ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIX (1976)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ZOFIA KRYGOWSKA (Kraków)

Współczesne tendencje w nauczaniu geometrii*

1. Dyskusja na temat roli i miejsca geometrii w nauczaniu matematyki osiągnęła już taki etap, że nasuwa się potrzeba dokonania jakiejś choćby wstępnej analizy porównawczej różnych tendencji w tym zakresie. Artykuł mój poświęcam próbie takiej analizy. Chodzi raczej o syntetyczne zarysowanie najważniejszych tendencji, a nie o szczegółowe referowanie programów nauczania.

2. Elementarna geometria Euklidesowa a matematyka współczesna

Na pytanie, jakie jest miejsce geometrii w matematyce współczesnej, H. Freudenthal odpowiada: „W systemie matematyki opartym na koncepcji Bourbaki geometrii nie ma. W czasopismach poświęconych informacji naukowej to, co się nazywa geometrią, zajmuje zaledwie $5^0/_0$ objętości. W programach uniwersyteckich geometria jest zaledwie wspomniana, a uczeni, którzy mogliby się nazwać geometrami, nie czynią tego, gdyż to słowo brzmi staromodnie" ([16], s. 20).

Bourbaki przedstawia jasno przyczyny tej formalnej nieobecności geometrii klasycznej w całym systemie współczesnej matematyki, stwierdzając, że chociaż ta geometria odegrała bardzo ważną rolę w rozwoju matematyki, to jednakże dzisiaj „dla zawodowego matematyka ta kopalnia została już wyczerpana, ponieważ nie istnieją w niej nowe problemy dotyczące struktur, które mogłyby znaleźć swe odbicie w innych działach matematyki" ([7], s. 142). Oczywiście nadal prowadzi się badania dotyczące podstaw geometrii i wiele jest różnych zagadnień geometrii klasycznej, które nie zostały jeszcze rozwiązane, i którymi, jak pisze Bourbaki, zajmują się „z zadowoleniem liczni amatorzy (geometria trójkąta, czworościanu, krzywych i powierzchni algebraicznych niskiego stopnia itp.)" ([7], s. 142), ale to wszystko nie mieści się w głównym nurcie rozwoju współczesnej matematyki.

---

* Jest to polska wersja artykułu opublikowanego (w języku francuskim i angielskim) w tomie III wydawnictwa UNESCO *Nouvelles tendences de l'enseignement de la mathématique*, Paryż 1972, s. 25-39; polska wersja różni się w szczegółach od oryginalnej (*przyp. red.*).

3. Język i intuicja geometryczna

Historyczne znaczenie geometrii klasycznej wyraża się w fakcie, że była ona jednym ze źródeł wielkich struktur algebraicznych i topologicznych, które dzisiaj uważane są za podstawowe dla całej matematyki; geometria klasyczna, choć przestała być nauką autonomiczną i żywą, przekształciła się w ten sposób w powszechny język współczesnej matematyki o bardzo wielkiej giętkości i użyteczności ([7], s. 145).

Racje tej wszechobecności języka geometrycznego w matematyce dzisiejszej nie sprowadzają się, według H. Freudenthala, tylko do tradycji historycznej, gdyż „słowa odpowiadają pojęciom. Geometryczna terminologia współczesnej algebry i analizy wskazuje na przesiąknięcie całej matematyki intuicją geometryczną". „Dlaczego jednak intuicja geometryczna, chociaż się często mówi, że jest ona już martwa, nadal pozostaje jeszcze żywotna, nawet w tych dziedzinach, które pozornie nie mają nic wspólnego z geometrią? Oczywiście dlatego, że intuicja geometryczna może nam wskazywać to, co jest ważne, interesujące i dostępne, ubezpieczając nas przed błądzeniem w ogromnej przestrzeni problemów, idei i metod" ([16], s. 209).

Trzeba jednak podkreślić, że w tym znaczeniu intuicja geometryczna nie sprowadza się do geometrycznej wizji przestrzeni fizycznej. Wzajemne oddziaływanie formalizmu i naiwnych pierwszych intuicji, których źródłem jest ta wizja, prowadzi do intuicji bardziej subtelnych nazywanych przez Bouliganda „intuicjami przedłużonymi", a przez Kleina „intuicjami wyrafinowanymi". Uderzający przykład podał P. S. Aleksandrow, który zilustrował tę grę formalizmu i intuicji geometrycznej w badaniach prowadzonych w dziedzinie topologii ogólnej i teorii zbiorów w pierwszej połowie naszego wieku. Te badania uwypukliły — jak pisze Aleksandrow — coś zupełnie nowego: zobaczono twory geometryczne różne od tych, które poznano w klasycznych rozdziałach geometrii, ale dostępne wyobraźni geometrycznej. Z drugiej strony, ujęto strukturę geometryczną pewnych najogólniejszych funkcji mierzalnych. P. A. Aleksandrow podkreśla charakter szczególnie konkretny, intuicyjny tych prac, które nie przyniosły abstrakcji i schematyzmu, lecz bezpośrednie „widzenie" bardzo ogólnych i istotnie ważnych konstrukcji matematycznych. W ten sposób okazało się, że granice pomiędzy tym, co w matematyce uważa się za intuicyjne, mogą być posunięte bardzo daleko. Na przykład „topologia kontinuów rozszerzyła i wzbogaciła naszą intuicję geometryczną" ([1], s. 176). Takie pojęcia, jak retrakt, homotopia, grupa podstawowa itp., mimo ich współczesnych aspektów algebraicznych, powstały i rozwijały się na podstawie intuicji geometrycznych.

Ujawnienie tego stałego wzajemnego oddziaływania formalizacji i intuicyjnych motywacji geometrycznych — rozumianych tak szeroko — może wyeliminować nieporozumienia dotyczące samego charakteru tych intuicji. Można powiedzieć, że tam, gdzie do pracy matematyka włączają się obrazy, schematy przypominające struktury przestrzenne, można mówić o intuicji geometrycznej. Obrazy towarzyszące twórczości matematycznej mogą być, jak to mówi A. Revuz, bliższe obrazom

Picassa niż rysunkom wykonywanym za pomocą mechanicznych narzędzi. „Te obrazy odgrywają raczej rolę wskaźników możliwości działania niż przypomnienia rzeczy konkretnych, a geometria nie jest ich jedynym źródłem" ([29], s. 52). Nie można jednak zaprzeczyć istnieniu tego źródła przedłużania i wysubtelniania intuicji matematycznych.

Oświetlenie drogi, która prowadzi ucznia od konkretnej aktywności w przestrzeni poprzez pierwsze schematy, rysunki i modele na wyższy poziom intuicji geometrycznej, jest ważnym zagadnieniem pedagogicznym. Taka droga istnieje i jednym z zadań nauczania geometrii jest przedłużenie i wysubtelnienie pierwotnej intuicji przestrzennej uczniów w taki sposób, by stała się ona pożytecznym narzędziem ich matematycznego myślenia.

4. Czym jest elementarna geometria euklidesowa?

Według współczesnej definicji strukturalnej elementarna geometria euklidesowa jest teorią przestrzeni afinicznej związanej z liniową przestrzenią skończenie wymiarową nad ciałem liczb rzeczywistych, w której wyróżniono formę dwuliniową, symetryczną, dodatnio określoną. Jako podstawę nauczania można jednak użyć i faktycznie się używa innych aksjomatycznych modeli elementarnej geometrii euklidesowej: szczególna przestrzeń metryczna w znaczeniu topologicznym, teoria oparta na afinicznych aksjomatach w dalszym ciągu uzupełnionych aksjomatami metrycznymi, określającymi na przykład grupę podobieństw, teoria przestrzeni scharakteryzowanej przez grupy jej automorfizmów zdefiniowanych aksjomatycznie, przestrzeń kartezjańską, itd, ([2], [3], [4], [5], [11], [12], [26], [32]).

