowego równania różniczkowego. Po początkowym zdumieniu, że „falowa mechanika" Schrödingera i „mechanika macierzowa" Heisenberga — dwie teorie o zasadniczo różnych punktach wyjścia — mogą prowadzić do tych samych rezultatów, Schrödinger ujednolicił oba podejścia. Wykazał, że wartości własne (lub bardziej ogólnie, spektrum) operatora różniczkowego w falowym równaniu Schrödingera wyznaczają odpowiednią macierz Heisenberga. Podobne rezultaty otrzymał jednocześnie ([1925b], [1926b]) brytyjski fizyk Paul A. M. Dirac (1902–). W ten sposób ponownie wzrosło zainteresowanie teorią spektralną.

Sam Hilbert był zdumiony, że spektra jego form kwadratowych mogą być interpretowane jako spektra atomów. „Rozwinąłem teorię nieskończonej ilości zmiennych z czysto matematycznych powodów, i nawet nazwałem to «analizą spektralną» bez jakichkolwiek przewidywań, że później znajdzie ona zastosowanie do prawdziwego spektrum fizycznego" [1970]. Jednak szybko stało się oczywiste, że teoria spektralna Hilberta była właściwą bazą matematyczną dla nowej mechaniki. Skończone i nieskończone macierze były interpretowane jako transformacje w przestrzeni Hilberta (wciąż rozumiano pod tą nazwą głównie l^2 i L^2), a wielkości fizyczne były reprezentowane przez te transformacje. Narzędziem matematycznym mechaniki kwantowej stała się analiza spektralna. To ponowne ożywienie przyśpieszyło opublikowanie przez Aurela Wintera (1903–1958) pierwszej książki [1929b] poświęconej teorii spektralnej.

Oryginalne twierdzenie spektralne Hilberta odnosiło się do tych rzeczywistych form kwadratowych (lub macierzy nieskończonych), które były ograniczone i symetryczne. To twierdzenie zostało szybko i bez trudu rozszerzone (przez Schmidta i innych) na ograniczone macierze zespolone $A = (a_{ij})$, dla których $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$; takie macierze są nazwane hermitowskimi na cześć francuskiego matematyka Charlesa Hermite'a (1822–1901), który je zdefiniował (w [1855]) i udowodnił, że ich wartości własne są rzeczywiste. Zarówno symetryczne, jak i hermitowskie formy mogą być scharakteryzowane w terminach odpowiadających iloczynów skalarnych warunkiem $(Ax, y) = (x, Ay)$ dla wszystkich x, y. Transformacje hermitowskie podobnie jak macierze symetryczne mają rzeczywiste spektra i, bardziej ogólnie, odgrywają w algebrze transformacji rolę rzeczywistej prostej liczbowej.

Cudowny nieomal wydaje się fakt, że w nowej mechanice jedynie transformacje hermitowskie nadają się do przedstawiania wielkości fizycznych. Jedną z przyczyn tego jest, że wielkości fizyczne są mierzone w liczbach rzeczywistych, więc jest naturalne, by je reprezentować przez te transformacje, które zachowują się jak liczby rzeczywiste. Bardziej może przekonywającym uzasadnieniem jest następujący fakt: hipoteza, że transformacja fizyki matematycznej jest hermitowska, implikuje pewne podstawowe prawa (bądź postulaty) fizyki. Jeśli transformacja A jest hermitowska, to z równania falowego $\ddot{\Phi} = A\Phi$ wynika zachowanie energii, a więc podstawowe prawo klasycznej mechaniki. Również rozwiązanie równania Schrödingera $\dot{\Phi} = iA\Phi$

ma wówczas stałą normę, a to z kolei jest fundamentalnym założeniem mechaniki kwantowej.

Chociaż w nowej mechanice każda obserwabla była reprezentowana przez transformację hermitowską, to nie każda taka transformacja przedstawiała obserwablę. Dirac [1930b] dołączył kluczową hipotezę, że transformacja hermitowska przedstawia obserwablę wtedy i tylko wtedy, gdy jej wektory własne tworzą układ (ortogonalny) zupełny: hipoteza ta miała na celu zapewnienie, by każdy wektor (odpowiadający pewnemu stanowi w mechanice kwantowej) mógł być przedstawiony jako (być może nieskończona) kombinacja liniowa wektorów własnych dowolnej obserwabli. Wyznaczanie transformacji o takich własnościach było częścią teorii spektralnej Hilberta–Schmidta. Ta teoria dała tylko częściową odpowiedź: hermitowskie transformacje, które są pełnociągłe, mają zupełne układy wektorów własnych.

To twierdzenie nie dało zadowalającego wyjaśnienia hipotezy Diraca, gdyż transformacje mechaniki kwantowej na ogół nie są pełnociągłe. Większość ważnych transformacji w fizyce zawiera różniczkowanie funkcji, powiedzmy w L^2. Twierdzenie o całkowaniu przez części pokazuje, że różniczkowanie jest formalnie symetryczne, gdyż w tym przypadku $(Af, g) = (f, Ag)$ oznacza $\int f'g = \int fg'$. Ale ponieważ w praktyce pochodna funkcji nie ma żadnego związku z wielkością funkcji, więc różniczkowanie nie jest ani transformacją ciągłą, ani ograniczoną, ani nawet nie jest wszędzie określone. Rzeczywiście, gdyby transformacja hermitowska symetryczna była określona wszędzie, to musiałaby być ograniczona. Ten zadziwiający fakt — który mówi, że kandydat dla twierdzenia spektralnego, który nie jest ograniczony, nie może być wszędzie określony — był udowodniony już w [1910b] przez Hellingera i Toeplitza.

Tak więc jest wiele transformacji mechaniki kwantowej, które chociaż są hermitowskie, to jednak nie spełniają drugiego założenia Hilberta, a mianowicie nie są ograniczone. Podobnie jak różniczkowanie, są one nieograniczone i określone jedynie na gęstym podzbiorze w L^2. Paul Dirac usiłował przezwyciężyć to wyjątkowe zachowanie się różniczkowania przez wprowadzenie δ-funkcji, aby stworzyć pochodne tam, gdzie nie istniały, i w ten sposób rozszerzyć zbiór funkcji, do których można stosować transformację różniczkowania. Podejście Diraca było bardzo przydatne do tłumaczenia nowej mechaniki kwantowej, a brak odpowiednich podstaw matematycznych doprowadził wreszcie do powstania teorii dystrybucji Laurenta Schwartza. W 1926 r. sposób patrzenia Diraca był raczej alternatywą wobec teorii spektralnej niż jej rozszerzeniem, i w rzeczywistości nie pomógł w rozciągnięciu teorii Hilberta na transformacje nieograniczone.

8. John von Neumann. Po pracach Hilberta jedyne poważniejsze studium poświęcone transformacjom nieograniczonym [1923] opublikował Torsten Carleman (1892–1949) w Szwecji. W swojej monografii Carleman wykazał, że wiele rezultatów Fredholma i Hilberta można otrzymać również przy słabszych założeniach o ograniczoności. Jednak z punktu widzenia teorii spektralnej ważniejszy przełom

nastąpił w latach 1927–1929, kiedy to dwudziestopięcioletni Węgier John von Neumann (1903–1957) zrewolucjonizował badania teorii spektralnej, wprowadzając abstrakcyjne pojęcie operatora liniowego w przestrzeni Hilberta. W [1927] von Neumann wyraził teorię transformacji mechaniki kwantowej w terminach operatorów w przestrzeni Hilberta i wyraźnie uznał potrzebę rozszerzenia teorii spektralnej operatorów hermitowskich z przypadku ograniczonego na przypadek nieograniczony. W [1929a] przeprowadził to uogólnienie.

Przed von Neumannem nazwa „przestrzeń Hilberta" odnosiła się głównie do przestrzeni l^2 (przestrzeni ciągów sumowalnych z kwadratem), lub do przestrzeni L^2 (funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a w kwadracie). Riesz udowodnił, że przestrzeń L^2 jest izomorficzna z l^2. Podstawowymi własnościami tych przestrzeni, szeroko znanymi, były własności przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym, która jest zupełna i ośrodkowa (tzn. ma przeliczalny podzbiór gęsty). Pierwszym krokiem von Neumanna w jego teorii operatorów liniowych było aksjomatyczne zdefiniowanie (abstrakcyjnej) przestrzeni Hilberta, jako dowolnej ośrodkowej i zupełnej przestrzeni z iloczynem skalarnym. Następnie zdefiniował ogólny operator liniowy w abstrakcyjnej przestrzeni Hilberta H jako liniową transformację określoną na pewnym podzbiorze przestrzeni H. O podzbiorze tym, nazywanym *dziedziną* D_T operatora T, na ogół zakłada się, że jest podprzestrzenią liniową w H, która, podobnie jak dziedzina operatora różniczkowania, jest gęsta w H. W ten sposób operatory von Neumanna objęły zarówno macierze, formy kwadratowe teorii Hilberta, jak i transformacje mechaniki kwantowej.

Operator liniowy jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony, a ograniczony operator liniowy o gęstej dziedzinie może być jednoznacznie rozszerzony do ograniczonego operatora liniowego na całej przestrzeni H. Każdy operator iniowy T o gęstej dziedzinie ma dokładnie jeden operator sprzężony T^* zdefiniowany przez relację

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \tag{6}$$

dla wszystkich $x \in D_T$; dziedziną T^* jest zbiór tych $y \in H$, dla których (6) zachodzi dla każdego x. Operator T jest nazywany *samosprzężonym*, jeśli $T = T^*$, i *symetrycznym*, jeśli T^* jest rozszerzeniem T, lub równoważnie, jeśli $(Tx, y) = (x, Ty)$ dla $x, y \in D_T$. (W pracach von Neumanna samosprzężone operatory nazwane były hipermaksymalnymi.)

Każdy operator samosprzężony jest oczywiście symetryczny, a każdy operator symetryczny, który jest wszędzie określony, musi być samosprzężony. Tak więc, dla operatorów ograniczonych (które są bądź to wszędzie określone, bądź mogą być do takich rozszerzone) pojęcia symetryczny i samosprzężony pokrywają się. Twierdzenie Hellingera–Toeplitza, cytowane powyżej w punkcie 7, może być rozszerzone na operatory von Neumanna. Twierdzenie to wykazuje, że każdy operator symetryczny, który jest wszędzie określony, musi być ograniczony. Ten rezultat jest blisko związany z bardziej ogólnym twierdzeniem, które zawdzięczamy Stefanowi Banachowi (1892–1945), a które jest obecnie powszechnie znane jako twier-

dzenie o domkniętym wykresie [1932b]. Tak więc w teorii von Neumanna występują dokładnie trzy typy operatorów symetrycznych:

I. operatory ograniczone, samosprzężone, wszędzie określone;

II. operatory nieograniczone, samosprzężone, określone na zbiorze gęstym, lecz nie wszędzie;

III. operatory nieograniczone, niesamosprzężone, określone na zbiorze gęstym, lecz nie wszędzie.

Oryginalna teoria Hilberta stosowała się do operatorów typu I, natomiast teoria spektralna von Neumanna obejmowała również operatory typu II, gdyż odnosiła się ona do operatorów samosprzężonych. Ta teoria, zapoczątkowana przez von Neumanna, została rozwinięta przez Riesza [1930c] oraz, bardziej obszernie, przez Marshalla H. Stone'a (1903–) w Yale University. Stone wyłożył ją drobiazgowo w [1932a]. W latach 1927–1932 połączone (chociaż w znacznej części niezależne) wysiłki von Neumanna i Stone'a dały największy zestaw nowych metod teorii spektralnej od czasów pięcioletniego trudu Hilberta w latach 1901–1906.

9. Spektralna teoria von Neumanna–Stone'a. Główne twierdzenie spektralne Hilberta mówi, że każda symetryczna transformacja liniowa T może być zapisana w postaci

$$\sum_{e(T)} \lambda P_\lambda + \int_{s(T)} \lambda dE_\lambda.$$

Przez zapisanie pierwszej sumy w postaci całki typu Stieltjesa i połączenie jej z drugą całką możemy wyrazić twierdzenie spektralne Hilberta w zwięzłej formie

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_\lambda, \tag{7}$$

gdzie całkujemy po całym (ograniczonym) spektrum transformacji T. Operatory E_λ są rzutami o następujących własnościach:

(i) Jeśli $\lambda < \mu$, obraz E_λ jest zawarty w obrazie E_μ;

(ii) Jeśli $\varepsilon > 0$, $E_{\lambda+\varepsilon} \to E_\lambda$, gdy $\varepsilon \to 0$;

(iii) $E_\lambda \to 0$, gdy $\lambda \to -\infty$;

(iv) $E_\lambda \to I$, gdy $\lambda \to +\infty$.