Wszystkie te ujęcia geometrii istotnie różnią się od ujęcia klasycznego, gdyż umieszczają geometrię elementarną w świecie podstawowych struktur współczesnej matematyki i traktują geometrię jako teorię przestrzeni o pewnej podstawowej, aksjomatycznie zdefiniowanej strukturze. Wiele nieporozumień wynika — jak powiedział P. Kelly w czasie konferencji w Carbondale — z „mylnego rozumienia geometrii opartego na identyfikacji geometrii z klasycznym programem nauczanym tradycyjnie w szkole. Geometria nowoczesna może i powinna — według P. Kelly — wprowadzić myśl uczniów w bardzo szeroki zakres nowych pojęć, rozwijać ich wyobraźnię, otwierać przed nimi nowe matematyczne perspektywy. W tym znaczeniu topologia i przekształcenia mogą odnowić geometrię w nauczaniu w tym samy stopniu, co algebra" ([21], s. 480).

Nowoczesne nauczanie matematyki nie eliminuje przeto geometrii elementarnej; przeciwnie, ta geometria może być bogatsza dzięki nowemu spojrzeniu. Znane hasło „precz z Euklidesem" dotyczy tylko przestarzałego ujęcia geometrii euklidesowej.

Te możliwości scharakteryzowano w zaleceniach poprzednio wspomnianej konferencji w Carbondale, jak następuje:

„(1) Geometria rozwinęła się jako ważny środek rozumienia i pojęciowego organizowania zjawisk przestrzennych. Znajduje ona szerokie i różne zastosowania w życiu codziennym, zarówno w formie wysoko zmatematyzowanej, jak i w innych

formach. Pojęcia geometryczne w ich aspektach estetycznych przeniknęły także do innych gałęzi matematyki i wzbogaciły je. Bogactwo geometrii wynikające z ogromnej różnorodności jej pojęć i problemów powinno być należycie wykorzystane dla przygotowania ucznia do innych gałęzi matematyki, które się rozwinęły, czy też jako potężne narzędzia badania przestrzeni (algebra liniowa, teoria grup itd.), czy jako odpowiedzi na pytania, które mogły być wyrażane w prosty sposób w języku geometrycznym, a które nie mogły być rozwiązane — przynajmniej w prosty sposób — w zakresie samej geometrii (topologia, teoria miary itd.).

(2) Geometria powinna odegrać rolę we wprowadzeniu idei i konstrukcji modeli pojęciowych. Ponadto nauczanie geometrii powinno uwzględniać oczywiste fakty psychologii rozwojowej; można to nauczanie zaczynać bardzo wcześnie z użyciem konkretnego materiału w konkretnych sytuacjach; struktur dedukcyjnych nie należy narzucać autorytatywnie z punktu widzenia z góry ustalonego systemu, powinny być one natomiast dostosowane do tego, jakie są możliwości dzieci abstrahowania tych struktur przez analizę odpowiednich sytuacji. To zależy zaś zarówno od dojrzałości i zdolności uczniów, jak też od miejsca przydzielonego geometrii w nauczaniu i od stopnia, w jakim ona jest organizowana dedukcyjnie i aksjomatycznie. Grupy, jako istotny element organizacji i klasyfikacji, powinny być szeroko stosowane. Jeżeli chodzi o zagadnienie, jakie działy geometrii powinny być przedmiotem nauczania, to trzeba się wyzwolić od tradycyjnej wizji geometrii i uwzględniać szeroko tematy i aspekty, które poprzednio nie były traktowane z należytą uwagą, np. struktura incydencji, wypukłość, przekształcenia, metryka, pojęcia topologiczne, porządek, orientacja itd.

(3) Geometrii nie należy traktować jako wyłącznej podstawy do nauczania logiki — prowadziłoby to do zdeformowanego obrazu obu tych przedmiotów. Rozwój poprawnego myślenia matematycznego powinien być celem każdej aktywności ucznia — zarówno wtedy, gdy wysnuwa on wnioski na drodze nieformalnej, jak i wtedy, gdy rozumuje formalnie. Stopień ścisłości w nauczaniu matematyki może się zmieniać w zależności od okoliczności, ale nie może to być nigdy usprawiedliwieniem dla przekazywania uczniom informacji błędnej czy niejasnej" ([34], s. 286).

5. Sytuacja, model, teoria

Na pytanie: „Czy ma dziś sens uznawać, że istnieje dział matematyki, względnie niezależny, który się nazywa geometrią?" A. Revuz odpowiada: „Jako matematyk dam z pewnością odpowiedź — nie, ale na pytanie, czy powinno się uczyć geometrii? — odpowiem: tak" ([29], s. 18).

Wyjaśniając tę pozorną sprzeczność, A. Revuz wyodrębnia trzy różne pojęcia: sytuacja, model, teoria.

Sytuacja jest wyizolowanym w toku badania fragmentem rzeczywistości, model jest schematem sytuacji wyrażonym w języku matematycznym, badanie struktury modelu prowadzi do konstrukcji abstrakcyjnej teorii matematycznej.

Ta sama sytuacja może się odbijać w różnych modelach i w różnych teoriach, ta sama teoria i ten sam model mogą być wyabstrahowane z różnych sytuacji.

Mówiąc o geometrii, trzeba dokładnie sprecyzować, co się ma na myśli — czy sytuację postrzeganą w przestrzeni, czy model tej sytuacji, czy też teorię.

Wiele ważnych teorii matematycznych wyabstrahowano z modeli geometrycznych: algebra liniowa, przestrzenie Hilberta, topologia, teoria miary, teoria grup, teoria krat, geometria różniczkowa, geometria algebraiczna. Każda z tych teorii ma swoje aspekty geometryczne, ale żadna nie wyczerpuje się w tych aspektach. Dlatego przymiotnik „geometryczny" powinien być — według A. Revuza — stosowany raczej do sytuacji i modeli niż do teorii [29].

Racjonalne używanie pojęć: sytuacja, model, teoria, w toku badań w zakresie dydaktyki matematyki w ogólności, a geometrii w szczególności, pozwoliłoby może uniknąć wielu nieporozumień i dyskusji ożywionych, ale jałowych. Geometria może być i jest w rzeczywistości przedmiotem nauczania zarówno na poziomie modelu, jak i na poziomie teorii.

Pomieszanie tych dwóch koncepcji, które zresztą mogą być zrealizowane w nauczaniu jako etapy po sobie następujące czy przeplatające się, prowadzi do szkodliwych nieporozumień.

6. Cele nauczania geometrii

Nowoczesne nauczanie powinno włączyć głęboko geometrię w strukturę całej matematyki elementarnej. Z tego powodu ogólne cele nauczania matematyki są także celami nauczania geometrii.

W ramach teorii twory omawiane w geometrii nie różnią się zasadniczo swą strukturą matematyczną od innych obiektów matematyki elementarnej: to są także zbiory, przekształcenia, grupy, relacje porządkujące, równoważności itd. Z punktu widzenia formalnego rozumowanie w geometrii elementranej nie różni się od rozumowania matematycznego w ogóle, stosuje się i tu, i tam tę samą logikę.

Nie można jednak pominąć milczeniem pewnych cech szczególnych i pewnych czynników psychologicznych charakterystycznych dla podejścia geometrycznego, prowadzącego do struktur matematycznych. Te cechy szczególne wychodzą na jaw przy omawianiu specyficznych celów nauczania geometrii.

6.1. Naiwna matematyzacja przestrzeni fizycznej i bezpośrednie jej zastosowania. Elementarna geometria euklidesowa rozwinęła się w trakcie konkretnej i pojęciowej organizacji przestrzeni fizycznej. Ta lokalna organizacja ma jeszcze ciągle znaczenie w codziennej aktywności człowieka. Uczeń spotyka na każdym kroku konkretne przedmioty, konkretne stosunki, konkretne przekształcenia, które mogą być przedstawione schematycznie jako przedmioty, stosunki czy przekształcenia geometryczne. Uczeń na każdym kroku ma okazję do interpretacji rzeczywistości w schematach geometrycznych.