Stone nazwał taką rodzinę operatorów rozkładem identyczności; w bardziej intuicyjnym języku, własności (i)–(iv) odpowiadają żądaniom, by funkcja $\lambda \to E_\lambda$ była niemalejąca, prawostronnie ciągła, z 0 i I jako wartościami ograniczającymi odpowiednio z lewej i z prawej strony.

Uogólnienie przez von Neumanna i Stone'a twierdzenia spektralnego dla operatorów samosprzężonych z przypadku ograniczonego na nieograniczony odpowiada rozszerzeniu (7) ze spektrum $\sigma(T)$ ograniczonego na nieograniczone. Mówi ono, że każdemu samosprzężonemu operatorowi T odpowiada dokładnie jeden rozkład identyczności $\{E_\lambda\}$ taki, że zachodzi (7).

Pomimo siły tego twierdzenia, wiele spośród operatorów różniczkowych nie jest nim objętych, gdyż rzadko są one samosprzężone. Na przykład, aby uczynić operator $D = d/dt$ symetrycznym na zbiorze gęstym Δ w przestrzeni Hilberta $L^2(0, 1)$, powinniśmy wziąć za Δ podzbiór złożony z tych ciągłych funkcji różniczkowalnych f, które spełniają warunek $f(0) = f(1) = 0$ (aby równość $(Df, g) = (f, Dg)$ wynikała z całkowania przez części). Jednak dziedzina D jest zbyt mała, by D był samosprzężony, gdyż każda w sposób ciągły różniczkowalna funkcja z L^2 należy do dziedziny operatora D^*. Aby uczynić D samosprzężonym, musielibyśmy odpowiednio powiększyć jego dziedzinę, ryzykując w ten sposób utratę symetryczności. Każdy operator symetryczny typu III ma tę wadę: jego dziedzina jest mniejsza od dziedziny operatora do niego sprzężonego. Co więcej, korygowanie tej wady przez rozszerzenie dziedziny często jest fatalne w skutkach, gdyż operator o rozszerzonej dziedzinie może już nie być symetryczny.

Aby stosować twierdzenie spektralne do operatorów symetrycznych, von Neumann musiał wiedzieć, które typy operatorów symetrycznych dopuszczają rozszerzenie samosprzężone. On (w [1929a]) i Wintner (w [1929b]) określili szeroką klasę takich operatorów, mianowicie operatory zwane półograniczonymi. Są to takie operatory, dla których istnieje stała dodatnia M spełniająca

$$(Tx, x) \leqslant M \cdot \|x\| \quad \text{dla wszystkich } x \in D_T$$

lub

$$-M\|x\| \leqslant (Tx, x) \quad \text{dla wszystkich } x \in D_T.$$

Najlepsze wypowiedzenie tego rezultatu zawdzięczamy Stone'owi [1932a] i Kurtowi O. Friedrichsowi [1934]: każdy półograniczony operator symetryczny może być rozszerzony do półograniczonego operatora samosprzężonego z tym samym kresem. Podczas gdy teoria spektralna von Neumanna–Stone'a (a również Hilberta) ogniskowała się na operatorach z rzeczywistym spektrum, to twierdzenie spektralne stosuje się, przynajmniej w dwóch przypadkach, do operatorów z bardziej ogólnym spektrum. Najprostszy przypadek dotyczy operatorów izometrycznych, to znaczy takich, które nie zmieniają iloczynu skalarnego w H; z tej definicji natychmiast wynika, że spektrum operatora izometrycznego jest podzbiorem okręgu jednostkowego. Operator izometryczny, który odwzorowuje H na H nazywamy *unitarnym*. Jest on scharakteryzowany przez fakt, że operator do niego sprzężony jest zarazem odwrotny (tzn. $TT^* = T^*T = I$). Operatory unitarne były po raz pierwszy badane w [1909c] przez Isaaca Schura, a wprowadził je Leon Autonne w [1902]. W [1929a] von Neumann wykorzystał transformację Cayleya

$$C\colon\ T \to (T-iI)(T+iI)^{-1}$$

dla przekształcenia operatora symetrycznego T w operator izometryczny $C(T)$; udowodnił on również, że T jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy $C(T)$ jest unitarny. Tak więc teoria spektralna operatorów unitarnych wynika z teorii spektralnej operatorów samosprzężonych przez użycie całki spektralnej na okręgu zamiast na prostej rzeczywistej.

Każdy ograniczony operator liniowy T może być zapisany w formie „kartezjańskiej" $T = A+iB$, gdzie A i B są ograniczone i samosprzężone; istotnie, wystarczy przyjąć

$$A = \frac{1}{2}(T+T^*), \quad B = \frac{1}{2i}(T-T^*).$$

Wydawałoby się więc, że twierdzenie spektralne może być rozszerzone na wszystkie ograniczone operatory liniowe przez użycie podanego wyżej rozkładu. Jednak pewne szczegóły takiego rozszerzenia wymagają, by $AB = BA$ (lub odpowiednio $TT^* = T^*T$). Tak więc uogólnienie to stosuje się jedynie do operatorów, które komutują ze swoimi sprzężeniami. Operatory takie nazwamy *normalnymi*, zgodnie z pracą Teoplitza [1918a]. Toeplitz rozszerzył twierdzenie spektralne Hilberta do pełnociągłych normalnych form kwadratowych, udowadniając, że forma taka jest unitarnie równoważna z formą diagonalną. Ogólniej, rozkład spektralny

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_\lambda$$

rozszerza się również na ograniczone operatory normalne. Wówczas całkujemy po spektrum operatora T, które jest zwartym podzbiorem płaszczyzny zespolonej, zawartym w dysku o promieniu $\|T\|$. Von Neumann [1930a] i Stone [1932a] rozszerzyli zarówno definicję, jak i teorię spektralną operatorów normalnych również na przypadek nieograniczony.

Odeszliśmy bardzo daleko od twierdzenia o osiach głównych. Twierdzenia spektralne von Neumanna i Stone'a dotyczą w większej mierze analizy niż geometrii. Geometryczną treścią twierdzenia spektralnego dla przestrzeni skończenie wymiarowej jest fakt, że całą przestrzeń można przedstawić jako sumę prostą podprzestrzeni, na których dane przekształcenie działa jak zwykłe mnożenie. Twierdzenie takie w odniesieniu do przestrzeni nieskończenie wymiarowych staje się fałszywe z chwilą pojawienia się spektrum ciągłego. W pracy napisanej w 1938 r., lecz opublikowanej dopiero w [1949a], von Neumann wskrzesił geometryczne twierdzenie spektralne przez zdefiniowanie całki prostej przestrzeni Hilberta (w ścisłej analogii do sumy prostej). Następnie wykazał, że działanie operatora samosprzężonego na dowolnej przestrzeni Hilberta może być przedstawione jako skumulowany wynik zwykłych mnożeń w pewnych podprzestrzeniach, których całka prosta jest (unitarnie równoważna z) wyjściową przestrzenią.

10. Twierdzenie Gelfanda–Naimarka. Zbiór wszystkich operatorów na przestrzeni Hilberta tworzy pierścień; pierścienie takie (z różnymi topologiami) były szeroko badane przez von Neumanna i Francisa J. Murraya w [1936a], [1937a] i [1940a]. W tym samym okresie, w latach 1936–1940, S. W. P. Steen opublikował w Anglii serię pięciu artykułów ([1936b], [1937b], [1938a], [1939], [1940b]) poświęconych aksjomatycznej teorii operatorów. Ale pracami, które dały najbardziej doniosły wgląd w twierdzenie spektralne, były [1941a], [1941b] i [1943] opubliko-

wane w ZSRR przez Izraila M. Gelfanda, Marka A. Naimarka i Georgia E. Szyłowa. Gelfand i jego koledzy stworzyli teorię pierścieni unormowanych, która nie tylko obejmowała dużą część wyników von Neumanna, Murraya i Steena dotyczących pierścieni i operatorów, lecz również dała wspaniałą podstawę ogólną do badania transformacji Fouriera i analizy harmonicznej. Zbliżone badania były prowadzone w Stanach Zjednoczonych przez Stone'a ([1940c], [1941c]) i Shizuo Kakutaniego [1940d].

Pierścienie unormowane były po raz pierwszy wprowadzone [1936c] przez japońskiego matematyka Mitio Nagumo, który nazwał je „liniowymi pierścieniami metrycznymi". W [1946] Charles E. Rickart nazwał unormowane pierścienie Gelfanda „algebrami Banacha" dla uniknięcia nieporozumień wynikających z algebraicznego znaczenia słowa „pierścień"; w rezultacie matematycy radzieccy wciąż używają pierwszej nazwy, podczas gdy Amerykanie stosują drugą. Lecz niezależnie od nazwy, własności algebry Banacha są następujące: jest to zupełna, unormowana algebra (nad ciałem liczb zespolonych C) spełniająca multyplikatywną nierówność trójkąta $\|x\|\cdot\|y\| \leqslant \|x\cdot y\|$. Będziemy zakładać, że każda algebra Banacha zawiera element jednostkowy e, gdzie $\|e\| = 1$. Zbiór wszystkich ograniczonych operatorów liniowych w przestrzeni Hilberta jest algebrą Banacha, podobnie jak zbiór wszystkich ciągłych funkcji zespolonych na zwartej przestrzeni topologicznej X z normą

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|\colon\ x \in X\}.$$

Związek pomiędzy tymi dwoma przykładami wyjaśnia ta część teorii algebr Banacha, którą zalicza się do teorii spektralnej.

Teoria Gelfanda przemiennych algebr Banacha opiera się na trzech podstawowych pojęciach: homomorfizmu, ideałów maksymalnych i spektrum. Homomorfizmem przemiennej algebry Banacha B jest niezerowy, multyplikatywny funkcjonał liniowy, jądrem jego jest ideał, który jest maksymalny, gdyż nie zawiera się w żadnym większym właściwym ideale. Co więcej, każdy ideał maksymalny I jest jądrem pewnego homomorfizmu, gdyż w naszym przypadku algebra ilorazowa B/I jest ciałem liczb zespolonych C (zgodnie z rezultatem ogłoszonym przez Stanisława Mazura (1905–) [1938b] i udowodnionym przez Gelfanda [1941a]), a więc odwzorowanie złożone $B \to B/I \to C$ jest homomorfizmem algebry Banacha B z jądrem I. Zbiór M_B tych homomorfizmów (lub równoważnie, ideałów maksymalnych) algebry Banacha B jest wyposażony w najsłabszą topologię, w której wszystkie funkcje $\hat{x}\colon h \to h(x)$ są ciągłe dla wszystkich $x \in B$. Wówczas M_B jest zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa, a każdy element x algebry Banacha B jest reprezentowany w $C(M_B)$ przez „transformację Gelfanda" $\hat{x}$; $C(M_B)$ jest algebrą Banacha zespolonych funkcji ciągłych na M_B.

W ścisłej analogii do teorii spektralnej dla operatorów w przestrzeni Hilberta, Gelfand zdefiniował spektrum $\sigma(x)$ elementu $x \in B$ jako zbiór liczb zespolonych λ, dla których element $x - \lambda e$ nie ma odwrotnego. Zbiór $\sigma(x)$ jest zwarty, niepusty oraz zawiera się w dysku o promieniu $\|x\|$. Co więcej, okazuje się, że $\sigma(x)$ jest dokładnie równy obrazowi transformacji Gelfanda $\hat{x}$:

$$\sigma(x) = \{h(x) \mid h \in M_B\}.$$

Z tego powodu przestrzeń M_B ideałów maksymalnych często jest nazywana *spektrum algebry Banacha B.*

Jeśli B jest algebrą generowaną przez jeden element x (na przykład pewien operator w H), wówczas spektrum algebry B jest odwzorowywane za pomocą $\hat{x}$ homeomorficznie na spektrum x.

W [1943] Gelfand i Naimark udowodnili, że przemienna algebra Banacha $C(M_B)$ jest scharakteryzowana przez istnienie *inwolucji*, to znaczy operacji zespolonego sprzęgania $f \to \bar{f}$. Dokładniej: wykazali oni, że dowolna przemienna algebra Banacha z inwolucją (nazywana B^*-algebrą) jest izometrycznie izomorficzna z algebrą $C(M_B)$ dla pewnej algebry Banacha B. W szczególności przemienna B^*-algebra $B(T)$ generowana przez zadany ograniczony operator normalny T jest izomorficzna z algebrą $C(\sigma(T))$ złożoną ze wszystkich funkcji ciągłych na $\sigma(T)$, spektrum algebry $B(T)$; zakładamy, że T jest normalny, aby zadanie inwolucji $T \to T^*$ nie zniszczyło przemienności algebry $B(T)$.