Inne nauki, jak fizyka, geografia, elementy techniki (włączone do kształcenia ogólnego w pewnych krajach) wymagają prostych i bezpośrednich zastosowań

wiedzy geometrycznej. Programy matematyki w niektórych krajach (np. częściowo w Polsce, Czechosłowacji) obejmują dział zwany „geometrią wykreślną", który nie jest nauką rysunku technicznego, ale przeciwnie, jest prawdziwym, bezpośrednim i konkretnym zastosowaniem pojęć i twierdzeń geometrycznych, w szczególności zastosowaniem grup przekształceń i ich niezmienników. Jednym z celów nauczania geometrii — niezależnie od jej koncepcji matematycznej — pozostaje zawsze dobre przygotowanie uczniów do tych zastosowań. Między stanowiskiem, które lekceważy te zadania, a tym, które chce zredukować nauczanie geometrii tylko do podstawowych zastosowań, mamy również tendencje pośrednie. Geometria powinna być stosowana różnie na różnych poziomach. Nie można tu pominąć milczeniem zarówno potrzeb architekta, jak i skromnego rzemieślnika. Problem nie sprowadza się zresztą do zastosowań zwanych „praktycznymi". Wykorzystanie konkretnych sytuacji przestrzennych kinematycznych czy mechanicznych i badanie problemów, które powstają w takich sytuacjach, prowadzi przez schematyzację do matematyzacji, do lokalnych dedukcji i do prawdziwej aktywności matematycznej uczniów.

Oczywiście przestrzeń fizyczna nie może i nie powinna być jedynym źródłem procesu matematyzacji rzeczywistości i aktywności matematycznej uczniów, ale znaczenia tego źródła nie wolno lekceważyć. Ten punkt widzenia przeciwstawia się ostro innemu, według którego geometria nie ma nic wspólnego z przestrzenią fizyczną [17].

6.2. Wprowadzenie podstawowych struktur matematyki współczesnej. Wysubtelnienie intuicji geometrycznych. Jednym z najważniejszych celów nauczania geometrii powinno być — według opinii większości matematyków-pedagogów — pierwsze zapoznanie uczniów z ogólnymi strukturami algebraicznymi i topologicznymi.

Historia matematyki ujawnia w sposób uderzający rolę geometrii elementarnej w uświadamianiu sobie tych struktur i w rozwoju ich teorii. Między innymi chodzi o strukturę przestrzeni liniowej i wektorowej oraz przestrzeni metrycznej i topologicznej, które są podstawą analizy rozwijającej się — jak mówimy — na skrzyżowaniu tych podstawowych struktur.

Tradycyjne nauczanie geometrii zatrzymało się na początku tego rozwoju i nie uwzględniało nowoczesnych struktur znajdujących się u podstaw geometrii. „Wspaniała izolacja" tej geometrii uniemożliwiała wykorzystanie tego potencjału. Było to oczywiście błędem i mogło doprowadzić tylko do całkowitego upadku tradycyjnej geometrii.

Dzisiejsze tendencje i ich szkolne realizacje są ukierunkowane bezpośrednio na te możliwości, ujawnione w rozwoju historycznym. Nie chodzi tu oczywiście o to, by w nauczaniu powtarzać drogę historyczną, ale o świadomość, że można wprowadzić pewne ważne struktury algebraiczne i topologiczne w sposób naturalny w ramach geometrii. Zdajemy sobie sprawę z tego, że nauczanie geometrii rozu-

miane w tej perspektywie może rozwinąć u ucznia z jednej strony intuicje bardziej subtelne i z drugiej — myślenie bardziej formalne. Takie przygotowanie do nauki analizy uznaje się dziś za szczególnie ważne zadanie nauczania geometrii.

Niemniej nie można pominąć milczeniem dyskusji na temat tego, czy geometria powinna być źródłem, czy też dziedziną zastosowania nauki o przestrzeni liniowej i wektorowej. J. Frenkel stwierdza wyraźnie: „pytanie dotyczy tego, czy geometria powinna być punktem wyjścia do wprowadzenia algebry liniowej, czy odwrotnie: algebra liniowa ma być punktem wyjścia do geometrii. To pytanie byłoby drugorzędne, gdyby chodziło tylko jedynie o kształcenie przyszłych matematyków (lub szczególnie zaawansowanych geometrów). Ale to pytanie nasuwa też problemy pedagogiczne, których bez eksperymentowania nie można rozstrzygnąć tylko na podstawie uprzedzeń opartych w istocie rzeczy na własnych doświadczeniach z dziecinnych lat" ([15], s. 225).

Większość projektów, programów, podręczników wykorzystuje drogę geometryczną, ale zarysowują się już tendencje przeciwne. W artykule *Wprowadzenie do przestrzeni wektorowej* M. Glaymann proponuje następujący plan dla uczniów od 12 do 14 lat:

(1) grupy skończone i grupy operujące na zbiorach, grupa nieskończona $(Z, +)$,

(2) kongruencja modulo n, przykłady pierścieni i ciał skończonych, pierścienie i ciała nieskończone $(Z, +, \cdot)$ i $(Q, +, \cdot)$,

(3) przykłady modułów nad pierścieniami skończonymi, przykłady przestrzeni wektorowych nad ciałami skończonymi,

(4) pojęcie przekształcenia liniowego, grupy takich przekształceń.

Po przedstawieniu przykładów sytuacji pedagogicznych prowadzących do pojęcia skończonej przestrzeni wektorowej M. Glaymann stwierdza: „Jeżeli zdecydujemy się na ten kierunek, to naszym zadaniem będzie konstruowanie innych przykładów przestrzeni wektorowych dostępnych dla młodszych uczniów. Gdy zapoznamy ich z tymi różnymi przykładami, będzie można wprowadzić pojęcie przestrzeni wektorowej aksjomatycznie, co pozwoli na zbudowanie bez trudności solidnej teorii geometrycznej" ([19], s. 154).

Koncepcja ta nie została jeszcze wypróbowana w realizacji szkolnej. W odpowiedzi na pytanie postawione przez J. Frenkla można stwierdzić, że dziś jeszcze geometria w nauczaniu jest i źródłem, i dziedziną zastosowania algebry liniowej.

Te same perspektywy otwierają się przed wykorzystaniem nauki geometrii do wprowadzenia elementarnych struktur topologicznych. W swej wypowiedzi na konferencji w Carbondale P. Hilton stwierdził: „gdy sobie przypominam godziny spędzone w szkole nad dowodzeniem nieściśle rozumianych twierdzeń geometrycznych czy nad dowodzeniem sztucznych tożsamości trygonometrycznych, to zawsze żałuję, że wcześniej nie napotkałem pojęć geometrycznych związanych z topologią" ([20], s. 441). To „spotkanie z topologią" w ramach geometrii jest dziś faktycznie traktowane przez pewnych matematyków i pedagogów jako istotny

cel nauczania geometrii; jest to bowiem droga prowadząca do wysubtelnienia intuicji geometrycznych, tak bardzo ważnych np. w nauczaniu analizy. Tę ideę przedstawił też P. Kelly w referacie w Carbondale [21]. „Topologizacja" geometrii staje się dziś — według niektórych dydaktyków — tak samo ważna, jak jej „algebraizacja". Pewne doświadczenia i pewne bardzo jeszcze skromne przykłady wprowadzenia elementarnych pojęć topologicznych do zwykłego języka geometrii to tylko pierwsze próby w tym zakresie.

6.3. Wprowadzenie w formalne problemy rozumowania matematycznego. Zalecenia z Carbondale podkreślają, że geometria nie powinna być jedyną podstawą do nauczania logiki. Te zastrzeżenia odbijają oczywiście reakcję sprowokowaną przez tradycyjne nauczanie matematyki, w którym geometrię zwaną syntetyczną traktowano jako jedyny model metody dedukcyjnej i ścisłości logicznej. Geometria utraciła dziś tę uprzywilejowaną pozycję, wiemy zresztą, że w klasycznym jej ujęciu nie była dostosowana do tej roli. Utraciwszy jednak wyjątkową pozycję, zostaje ona, jak cała matematyka szkolna, dziedziną aktywnego zapoznawania ucznia z istotnymi elementami metody matematycznej i dziedziną praktycznego wprowadzenia uczniów w elementy logiki matematycznej. Takie wprowadzenie uczniów w metodę matematyczną i w elementy logiki matematycznej jest podstawowym założeniem wszystkich koncepcji nauczania geometrii, niezależnie od tego, czy przeciwstawiając się globalnej aksjomatyzacji geometrii wysuwają na plan pierwszy znaczenie dedukcji lokalnych, czy też chcą właśnie wprowadzić ucznia w świat geometrii przez aksjomatykę.