Znaczenie twierdzenia Gelfanda–Naimarka dla teorii spektralnej jest następujące: twierdzenie spektralne dla ograniczonego operatora normalnego T może być otrzymane poprzez izomorfizm między $B(T)$ a $C(\sigma(T))$ z odpowiedniego twierdzenia dotyczącego ciągłych funkcji zespolonych na $\sigma(T)$. Twierdzenie to mówi, że każda funkcja f ciągła na $\sigma(T)$ (w szczególności funkcja identycznościowa $f(\lambda) = \lambda$) może być aproksymowana w sposób ciągły przez mierzalne funkcje schodkowe postaci $\sum f(\lambda_i) X_{\Lambda_i}$, gdzie X_{Λ_i} jest funkcją charakterystyczną mierzalnego zbioru Λ_i. Przeniesienie tego twierdzenia na algebrę $B(T)$ (dla szczególnego przypadku $f(\lambda) = \lambda$) daje spektralne rozwinięcie operatora normalnego T:

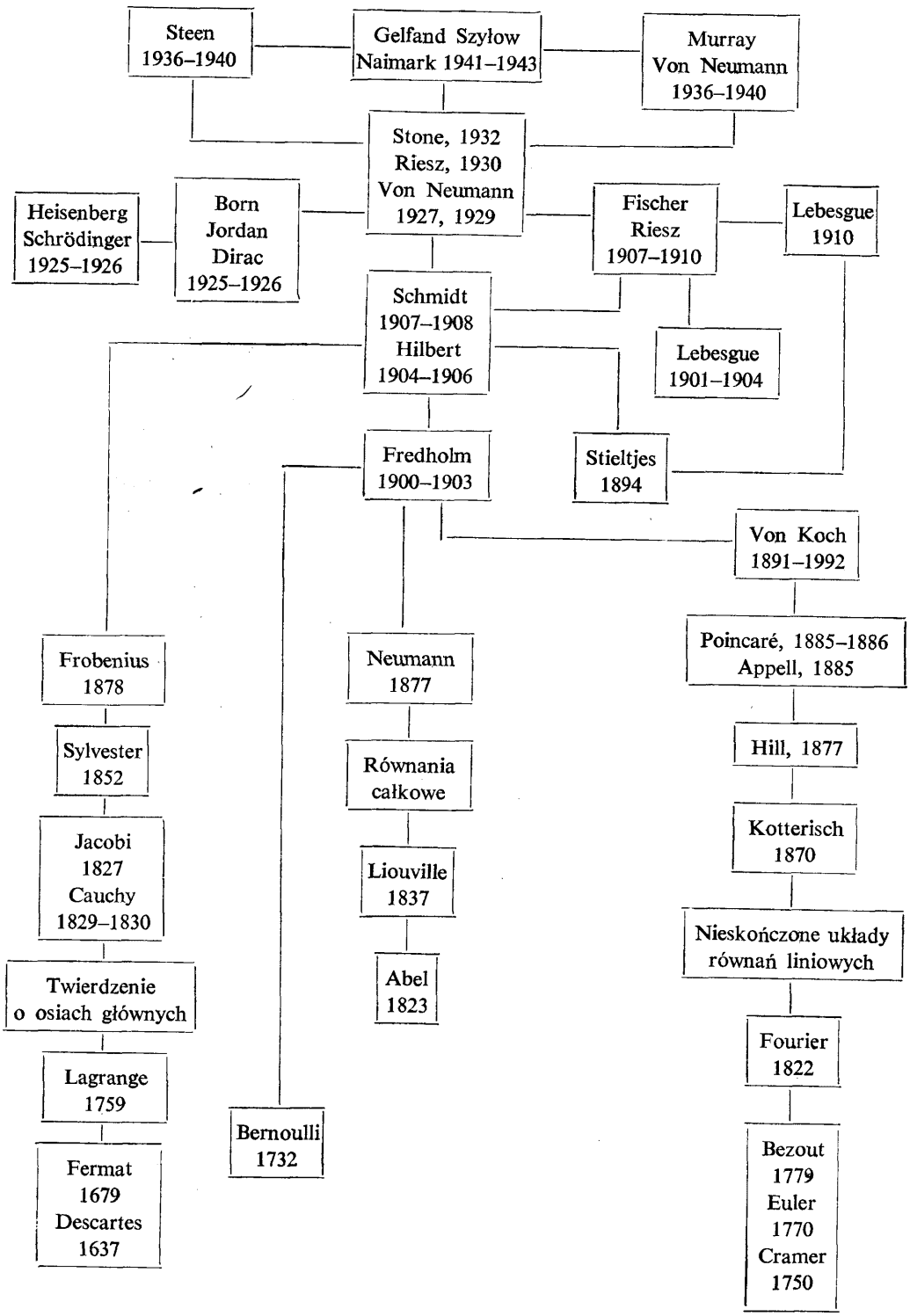
$$T = \int \lambda dE_\lambda.$$

Wyrażając to słowami, a nie za pomocą symboli, możemy powiedzieć, że twierdzenie o aproksymacji pokazuje, że funkcja ciągła może być przybliżona liniowymi kombinacjami funkcji charakterystycznych; twierdzenie spektralne mówi zaś, że ograniczone operatory normalne mogą być przybliżone kombinacjami liniowymi rzutowań. Tak więc teoria Gelfanda algebr Banacha wykazała, że twierdzenie spektralne jest w zasadniczym sensie równoważne z najbardziej elementarnym faktem z teorii funkcji.

W rzeczywistości teoria Gelfanda prowadzi do dużo mocniejszego twierdzenia niż to, o którym była mowa. Przez przeniesienie twierdzenia o aproksymacji dla dowolnej funkcji f otrzymujemy rozwinięcie spektralne postaci

$$f(T) = \int f(\lambda) dE_\lambda.$$

Wzór ten był początkowo wprowadzony przez von Neumanna i Stone'a jako podstawa ich „rachunku operatorowego". Związane z tym ogólne twierdzenie spektralne, które również zawdzięczamy von Neumannowi [1930a], może być wywnioskowane z izomorfizmu Gelfanda–Naimarka: dowolna komutująca rodzina ogra-


Steen
1936–1940
Gelfand Szyłow
Naimark 1941–1943
Murray
Von Neumann
1936–1940
Stone, 1932
Riesz, 1930
Von Neumann
1927, 1929
Heisenberg
Schrödinger
1925–1926
Born
Jordan
Dirac
1925–1926
Fischer
Riesz
1907–1910
Lebesgue
1910
Schmidt
1907–1908
Hilbert
1904–1906
Lebesgue
1901–1904
Fredholm
1900–1903
Stieltjes
1894
Von Koch
1891–1992
Frobenius
1878
Neumann
1877
Poincaré, 1885–1886
Appell, 1885
Sylvester
1852
Równania
całkowe
Hill, 1877
Jacobi
1827
Cauchy
1829–1830
Liouville
1837
Kotterisch
1870
Twierdzenie
o osiach głównych
Abel
1823
Nieskończone układy
równań liniowych
Lagrange
1759
Fourier
1822
Bernoulli
1732
Fermat
1679
Descartes
1637
Bezout
1779
Euler
1770
Cramer
1750
Geometria analityczna
Analiza
Algebra

Rys. 1

niczonych operatorów normalnych ma jednoczesną diagonalizację — to znaczy, istnieje jeden rozkład identyczności, który jednocześnie reprezentuje wszystkie operatory rodziny za pomocą całki $\int f(\lambda)dE_\lambda$ dla różnych funkcji f.

11. Wątki nie omówione. Na tym kończymy opowieść o twierdzeniu spektralnym. Nasze historyczne spojrzenie było celowo wąskie, zogniskowane przez cały czas na ewolucji jednego twierdzenia i tylko czasami rzucaliśmy światło na niektóre spośród wielu fascynujących zastosowań i uogólnień podstawowej teorii. Na przykład, teorię spektralną dla przestrzeni bez iloczynu skalarnego można odnaleźć już u Riesza [1918b] i T. H. Hildebrandta [1931], podczas gdy początki teorii spektralnej dla operatorów różniczkowych są zawarte w pracy [1908c] George'a D. Birkhoffa; W czasie próby matematycznego zanalizowania widma światła białego Norbert Wiener w [1928b] i [1930d] rozwinął teorię analizy spektralnej dla funkcji, a w dwadzieścia lat później Arne Beurling [1949b] rozpoczął uzupełniające badania syntezy spektralnej; i w [1942] Edgar R. Lorch, kontynuując pracę rozpoczętą w [1913a] przez F. Riesza, badał zbiory spektralne na płaszczyźnie za pomocą całek krzywoliniowych.

Gdybyśmy zatrzymywali się przy każdym takim odgałęzieniu, to nasze drzewo ewolucyjne (rys. 1) wyglądałoby jak las. Rzeczywiście, Nelson Dunford i Jacob Schwartz potrzebowali nieomal 3000 stron dla przeglądu teorii spektralnej ([1958a], [1963], [1971]). Tak więc każdego, kto ma ochotę obejrzeć owoce teorii spektralnej, zapraszamy do przeczytania tej monografii bądź jednego spośród wielu skromniejszych opracowań tej tematyki ([1951], [1953], [1958b], [1962]). W ten sposób zakończyliśmy nasz opis źródeł i głównego nurtu teorii spektralnej.

Bibliografia

[1637] Réné Descartes, *La Géomértie*, Appendix I do *Discours de la Méthode*, Leiden, 1637 (Oeuvres VI, s. 367–514).

[1679] Pierre de Fermat, *Ad locus planos et solidos isagoge*, Varia Opera Mathematica, 1679 (Oeuvres I, s. 91–110).

[1732] Daniel Bernoulli, *Theoremata de osicillationibus corporum filo flexili connaxorum et cateanae verticaliter suspensae*, Comm. Acad. Scient. Imper. Petropolitanae 6 (1732), s. 108–122.

[1748] Leonhard Euler, *Introductio in Analysis Infinitorum*, 1748 (Opera Omnia (1), IX, s. 379–392).

[1750] Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genewa 1750.

[1759] Joseph-Louis Lagrange, *Recherches sur la méthode de maximis et minimis*, Miscellanea Taurinensia 1 (1759), s. 18–42 (Oeuvres, I, s. 3–20).

[1765] Leonhard Euler, *Theoria Motus Corporum Solidorum Seu Rigidorum*, 1765 (Opera Omnia (2) III, s. 193–214).

[1770] Leonhard Euler, *Vollständige Ableitung zur Algebra*, St. Petersburg 1770.

[1779] Etienne Bézout, *Théorie générale des équations algébriques*, Paris 1779.

[1822] Joseph B. J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris 1822.

[1823] Niels Henrik Abel, *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies*, Magazin for Naturv. 1 (1823), s. 205–215 (Oeuvres I, s. 11–27).

[1826] Niels Henrik Abel, *Résolution d'un problème de mécanique*, J. Reine Angew. Math. 1 (1826), s. 153–157 (Oeuvres, I. s. 97–101).

[1827] Carl G. J. Jacobi, *Über die Hauptaxen der Flächen der Zweiten Ordnung*, J. Reine Angew. Math. 2 (1827), s. 227–233 (Werke III, s. 45–53).

[1829] Augustin-Louis Cauchy, *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes*, Exercices de Mathématiques, Paris 1829 (Oeuvres (2), IX, s. 174–195).

[1830] Augustin-Louis Cauchy, *Mémoire sur l'équation qui a pour racines les moments d'inertie principaux d'un corps solide et sur diverses équations du même genre*, Mém. Acad. Sci. Inst. France 9 (1830), s. 111–113 (Oeuvres (1), II, s. 79–81).

[1837] Joseph Liouville, *Sur le développement des fonctions* (second mémoire), J. Math. Pures Appl. 2 (1837), s. 16–35.

[1843] Arthur Cayley, *Chapters in the analytical geometry of n dimensions*, Camb. Math. J. 4 (1843), s. 119–127 (Math. Papers I, s. 55–62).

[1844] Hermann Grassmann, *Die Ausdehnungslehre*, Leipzig 1844.

[1852] James Joseph Sylvester, *A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by orthogonal substitution to the form of a sum of positive and negative squares*, Phil. Mag. 4 (1852), s. 138–142 (Math. Papers I, s. 378–381).