Nieporozumienia i niepowodzenia związane z próbami zapoznawania uczniów szkoły średniej z formalnymi aspektami matematyki w ramach geometrii tradycyjnej wynikały z jej skomplikowanej, ale niekompletnej pseudoaksjomatyki oraz z błędnego podejścia dydaktycznego.

Fakt, że geometria elementarna jest teorią związaną ściśle z prostymi intuicjami przestrzennymi i doświadczeniem, może spowodować nieporozumienia metodologiczne; z drugiej strony jednak właśnie ten jej graniczny charakter sprzyja głębszemu zrozumieniu dedukcji, gdyż w tych warunkach poprawna dedukcja wymaga dużej dyscypliny myśli. Uczeń zaczyna rozumieć np. formalny sens definicji i uczy się poprawnie posługiwać definicjami, gdy intuicyjne ujęcie definiowanego przedmiotu przekracza własności wymienione w definicji. Zaczyna on pojmować istotę dowodu wtedy, gdy musi świadomie przeciwstawić obraz poglądowy, pewność intuicyjną, oczywistość — rozumowaniu. Jeżeli nauka o strukturach algebraicznych nie może być zastąpiona przez naukę geometrii, to i na odwrót, analiza sytuacji geometrycznych nie może być sprowadzona do algebry; algebra jest bowiem, być może, zbyt czysta metodologicznie i dlatego nie hartuje myślenia przeciw możliwym nieporozumieniom metodologicznym. Dzięki temu szczególnemu związkowi między intuicją a ujęciem formalnym, który jest charakterystyczny dla geometrii, zachowuje ona swą ważną pozycję w kształceniu myślenia dedukcyjnego i zrozumieniu aksjomatycznej metody [25].

7. Koncepcje nauczania geometrii elementarnej w świetle projektów wypracowanych na użytek szkoły, programów i podręczników

Chociaż na ogół uznaje się zgodnie te cele nauczania geometrii, które poprzednio naszkicowaliśmy, różnice w ich interpretacji oraz w ocenie ich względnego znaczenia są duże. Postulat wykorzystania drogi geometrycznej dla wprowadzenia podstawowych struktur matematyki nie wywołuje dyskusji. Nie kwestionuje się też najczęściej roli geometrii w konstrukcji pojęć przestrzeni afinicznej i wektorowej.

Różne projekty, doświadczenia, programy, podręczniki odzwierciedlają jednak większe zróżnicowanie stanowisk, jeżeli chodzi o inne cele nauczania geometrii. Zilustrujemy je dalej, podając typowe przykłady. Ograniczymy się do aktualnego stanu nauczania geometrii w szkole średniej, tzn. do nauczania uczniów w wieku od 12 do 17 lub 18 lat (1). Reformy nauczania matematyki w klasach początkowych (wiek od 6 lub 7 do 11 lat) oczywiście zmienią nauczanie geometrii w klasach wyższych, ale dziś trudno byłoby przewidzieć wszystkie ich konsekwencje.

7.1. Problem aksjomatycznej organizacji geometrii. Koncepcje pedagogiczne i metodologiczne nauczania geometrii na poziomie średnim różnią się w tym zakresie i można tu wymienić co najmniej trzy pozycje wyjściowe:

1. Wyeliminowanie *a priori* aksjomatycznie ujętej geometrii, niezależnie od poziomu nauczania.

2. Organizacja aksjomatyczna geometrii począwszy od niższego cyklu szkoły średniej (wiek 12–14 lat).

3. Konstrukcja geometrii w dwóch etapach:

a) organizacja doświadczeń i intuicji przestrzennych uczniów w cyklu niższym oparta na dedukcji lokalnej i aksjomatyzacji lokalnej,

b) globalna organizacja aksjomatyczna wiedzy geometrycznej zdobytej w cyklu niższym oparta na aksjomatyzacji tej wiedzy, rozwój i pogłębienie teorii na poziomie wyższym już w ujęciu aksjomatycznym (od 15 lat).

Pierwszą koncepcję motywuje się przede wszystkim względami pedagogicznymi. Lokalna organizacja geometrii wolna od wymogów formalnych, nieskrępowana ramami systemu *a priori* sprzyja rozwojowi aktywności ucznia typu geometrycznego, bardzo zróżnicowanej. Pozwala ona uwzględnić w nauczaniu geometrii bogate treści, ułatwia integrację geometrii płaszczyzny z geometrią przestrzeni trójwymiarowej itd.

Lokalna organizacja nauczania geometrii stwarza sytuacje szczególnie sprzyjające matematyzacji dokonywanej przez samych uczniów; umożliwia to stopniowe wdrażanie ich do poprawnego rozumowania, początkowo bliższego naturalnemu rozumowaniu niż dedukcji w zamkniętym systemie formalnym.

Aksjomatyczna organizacja geometrii począwszy od cyklu niższego jest z drugiej strony silnie broniona w sposób następujący:

---

(1) „Średniej" w sensie przyjętym w terminologii międzynarodowej.

1. Aksjomatycznej metody używa się szeroko nie tylko w samej matematyce, ale też w jej zastosowaniach. Dziś jest to nie tylko metoda organizująca *a posteriori* dyscypliny już rozwinięte, ale przeciwnie, jedna z najważniejszych metod matematycznej aktywności, która abstrahuje, definiuje i bada struktury w samej matematyce i w dziedzinach jej zastosowań [24].

Problemu wprowadzenia ucznia w tę metodę nie można więc dziś wyeliminować z zagadnień dydaktyki matematyki. Przeciwnie, to wprowadzenie powinno być organizowane możliwie wcześnie i w sposób od początku poprawny [31].

2. Jasność sytuacji metodologicznej w systemie dedukcyjnym sprzyja wdrażaniu ucznia do poprawnego rozumowania, rozwojowi ścisłości myślenia, broni to myślenie przed błądzeniem w ogromnej przestrzeni wszystkich możliwości i wszystkich środków, ułatwia dokładne odróżnianie rzeczywistej sytuacji i jej modelu od matematycznej teorii, eliminuje możliwość niebezpiecznych nieporozumień [31].

3. Pewne doświadczenia dowodzą, że droga aksjomatyczna prowadząca do geometrii jest dostępna dla uczniów w wieku 12–13 lat pod warunkiem, że będzie to zorganizowane za pomocą starannie dobranych środków pedagogicznych; w szczególności jeżeli aksjomatyka nie jest narzucana uczniom w sposób arbitralny, ale wypracowuje się ją zespołowo pod dyskretnym kierunkiem nauczyciela, to uczeń dochodzi do geometrii zorganizowanej dedukcyjnie, przechodząc przez etap aksjomatyzacji, i chociaż ta aksjomatyzacja jest ukierunkowana *a priori* przez nauczyciela, to odbywa się ona przy bardzo aktywnym udziale uczniów.

4. Nauczanie geometrii zorganizowanej dedukcyjnie od początku jest łatwiejsze dla przeciętnego nauczyciela, powoduje mniej błędów matematycznych i pedagogicznych niż nauczanie oparte na spontanicznej aktywności uczniów czy na programie złożonym z niezależnych fragmentów nie powiązanych jakąś podstawową strukturą.

Przeciw tym stwierdzeniom nie mniej często protestują nawet ci matematycy, którzy postulują wprowadzenie metody aksjomatycznej w wyższych klasach szkoły średniej.

H. Freudenthal, w swojej krytyce różnych aksjomatyk geometrii wypracowanych na użytek nauczania jako konkurujących z aksjomatyką przestrzeni wektorowej, podkreśla konieczność stopniowego przygotowywania młodych umysłów do globalnej aksjomatyzacji i studiowania teorii aksjomatycznej w ogóle oraz aksjomatycznej geometrii w szczególności.

„Krytykuję nie tyle złożoność takiego systemu aksjomatycznego" — mówi H. Freudenthal, — „ale sposób jego przekazania uczniom. Istotna aktywność związana z takim systemem jest zarezerwowana dla jego autora: najpierw globalne organizowanie materiału geometrycznego przeznaczonego do aksjomatyzacji, potem zerwanie związku systemu aksjomatów uzyskanego w ten sposób z materiałem wyjściowym, następnie odnowienie tych związków w toku rozwijania teorii konieczne ze względu na jego złożoność. Aksjomatyka geometrii — jako przedmiotu nauczania — jest pozbawiona sensu, jeżeli uczniowi nie wolno samodzielnie wy-

konać tych czynności. Zwykle się mu na to nie pozwala. Albo więc autor systemu uważa, że aksjomatyzacja jest sprawą zarezerwowaną dla dojrzałych, a nie dla początkujących matematyków, albo wie z własnego doświadczenia, że byłoby to za trudne dla ucznia. I rzeczywiście uczeń, który nigdy nie próbował organizować tak materiału nauczania lokalnie, nie potrafi tego zrobić od razu globalnie".

„Prefabrykowane systemy aksjomatyczne mają swoje zalety, gdy stanowią przedmiot badania dostępny dla tych, którzy mają już pewne doświadczenia w aksjomatyzacji. Jeżeli uczeń spotkał się z procesem aksjomatyzacji na przykładzie łatwiejszego materiału, to odnajdzie on w złożonym systemie aksjomatycznym to, z czym zapoznał się w toku poprzednich doświadczeń, i będzie zdolny do interpretacji i do zrozumienia tego systemu, jakby go sam zbudował. Ale jeżeli nigdy nie próbował on aksjomatyzować, to taki system aksjomatyczny geometrii będzie dla niego jeszcze jednym fragmentem matematyki niemożliwym do strawienia" ([17], s. 426–427).

Koncepcja nauczania geometrii organizowanego w dwóch następujących po sobie cyklach odbija tendencję do zharmonizowania dwóch pozostałych skrajnych koncepcji w celu uniknięcia sytuacji przedstawionych przez H. Freudenthala. Problemu nie można będzie zresztą rozstrzygnąć bez pogłębionego badania porównawczego, bez analizy trudności i reakcji uczniów, bez oceny rezultatów. Aktualnie wszystkie trzy koncepcje nauczania geometrii znajdują swoje realizacje w szkołach różnych krajów.

7.2. Problem priorytetu: struktura afiniczna czy struktura metryczna jako baza nauczania geometrii. Nauczanie geometrii organizowane lokalnie jest na ogół oparte na różnych strukturach wprowadzanych równolegle. Trzecia tendencja, wspomniana poprzednio, jest z tego punktu widzenia jasna; w cyklu niższym trzeba raczej rozwijać geometrię różnymi drogami, ale takimi, które doprowadzą stopniowo do przestrzeni wektorowej określonej aksjomatycznie na początku cyklu wyższego w szkole średniej. Argumenty uzasadniające wyższość geometrii afinicznej jako pierwszego etapu nauczania geometrii w cyklu niższym jasno formułuje W. Servais [31].

1. Geometria afiniczna jest teorią autonomiczną w stosunku do geometrii euklidesowej. Tej autonomii się nie dostrzega łatwo, gdy geometrię afiniczną wprowadza się w ramach geometrii euklidesowej; wyróżnianie grupy przekształceń zachowujących pewną własność geometryczną jest bardzo cenne z punktu widzenia nauczania, bo pozwala selekcjonować sposoby dowodzenia właściwe dla charakteru afinicznego, metrycznego czy rzutowego rozważanego zagadnienia.

2. Geometria afiniczna jako model matematyczny jest bardzo użyteczna w fizyce, w której całe dziedziny, jak na przykład termodynamika, posługują się środkami afinicznymi. W zagadnieniach fizycznych, które wymagają metryki, często okazuje się właśnie celowe wprowadzanie metryki w ramach geometrii afinicznej.

3. Geometria afiniczna jest znacznie prostsza niż geometria metryczna, co stanowi jej wyraźny walor dydaktyczny. Ponieważ jest mniej reguł gry w geometrii

afinicznej niż w geometrii euklidesowej, łatwiej jest je respektować i unikać podświadomego odwoływania się do oczywistości fizycznej.

4. Geometria afiniczna umożliwia konstrukcję przestrzeni wektorowej i ciała liczb rzeczywistych na drodze zarówno naturalnej, jak i możliwie krótkiej.

Te argumenty są oczywiście ważne z wielu punktów widzenia, ale przeciwstawia się im również argumenty za wprowadzaniem metrycznej geometrii w niższym cyklu szkoły średniej, podając następujące motywy:

1° Geometria afiniczna jako przedmiot nauczania w wieku od lat 12 do 15 jest zbyt uboga pojęciowo, aby mogła rozwijać wyobraźnię i intuicję geometryczną ucznia w tym wieku. Trzeba otwarcie odpowiedzieć na pytanie: czy prostota pojęciowa i możliwość wdrażania ucznia do formalnego rozumowania na tym poziomie są ważniejsze od możliwości wprowadzenia go w bogatszy świat figur i transformacji, od możliwości organizowania jego bardzo różnorodnej aktywności w dziedzinie geometrii.

Na tym etapie wprowadza się pierwsze pojęcia transformacji, przestrzeni i ich niezmienników. W geometrii afinicznej uczeń spotyka się jednak tylko z transformacjami afinicznami, a więc zachowującymi współliniowość, zachowującymi — jeżeli można użyć tego wyrażenia pozamatematycznego — formy wizualne figur. A przecież wiadomo z psychologii, że istotnym warunkiem zrozumienia struktury jest jej ujęcie przez kontrastowanie przykładów z kontrprzykładami. Afiniczny charakter translacji, dylatacji, jednokładności, nie będzie uchwycony przez uczniów bez konfrontacji tych przekształceń z transformacjami nie zachowującymi współliniowości. Pojęcie odległości, bardzo naturalne dla dzieci w wieku 12 lat, umożliwia taką konfrontację [23].

2° W koncepcji afinicznej eliminuje się wiele interesujących problemów geometrycznych, dostosowanych do możliwości uczniów w tym wieku i szczególnie mobilizujących ich myślenie. Na poziomie wyższym, gdy geometria metryczna będzie wprowadzana w ramach geometrii afinicznej, uczniowie starsi nie będą — być może — już zainteresowani takimi problemami. W ten sposób dla aktywności geometrycznej o dużej wartości kształcącej nie znajdziemy miejsca w nauczaniu geometrii na poziomie średnim.

3° Nie jest także pewne czy uczeń w wieku 12–15 lat będzie faktycznie świadomy powodów i subtelności metodologicznych decydujących o konstrukcji geometrii na bazie afinicznej. Oczywiście będzie on stopniowo oswajany z rozumowaniem i z definicjami czysto afinicznymi, ale gdy już przejdzie do geometrii metrycznej, dokładne odróżnienie takich czy innych własności nie będzie chyba dla niego tak jasne. Stosując np. twierdzenia geometrii do fizyki czy do analizy, nie będzie on robił tego ze świadomością ich związku z odległą już dlań bazą aksjomatyczną, bo ta świadomość najczęściej nie będzie tu konieczna.

4° Niektórzy dydaktycy uważają, że zbyt późne wprowadzenie metryki do nauki geometrii jest niezgodne z naturalnymi tendencjami w myśleniu dzieci w wieku 12 lat. Pojęcie odległości jest niezaprzeczalnym elementem naturalnej świadomości

tych uczniów i chcą się oni spontanicznie posługiwać odległością w nauce geometrii ([10], s. 270). Powstaje więc problem porównania i oceny korzyści i niedomogów takiej czy innej konstrukcji geometrii opracowanej dla nauczania w określonym wieku.