[1855] Charles Hermite, *Remarque sur un théorème de M. Cauchy*, C. R. Acad. Sci. Paris 41 (1855), s. 181–183.

[1858] Arthur Cayley, *A memoir on the theory of matrices*, Philos. Trans. Roy. Soc. London 148 (1858), s. 17–37 (Math. Papers II, s. 475–496).

[1870] Theodor Kötteritzsch, *Über die Auflösung eines Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen*, Z. Math. Physik 15 (1870), s. 1–15, 229–268.

[1877a] Carl Neumann, *Untersuchungen über des logarthmische und Newtonische Potential*, Teubner, Leipzig 1877.

[1877b] George William Hill, *On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon*, John Wilson, Cambridge, Mass., 1877.

[1878] Georg Frobenius, *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*, J. Reine Angew, Math. 84 (1878), s. 1–63 (Gesammelte Abhandlungen I, s. 343–405).

[1883] Jörgen Pederson Gram, *Über die Entwickelung realer Funktionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate*, J. Reine Angew. Math. 94 (1883), s. 41–73.

[1885a] Paul Appell, *Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en série trigonométrique des fonctions elliptiques*, Bull. Soc. Math. France 13 (1885), s. 13–18.

[1885b] Henri Poincaré, *Remarques sur l'emploi de la méthode précédente*, Bull. Soc. Math. France 13 (1885), s. 19–27 (Oeuvres V, s. 85–94).

[1886a] George William Hill, *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the sun and the moon*, Acta Math. 8 (1886), s. 1–36 (Coll. Math. Works I, s. 243–270).

[1886b] Henri Poincaré, *Sur les déterminants d'ordre infini*, Bull. Soc. Math. France 14 (1886), s. 77–90 (Oeuvres V, s. 95–107).

[1891] Helge von Koch, *Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations, différentielles linéaires*, Acta Math. 15 (1891), s. 53–63.

[1892] Helge von Koch, *Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires*, Acta Math. 16 (1892), s. 217–295.

[1894] Thomas-Jean Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues* Ann. Fac. Sci. Toulouse 8 (1894) J., s. 1–122 (Oeuvres II, s. 402–566).

[1900] Ivar Fredholm, *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet*, Ofver. Vet. Akad. Förhand. Stockholm 57 (1900), s. 39–46.

[1901] Henri Lebesgue, *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, C. R. Acad. Sci. Paris 132 (1901), s. 1025–1028.

[1902] Léon Anzonne, *Sur l'Hermitien*, Rend. Circ. Mat. Palermo 16 (1902), s. 104–128.

[1903a] Ivar Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionelles*, Acta Math. 27 (1903), s. 365–390.
[1903b] Jaques Hadamard, *Sur les opérations fonctionelles*, C. R. Acad. Sci. Paris 136 (1903), s. 351–354.
[1904a] David Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Erste Mitteilung, Göttingen Nachrichten (1904), s. 49–91.
[1904b] David Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Zweite Mitteilung, Göttingen Nachrichten (1904), s. 213–259.
[1904c] Henri Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier–Villars, Paris 1904.
[1905] David Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Dritte Mittleilung, Göttingen Nachrichten (1905), s. 307–338.
[1906a] David Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Vierte Mitteilung, Göttingen Nachrichten (1906), s. 157–227.
[1906b] David Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Fünfte Mitteilung, Göttingen Nachrichten (1906), s. 439–480.
[1907a] Erhard Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, I, Math. Ann. 63 (1907), s. 433–476.
[1907b] Erhard Schimdt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, II, Math. Ann. 64 (1907), s. 161–174.
[1907c] Friedrich Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctiohs*, C. R. Acad. Sci. Paris 144 (1907), s. 615–619.
[1907d] Friedrich Riesz, *Über orthogonale Funktionensysteme*, Göttingen Narchichten (1907), s. 116–122.
[1907e] Ernst Fischer, *Sur la convergence en moyenne*, C. R. Acad. Sci. Paris 144 (1907), s. 1022–1024.
[1908a] Erhard Schmidt, *Über die Auflösung lineare Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Rend. Circ. Mat. Palermo 25 (1908), s. 53–77.
[1908b] Eliakim Hastings Moore, *On a form of general analysis with application to linear differential and integral equations*, Cong. Int. d. Math. Rome 1908, s. 98–114.
[1908c] George D. Birkhoff, *Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations*, Trans. Amer. Soc. 9 (1908), s. 373–395 (Coll. Papers I, s. 14–36).
[1909a] Ernst Hellinger, *Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen*, J. Reine Angew. Math. 136 (1909), s. 210–271.
[1909b] Friedrich Riesz, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris 149 (1909), s. 974–977.
[1909c] Isaac Schur, *Über die charakterischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen*, Math. Ann. 66 (1909), s. 488–510.
[1909d] Hermann Weyl, *Über beschränkte quadratische Formen deren Differenz vollstetig ist*, Rend. Circ. Mat. Palermo 27 (1909), s. 373–392.
[1910a] David Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Sechste Mitteilungen, Göttingen Nachrichten (1910), s. 355–419.
[1910b] Ernst Hellinger and Otto Toeplitz, *Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen*, Math. Ann. 69 (1910), s. 289–330.
[1910c] Friedrich Riesz, *Untersuchungen über Systeme integriebarer Funktionen*, Math. Ann. 69 (1910), s. 449–497.
[1910d] Helge von Koch, *Sur les systèmes d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, C. R. Cong. d. Math. Stockholm 1910, s. 43–61.
[1910e] Ivar Fredholm, *Les équations intégrales linéaires*, C. R. Cong. d. Math. Stockholm 1910, s. 92–100.
[1910f] Henri Lebesgue, *Sur l'integrale de Stieltjes et sur les opérations linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris 150 (1910), s. 86–88.

[1912a] David Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Teubner, Leipzig 1912.

[1912b] Eliakim Hastings Moore, *On the foundations of the theorie of linear integral equations*, Bull. Amer. Math. Soc. 18 (1912), s. 334–362.

[1913a] Frédéric Riesz, *Les sytèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Gauthier Villars, Paris 1913.

[1913b] Johann Radon, *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*, Sitz. Akad. Wiss. Wien 122 (1913), s. 1295–1438.

[1918a] Otto Toeplitz, *Das algebraische Analogen zu einem Satze von Fejér*, Math. Zeit 2 (1918), s. 187–197.