7.3. Nowe środki reprezentacji graficznej sytuacji geometrycznych. Model przestrzenny i rysunek odgrywały zawsze szczególną rolę w nauczaniu geometrii. Konkretne modele sytuacji geometrycznych są nadal szeroko wykorzystywane, w szczególności przez tych pedagogów, którzy nie chcą w nauczaniu oderwać i oddzielić geometrii — nawet w ujęciu pojęciowym — od wyobraźni przestrzennej. Ale poza tymi środkami nowoczesna pedagogika matematyki dysponuje elementami całkowicie nowymi reprezentacji graficznej zbiorów i relacji geometrycznych. Chodzi tu o środki wprowadzone przez G. Papy'ego w jego książkach, w których omawia geometrię płaszczyzny [27].

Te reprezentacje graficzne są dzisiaj stosowane w wielu krajach, tak przez autorów podręczników, jak i w codziennej pracy nauczycieli i uczniów. Nowymi elementami rysunku geometrycznego są:

1. Używanie kolorów zgodnie z określonymi konwencjami; kolor odgrywa w tym znaczeniu przede wszystkim ważną rolę elementu symboliki, ujawnia wyraźnie strukturę rysunku, ułatwia jego odczytanie; wnosi pewną estetykę do afinicznych konfiguracji, które same przez się nie są w ich graficznej reprezentacji dla ucznia interesujące.

2. Stosowanie różnych schematów zarówno dla ilustracji badanych przedmiotów i relacji, jak i dla zapisu rozumowań.

3. Równoległe wykorzystanie różnych konwencji graficznych (schematy Venna, grafy i rysunek tradycyjny), które z jednej strony przypominają intuicyjną interpretację fizyczną rozważanych sytuacji i zarazem ich sens formalny, z drugiej zaś ułatwiają oddzielenie tych dwóch aspektów geometrii w toku rozumowania.

7.4. Przykłady reprezentatywne dla różnych koncepcji nauczania geometrii na poziomie średnim.

7.4.1. Organizacja lokalna. Ta koncepcja jest realizowana konsekwentnie w wielu szkołach angielskich, w których uczy się geometrii nowoczesnymi metodami (School Mathematics Project, Middlands Mathematical Experiment, Scottish Mathematics Group). Wybiera się tu różne drogi prowadzące do geometrii: transformacje i ich niezmienniki, rachunek wektorów, elementy geometrii analitycznej. elementy topologii płaszczyzny, badanie trójwymiarowej przestrzeni itd. To wszystko jest związane często bezpośrednio z problemami praktycznymi (np. w Middlands Mathematical Experiment wprowadza się rachunek wektorów w związku z problemami nawigacji) i świadomie bez perspektywy syntezy aksjomatycznej ([35], [36], [37]).

Innym przykładem nauczania geometrii opartego na dedukcjach lokalnych są doświadczenia prowadzone w Holandii w 10 szkołach, w klasach pierwszego cyklu

szkoły średniej. Ten kierunek charakteryzuje w sposób następujący H. Freudenthal: „Nauka geometrii zaczyna się od badania przede wszystkim intuicyjnego figur i przekształceń, przy czym uwzględnia się tu w bardzo małym stopniu dedukcję. Krok za krokiem rozwija się jednak strukturę, której poznanie jest ostatecznym celem badania, ale nigdy w takim stopniu, by dojść do globalnej organizacji, co znaczy, że w drodze rozumowania sprowadza się twierdzenia nieoczywiste do twierdzeń uważanych za oczywiste bez ustalenia *a priori* twierdzeń oczywistych w postaci aksjomatów. Przewodnią myślą podręcznika jest zapoznanie ucznia z własnościami ważnych figur geometrycznych i przekształceń geometrycznych i ich grup (chociaż samo pojęcie grupy nie jest wyraźnie sformułowane)" ([18], s. 309).

Treść nauczania jest bardzo bogata i zróżnicowana: przekształcenia i ich algebra, od symetrii osiowej począwszy aż do grupy afinicznej; systemy współrzędnych na płaszczyźnie i w przestrzeni trójwymiarowej; rachunek wektorów (geometryczny i algebraiczny); miara Jordana na płaszczyźnie i w przestrzeni trójwymiarowej, funkcje goniometryczne, różne rzuty itd. ([18], s. 309–314).

Inną oryginalną koncepcję rozwoju elementów geometrii w bezpośrednim związku z doświadczeniem fizycznym i z konkretnym wykorzystaniem związków i zjawisk przestrzennych w nauczaniu dzieci w wieku 12–14 lat realizuje Emma Castelnuovo we Włoszech [8]; przedstawia ona swą koncepcję w sposób szczególnie interesujący w swym sprawozdaniu z doświadczeń przeprowadzonych w cyklu niższym w związku z badaniem przekształceń afinicznych, skoncentrowanym wokół pojęcia środka ciężkości i prowadzącym od konkretnego wykorzystania pewnych materialnych środków do rozwiązywania problemów liniowego programowania [9].

7.4.2. Organizacja lokalna geometrii w cyklu niższym przygotowująca aksjomatyzację algebry i geometrii w cyklu wyższym. Jako typowy przykład nauczania geometrii w szkole średniej w wieku do 15 lat, traktowanego świadomie w perspektywie przyszłego ujęcia aksjomatycznego w cyklu wyższym, można zacytować projekt realizowany obecnie w Stanach Zjednoczonych przez S.S.M.C.I.S. (Unified Modern Mathematics) pod kierunkiem H. Fehra. Podstawowe idee tego projektu precyzuje Fehr w H. sposób następujący:

„Geometria powinna być dzisiaj rozumiana jako badanie różnych przestrzeni. Każda geometria jest parą: zbiór, struktura. Elementy zbioru nazywamy punktami, struktura zaś jest zadana układem aksjomatów, które ustalają związki między punktami a ważnymi podzbiorami podstawowego zbioru. W tym ujęciu nauczanie geometrii staje się coraz bliższe nauczaniu algebry i jej struktur i dlatego geometria powinna być rozwijana w sposób podkreślający posługiwanie się strukturami i technikami algebraicznymi. Taki jest duch czasu. Dlatego bardzo ważnym celem nauczania geometrii jest doprowadzenie uczniów do zrozumienia pojęć: przestrzeni liniowej i algebry liniowej".

„Można stosować wiele różnych metod w badaniu przestrzeni. Można badać tylko poglądowo przedmioty fizyczne w przestrzeni o 2 lub 3 wymiarach i abstra-

hować kształt, położenie i własności miarowe wszędzie tam, gdzie to abstrahowanie jest pożyteczne dla rozwoju geometrii praktycznej lub przynajmniej dla uświadomienia uczniom jakiegoś układu relacji geometrycznych użytecznych w praktyce. Można postępować syntetycznie jak Euklides, wyróżniając odpowiedni (ale możliwie prosty) układ aksjomatów. Można wprowadzić układ współrzędnych i wykorzystać liczby rzeczywiste na drodze wskazanej przez Descartesa. Można wprowadzić prostopadłość i metrykę dla zdefiniowania kartezjańskiej płaszczyzny euklidesowej. Można także iść za programem z Erlangen Feliksa Kleina, studiując odwzorowania, przekształcenia i ich grupy oraz geometrie, które są na tych grupach oparte. Można także wykorzystać wektory, najpierw jako odcinki zorientowane, potem jako punkty przestrzeni z wyróżnionym punktem, co prowadzi do algebry punktów. Można przejść od przestrzeni wektorowej afinicznej do przestrzeni wektorowej euklidesowej, wprowadzając iloczyn skalarny wektorów. W nauczaniu na poziomie średnim nie jesteśmy i nie powinniśmy być zainteresowani kształceniem przyszłych matematyków i dlatego żadna z tych dróg zbliżenia się do geometrii nie powinna być wykorzystywana z wykluczeniem innych. Wykształcony człowiek, nie-matematyk, zrozumie geometrię w jej współczesnym sensie najlepiej, gdy w nauczaniu spotka się z tymi wszystkimi jej aspektami" ([13], [14]).

Realizacja tych postulatów polega na dochodzeniu do geometrii na poziomie niższym różnymi drogami wspomnianymi w cytowanym ustępie, bez globalnego aksjomatycznego ujęcia, ale z podstawowym założeniem, aby te wszystkie drogi prowadziły ostatecznie do aksjomatycznie ujętych teorii, algebry liniowej, przestrzeni afinicznej i wektorowej, traktowanych już jako teorie matematyczne — na początku cyklu wyższego [38].

G. Waluziński w swej książce *Guide Blanc* przedstawia koncepcję nauczania geometrii zorganizowanego w trzech kolejnych fazach: faza eksploracji doświadczalnej przestrzeni fizycznej w wieku do 9 lat, faza dedukcyjnej organizacji lokalnej i matematyzacji stopniowej od 9 do 14–15 lat, faza teorii aksjomatycznych od 14–15 lat [39].

Taka koncepcja znajduje się u podstawy programów w pewnych krajach, gdzie nauczanie ogólne do wieku 14–15 lat odbywa się w jednolitych szkołach obowiązujących dla wszystkich dzieci. Nauczanie geometrii w takiej szkole jest oparte na dedukcji lokalnej i na bardzo zróżnicowanej aktywności uczniów typu geometrycznego. Ma ona na celu rozwój wyobraźni przestrzennej i wiedzy o przestrzeni dobrze zorganizowanej przez podstawowe struktury matematyczne, oraz stopniowe wprowadzanie w elementy metody matematycznej. Wiadomości geometryczne tworzą materiał do aksjomatyzacji na początku liceum (wiek 15 lat) i dla kursu geometrii rozwijanego czy to w postaci odrębnej teorii, czy też włączonego do jednolitego kursu matematyki. Wszystkie te koncepcje przeciwstawiają się aksjomatycznej organizacji geometrii wprowadzonej zbyt wcześnie, ale uznają konieczność późniejszej organizacji globalnej.

Idea przejścia od organizacji lokalnej geometrii cyklu niższego (szkoła podstawowa) do globalnej organizacji aksjomatycznej (szczególna przestrzeń metryczna)

geometrii w cyklu wyższym (liceum) była również ideą podstawową programów matematyki w Polsce w ramach ostatniej reformy; ta sama myśl jest podkreślona w projektach reformy w Czechosłowacji [33].

7.4.2. Dedukcyjna organizacja globalna geometrii od początku systematycznego nauczania (przed wiekiem 14–15 lat). Jako przykłady typowe — choć różne — takiej organizacji można zacytować koncepcje przedstawione przez nowoczesne programy i podręczniki belgijskie i francuskie oraz przez nowy radziecki eksperymentalny podręcznik geometrii przeznaczony dla szóstego roku nauczania w szkole podstawowej.

Koncepcję belgijską kursu geometrii zrealizował po raz pierwszy w postaci szczegółowej konstrukcji Georges Papy w szkolnych podręcznikach, w książkach, które przedstawiają podstawy matematyczne tej konstrukcji, i w jego licznych publikacjach (na przykład [26], [27], [28]). Podobny schemat podstawowy jest wykorzystany w inny sposób np. przez W. Servais według koncepcji przedstawionych w jego publikacjach i w jego podręcznikach [31]. Mimo pewnych różnic istnieje wspólna podstawa dla tych różnych interpretacji, która może być scharakteryzowana jak następuje:

1) Dziecko 12-letnie posługuje się już pewnym językiem geometrycznym i poglądowo ujętymi pojęciami geometrycznymi przyswojonymi w klasach początkowych; tę tradycyjną jeszcze wiedzę przyjmuje się za punkt wyjścia do świadomej już matematyzacji intuicji geometrycznych w szkole średniej.

2) Przyznaje się pierwszeństwo geometrii afinicznej, w ramach której następnie rozwija się geometrię metryczną.

3) Zaczyna się geometrię płaszczyzny afinicznej w klasie szóstej (wiek 12–13 lat) po zapoznaniu uczniów z elementami nauki o zbiorach i relacjach.

4) Używa się jednocześnie pojęć mnogościowych i stosuje metodę dedukcyjną tak, jak się ją stosuje w naukach doświadczalnych, z pewnymi subtelnymi różnicami metodologicznymi, np. W. Servais wykorzystuje skończone modele w celu głębszego uświadomienia dzieciom procesu aksjomatyzacji, zaś G. Papy odrzuca zasadniczo te modele jako nienaturalne.

5) W ten sposób wprowadza się stopniowo aksjomaty geometrii afinicznej i w ramach tak rozwijanej teorii buduje się jednocześnie na drodze geometrycznej grupę translacji i jednokładności oraz — wychodząc od kalibrowania prostej — ciało liczb rzeczywistych, przestrzeń liniową i przestrzeń wektorową rzeczywistą płaszczyzny otrzymaną przez identyfikację płaszczyzny ze środkiem z przestrzenią liniową wektorów.

Dopiero w trzecim roku nauczania na poziomie średnim przechodzi się do geometrii metrycznej (odległość, iloczyn skalarny), grupy izometrii i jej podgrup skonstruowanych w ramach geometrii afinicznej uprzednio szeroko rozwiniętej. To przejście jest oparte na różnych aksjomatach w różnych podręcznikach, dotyczących najczęściej prostopadłości i symetrii osiowej. Kurs geometrii w cyklu niż-

szym „kulminuje" — jak mówi G. Papy — w zdefiniowaniu euklidesowej struktury wektorowej płaszczyzny i kończy się jej systematycznym wykorzystaniem.

Wszystko to przygotowuje istotny zwrot w nauczaniu geometrii. Uczniowie stają się coraz bardziej świadomi tego, że dla rozwijania geometrii wystarczy zapamiętać tylko aksjomaty definiujące liczby rzeczywiste i strukturę wektorową płaszczyzny euklidesowej. Geometria badana poprzednio służy dalej jako źródło intuicji i motywacji dla właściwego badania przestrzeni liniowych i wektorowych i przede wszystkim dla badania liniowych przekształceń przestrzeni wektorowej, pojęć i formuł trygonometrycznych, liczb zespolonych, grupy addytywnej kątów itd. Nauka geometrii kończy się na studium przestrzeni trójwymiarowej rozwijanej przez uczniów w wieku 16–17 lat, przy czym punktem wyjścia jest tu trójwymiarowa przestrzeń wektorowa. W ten sposób model belgijski chce zharmonizować koncepcję przedstawioną z jednej strony przez G. Choqueta w jego książce *Nauczanie geometrii* i koncepcję J. Dieudonnégo rozwiniętą w jego *Algebrze liniowej i geometrii* ([11], [12], [30]).

Według aktualnego modelu francuskiego geometrię teoretyczną przygotowuje się w ciągu 2 pierwszych lat szkoły średniej przez intuicyjny zarys w zakresie zarówno matematyzacji przestrzeni, jak i wprowadzenia ciała liczb rzeczywistych. Istotna różnica między tym ujęciem a ujęciem belgijskim polega na tym, że tutaj liczby rzeczywiste nie są wprowadzane w ramach geometrii ugruntowanej aksjomatycznie, lecz przeciwnie — w aksjomatyce geometrii afinicznej korzysta się już z liczb rzeczywistych, wprowadzając od początku prostą rzeczywistą. W ten sposób rozporządza się układem współrzędnych na prostej i następnie układem współrzędnych afinicznych na płaszczyźnie, co upraszcza i ułatwia konstrukcję teorii. W ramach w ten sposób konstruowanej geometrii afinicznej rozwija się wstęp do algebry liniowej wektorów w sensie geometrycznym oraz algebrę translacji. Przejście do przestrzeni wektorowej metrycznej gwarantują aksjomaty definiujące szczególną inwolucyjną relację w zbiorze kierunków (prostopadłość) i odległość, która jest związana z tą prostopadłością. W ten sposób organizuje się drogę aksjomatyczną do geometrii metrycznej. Ten sam zwrot, który jasno przedstawiono w modelu belgijskim, wystąpi i tu w cyklu wyższym; algebra liniowa i wektorowa będą mogły być już interpretowane i konkretyzowane w teorii poprzednio poznanej i obecnie przekształcającej się w model nowej, bardziej ogólnej teorii.