[1918b] Friedrich Riesz, *Über lineare Funktionalgleichungen*, Acta Math. 41 (1918), s. 71–98.

[1923] Torsten Carleman, *Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique*, Uppsala Univ. Årsskrift 1923.

[1925a] Max Born and Pascual Jordan, *Zur Quantenmechanik*, Z. Physik 34 (1925), s. 858–888.

[1925b] Paul A. M. Dirac, *The fundamental equations of quantum mechanics*, Proc. Rov. Soc. London, Ser. A. 109 (1925), s. 642–658.

[1926a] Max Born, Werner Heisenberg and Pascual Jordan, *Zur Quantenmechanik*, II, Z. Physik 35 (1926), s. 557–615.

[1926b] Paul A. M. Dirac, *On the theory of quantum mechanics*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 112 (1926), s. 661–677.

[1926b] Paul A. M. Dirac, *On the theory of quantum mechanics*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 112 (1926), s. 661–677.

[1927] John von Neumann, *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, Göttingen Nachrichten (1927), s. 1–57 (Coll. Works I, s. 151–207).

[1928a] Ernst Hellinger and Otto Toeplitz, *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten*, Teubner, Leipzig 1928.

[1928b] Norbert Wiener, *The spectrum of an arbitrary function*, Proc. London Math. Soc. 27 (1928), s. 483–496.

[1929a] John von Neumann, *Allgemeine Eigenwertheorie Hermitescher Funktionaloperation*, Math. Ann. 102 (1929), s. 49–131 (Coll. Works II, s. 3–85).

[1929b] Aurel Wintner, *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen*, Hirzel, Leipzig 1929.

[1930a] John von Neumann, *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren*, Math. Ann. 102 (1930), s. 370–427 (Coll. Works II, s. 86–143).

[1930b] Paul M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford 1930.

[1930c] Friedrich Riesz, *Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes*, Acta Litt. Sci. (Szeged) 5 (1930), s. 23–54.

[1930d] Norbert Wiener, *Generalized harmonic anlysis*, Acta Math. 55 (1930), s. 117–258.

[1931] T. H. Hildebrandt, *Linear functional transformations in general spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), s. 185–212.

[1932a] Marshall H. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Space*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. XV, New York 1932.

[1932b] Stefan Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[1934] Kurt O. Friedrichs, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren*, Math. Ann. 109 (1934), s. 465–487, 685–713.

[1936a] Francis J. Murray and John von Neumann, *On rings of operators*, I, Ann. Math. 37 (1936), s. 116–229 (Von Neumann Coll. Works III, s. 6–119).

[1936b] S. W. P. Steen, *An introduction to the theory of operators*, I, Proc. London Math. Soc. 41 (1936), s. 361–392.

[1936c] Mitio Nagumo, *Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen*, Jap. J. Math. 13 (1936), s. 61–80.

[1937a] Francis J. Murray and John von Neumann, *On rings of operators*, II, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), s. 208–248 (Von Neumann Coll. Works III, s. 120–160).

[1937b] S. W. P. Steen, *An introduction to the theory of operators*, II, Proc. London Math. Soc. 43 (1937), s. 529–543.

[1938a] S. W. P. Steen, *An introduction to the theory of operators*, III, Proc. London Math. Soc. 44 (1938), s. 398–441.

[1938b] Stanisław Mazur, *Sur les anneaux linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris 207 (1938), s. 1025–1027.

[1939] S. W. P. Steen, *An introduction to the theory of operators*, IV, Proc. Camb. Phil. Soc. 35 (1939), s. 562–578.

[1940a] John von Neumann, *On rings of operators*, III, Ann. Math. 41 (1940), s. 94–161 (Coll. Works III, s. 161–228).

[1940b] S. W. P. Steen, *An introduction to the theory of operators*, V, Proc. Camb. Phil. Soc. 36 (1940), s. 139–149.

[1940c] Marshall H. Stone, *A general theory of spectra I*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 26 (1940), s. 280–283.

[1941a] Israił M. Gelfand, *Normierte Ringe*, Mat. Sbornik N. S. 9 (1941), s. 3–24.

[1941b] Israił M. Gelfand and Georgii E. Šilov, *Über verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der Maximalen Ideale eines normierten Ringes*, Mat. Sbornik N. S. 9. (1941), s. 25–38.

[1941c] Marshall H. Stone, *A general theory of spectra II*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 27 (1941), s. 83–87.

[1941d] Shizuo Kakutani, *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, Ann. Math. 42 (1941), s. 523–537.

[1942] Edgar R. Lorch, *The spectrum of linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), s. 238–248.

[1943] Israił M. Gelfand and Mark A. Naimark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*, Mat. Sbornik N. S. 12 (1943), s. 197–213.

[1944] Hermann Weyl, *David Hilbert and his mathematical work*, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), s. 612–654.

[1946] Charles E. Rickart, *Banach algebras with adjoint operation*, Ann. Math. 47 (1946), s. 528–550.

[1949a] John von Neumann, *On Rings of Operators. Reduction Theory*, Ann. Math. 50 (1949), s. 401–485 (Coll. Works III, s. 400–484).

[1949b] Arne Beurling, *On the spectral synthesis of bounded functions*, Acta Math. 81 (1949), s. 225–238.

[1951] Paul R. Halmos, *Introduction to Hilbert Space*, Chelsea, New York 1951.

[1953] Richard G. Cooke, *Linear Operators*, Macmillan, London 1953.

[1958a] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz, *Linear Operators I: General Theory*, Interscience, New York 1958.

[1958b] Paul R. Halmos, *Finite Dimensional Vector Spaces*, Second Edition, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1958.

[1962] Edgar R. Lorch, *Spectral Theory*, Oxford U. P., New York 1962.

[1963] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz, *Linear Operators II: Spectral Theory*, Interscience, New York 1963.

[1966] Michael Bernkopf, *The Development of Function Spaces with Particular Reference to their Origins in the Integral Equation Theory*, Arch. Hist. Exact. Sci. 3 (1966), s. 1–96.

[1968] Michael Bernkopf, *A History of Infinite Matrices*, Arch. Hist. Exact Sci. 4 (1968), s. 308–354.

[1970] Constance Reid, *Hilbert*, Springer–Verlag, Berlin 1970.

[1971] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz, *Linear Operators III: Spectral Operators*, Wiley, New York 1971.