Nowy program i nowe eksperymentalne podręczniki przeznaczone dla uczniów do 12 lat w ZSRR przedstawiają geometrię od początku dedukcyjną, opartą na pojęciach odległości i prostej, której struktura jest określona przez odległość.

Odległość jest zresztą według tej koncepcji traktowana nie tyle jako liczba (na tym poziomie uczniowie nie dysponują jeszcze ciałem liczb rzeczywistych), lecz jako „wielkość", na której dokonuje się pewnych operacji algebraicznych [22]. Do tej geometrii dochodzi się przez etap aksjomatyzacji, do której uczniowie powinni być świadomie włączeni — zgodnie z zaleceniami wyrażonymi w komentarzach do programu.

Podobny układ zastosowano w Polsce na wyższym poziomie (liceum, odległość

jest tu liczbą). W ramach tej geometrii konstruuje się przestrzeń liniową wektorów, bada się grupę podobieństw i jej podgrupy (w płaszczyźnie i w przestrzeni trójwymiarowej). Wprowadza się pewne pojęcia topologiczne w tych przestrzeniach, miarę Jordana, współrzędne kartezjańskie itp.

Ten przegląd, chociaż niekompletny, ujawnia jednak, że koncepcja współczesnej geometrii elementarnej w systemie matematyki będącej przedmiotem nauczania w szkole jest ciągle jeszcze otwarta dla badań dydaktycznych i być może, że jest to najtrudniejszy problem współczesnej dydaktyki matematyki.

Jest oczywiste, że geometria — niezależnie od jej aktualnej organizacji — oddala się coraz bardziej od swego tradycyjnego sztywnego schematu, niemniej można stwierdzić, że właśnie wyzwolenie jej z tego pancerza krępującego jej rozwój, z jej „wspaniałej izolacji", uratowało geometrię dla nauczania, przekształcając ją na drogę prowadzącą od badania przestrzeni do podstawowych struktur matematyki. Być może, że w trakcie tego przekształcenia niektóre wartości tradycyjnej geometrii zostały zagubione. Dydaktyka powinna znaleźć środki włączenia ich z powrotem do świata współczesnej geometrii. W szczególności w perspektywie nowoczesnego nauczania może się okazać, że pewne problemy i pewne tradycyjne ćwiczenia po ich interpretacji w języku współczesnym zasługują na naszą uwagę w nowym kontekście. Geometria elementarna, która jest dla nauki już wyczerpaną kopalnią, nie jest taką wyczerpaną kopalnią ani dla nauczania, ani dla badań dydaktycznych.

Warunkiem koniecznym poprawnego, z punktu widzenia samej matematyki i dydaktyki, włączenia geometrii do całej konstrukcji matematyki elementarnej — jest świadomość różnych aspektów drogi geometrycznej i głębokie rozumienie jej nauczania przez nauczycieli.

Współczesne studia wyższe przyszłych nauczycieli nie tylko zaniedbują te sprawy, ale nawet rozwijają postawy utrudniające ich rozumienie. Dlatego problemy współczesnego nauczania geometrii wiążą się także z problemami dotyczącymi kształcenia nauczycieli.

Literatura cytowana

[1] P. S. Aleksandrow, *O pewnych przejawach współpracy polskiej i radzieckiej szkoły matematycznej w dziedzinie topologii i teorii mnogości*, Wiadom. Mat. 6 (1963), s. 175–180.

[2] E. Artin, *Geometric algebra*, New York, London 1957. Interscience Tracts in pure and applied Mathematics.

[3] F. Bachmann, *Aufbau der Geometrie auf dem Spiegelungsbegriff*, Springer, Berlin 1959.

[4] G. Birkhoff, R. Beatly, *Basic Geometry*, Chelsea Publishing Company, III ed., New York 1962.

[5] L. M. Blumenthal, *Theory and applications of distance geometry*, Oxford 1953.

[6] — *A modern view of geometry*, San Francisco 1964.

[7] N. Bourbaki, *Elements d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris 1960.

[8] E. Castelnuovo, *La geometria*, La Nuova Italia, Firenze 1970.

[9] — *Différentes représentations utilisant la notion de barycentre*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 2, Numero 2/3 (1969).
[10] J. Carlot, G. Noel, *Sur l'enseignement de la géométrie métrique*, Mathematica et Paedagogia 50 (1971).
[11] G. Choquet, *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, Paris 1967.
[12] J. Dieudonné, *Algébre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1969.
[13] H. F. Fehr, *Geometry as secondary school subject*, Mathematics Teacher, February 1972.
[14] — *Education for change*: *What change*?, Tendences Nouvelles de l'Enseignement des Mathématiques, Vol. II (1970), UNESCO.
[15] J. Frenkel, *Sur les notes de géométrie*, Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Numero 274 (1970).
[16] H. Freudenthal, *The role of geometrical intuition in modern mathematics*, ICSU Review of World Science 6 (1964).
[17] — *Geometry between the devil and the deep sea*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 3, No 3/4 (1971)
[18] — *Un cours de géométrie*, Tendences Nouvelles de l'Enseignement des Mathématiques, Vol. II, (1970), UNESCO.
[19] M. Glaymann, *Initiation aux espaces vectoriels*, Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, No 273 (1970).
[20] P. Hilton, *Topology in the high school*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 3, No 3/4 (1971).
[21] P. J. Kelly, *Topology and transformations in hihg school geometry*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 3, No 3/4 (1971).
[22] A. N. Kolmogorov, A. F. Semenovitch, F. Nagibin, R. S. Tcherkasov, *O novom izdanii probnogo učebnika geometrii dla VI klassa*, Matematika v Schkole, No 4 (1971).
[23] A. Z. Krygowska, *Nauczanie geometrii w jednolitej matematyce współczesnej*, Wiadom. Mat. 6 (1962), s. 23–42.
[24] A. A. Liapunow, *O fundamentie i stile sovremiennoj matematiki*, Matematitscheskoje Proswestchennie No 5, Moskwa 1960.
[25] K. Menger, *The geometry relevant to modern education*, Educational Studies in Mathematics Volume 4, No. 1 (1971).
[26] G. Papy, *Géométrie affine et nombres réels*, Presses Universitaires de Bruxelles (1962).
[27] — *Mathématique moderne*, Vol. 1, 2, 3, 6, Labor, Bruxelles, Didier, Paris, Bruxelles, Montreal 1963, 1965, 1966, 1967.
[28] *La géométrie dans l'enseignement moderne de la mathématique*, Tendences Nouvelles de l'Enseignement des Mathématiques Vol. II (1970), UNESCO.
[29] A. Revuz, *The position of geometry in mathematical education*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 4, No. 1 (1971).
[30] — *Pour l'enseignement de la géométrie la route est tracée*, Mathematica et Paedagogia, No 28, 1965.
[31] W. Servais, *Axiomatisation et géométrie élémentaire*, Mathematica et Paedagogia, No 29, 1966.
[32] H. G. Steiner, *Geometry in School Programme*, UNESCO, Mathematics project for the Arab States, Regional Seminar Cairo, 1969 UNESCO.
[33] J. Vysin, *Probléme d'une expérience de renouveau faite par l'Union des Mathématiciens et Physiciens Tchecoslovaques dans 6-ème à 9-ème classes des écoles de neuf ans*, Tendences Nouvelles de l'Enseignement des Mathématiques, Vol. II (1970), UNESCO.
[34] Geometry Conference Recommendations. Educational Studies in Mathematics, Vol. 3, No 3/4 (1971).
[35] School Mathematics Project SMP, Textbooks, Cambridge University Press.

[36] Middlands Mathematics Experiment, MME, Textbooks, Geogre Harrap.
[37] Scottish Mathematics Group, SMG, Textbooks, Blackie and Son LTD and R. W. Chambers LTD.
[38] School Mathematics Curriculum Improvement Study, SSMCIS, Textbooks, Teachers College Press, New York.
[39] G. Waluzinski, *Guide blanc*, Armand Collin, Paris 1970.