ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIX (1976)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Zadania

Wszelką korespondencję dotyczącą zadań (rozwiązania zadań, nowe zadania itp.) należy nadsyłać pod adresem: Piotr Mankiewicz, Instytut Matematyczny PAN, skr. pocz. 137, 00-950 Warszawa, ul. Śniadeckich 8. Ciekawsze rozwiązania będą publikowane.

231. Macierzą prostą nazywamy macierz kwadratową, która powstaje z macierzy jednostkowej przez zastąpienie jednego wiersza dowolnymi elementami. Udowodnić, że każda macierz kwadratowa rozkłada się na iloczyn macierzy prostych, tzn. że każda transformacja liniowa przestrzeni n-wymiarowej w siebie da się rozłożyć na transformacje proste, w których tylko jedna zmienna ulega podstawieniu liniowemu, a inne pozostają nietknięte(1).

J. Mikusiński (Katowice)

232. Niech $(\boldsymbol{K}, +, \cdot)$ będzie ciałem o charakterystyce różnej od 2. Wyznaczyć wszystkie działania dwuargumentowe $\triangle$ określone na zbiorze $\boldsymbol{K}$ i spełniające warunki:

$$a \triangle b = b \triangle a, \tag{1}$$

$$(a \triangle b) + c = (a + c) \triangle (b + c), \tag{2}$$

$$(a \triangle b) \cdot c = (a \bullet c) \triangle (b \bullet c), \tag{3}$$

dla każdych $a, b, c \in \boldsymbol{K}$.

W. Mnich (Opole)

233. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n}\, \underbrace{\sin(\sin(\sin \ldots (\sin 1)) \ldots)}_{n \text{ razy}}.$$

T. Iwaniec (Warszawa)

---

(1) Istotą zadania jest to, że nie zakłada się odwracalności danej macierzy. Ze względu na swą elementarność i użyteczność, twierdzenie to powinno znajdować się w każdym podręczniku algebry liniowej. Okazuje się jednak, że w podręcznikach podawane jest zawsze z dodatkowym, niepotrzebnym założeniem, że macierz jest nieosobliwa (*przyp. red.*).

234. Udowodnić, że pierwiastki pochodnej wielomianu zmiennej zespolonej leżą w uwypukleniu zbioru pierwiastków tego wielomianu.

T. Iwaniec (Warszawa)

235. Niech $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ będzie zbiorem difeomorfizmów okręgu na siebie klasy C^∞ z topologią zbieżności jednostajnej ze wszystkimi pochodnymi. Pokazać, że dla każdego otoczenia U odwzorowania identycznościowego okręgu na siebie w $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ istnieje $f \in U$ nie będące kwadratem żadnego odwzorowania z $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$, tzn. że dla każdego $h \in \mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ mamy $f \neq h \circ h$.

T. Mostowski (Warszawa)

236. Niech A będzie podzbiorem okręgu S^1 niezmienniczym ze względu na obroty S^1 o kąty współmierne z π. Pokazać, że $|A| = 0$ lub $|S^1 \setminus A| = 0$, gdzie $|\cdot|$ oznacza miarę Lebesgue'a na okręgu.

N. Tomczak (Warszawa)

237. Załóżmy, że σ_i $(i = 1, 2)$ są kontrakcjami liniowymi (tzn. operatorami liniowymi o normie $\leqslant 1$) z ciała skalarów $\boldsymbol{F}$ (gdzie $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}$ lub $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}$) w przestrzeń Banacha B takimi, że dla każdej przestrzeni Hilberta H i każdej pary kontrakcji liniowych $\xi_i\colon \boldsymbol{F} \to H$ $(i = 1, 2)$ istnieje dokładnie jedna kontrakcja liniowa $\vartheta\colon B \to H$ taka, że $\vartheta \circ \sigma_i = \xi_i$ dla $i = 1, 2$. Pokazać, że B musi mieć wymiar 2 i

$$\|b_1 e_1 + b_2 e_2\| = |b_1| + |b_2| \qquad (b_1, b_2 \in F)$$

dla pewnej bazy (e_1, e_2) w B.

Z. Semadeni (Warszawa)

238. Dla każdej krzywej $x(t)$, $t \in [0, 1]$, w przestrzeni Banacha $(X, \|\ \|)$ zdefiniujmy jej *długość* $|x(\cdot)|$ wzorem

$$|x(\cdot)| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left\| x\left(\frac{i}{2^n}\right) - x\left(\frac{i-1}{2^n}\right) \right\|.$$

Pokazać, że dla każdej liczby $\alpha \in [3, 4]$ istnieje dwuwymiarowa przestrzeń Banacha $(X_\alpha, \|\ \|_\alpha)$ taka, że długość okręgu jednostkowego w X_α wynosi 2α (innymi słowy, π w przestrzeni X_α równa się α).

T. Szankowski (Kopenhaga)

239. Mówimy, że zbiór wypukły K w przestrzeni euklidesowej E^n ma *skończoną szerokość*, jeżeli istnieją dwie równoległe hiperpłaszczyzny H_1 i H_2 takie, że K jest zawarty między H_1 a H_2. Pokazać, że zbiór wypukły $K \subset E^n$ ma skończoną szerokość wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $x \in E^n$ oraz $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$ takie, że każda prosta równoległa do x przecina zbiór K wzdłuż odcinka o długości mniejszej niż λ.

P. Mankiewicz (Warszawa)

240. Pokazać, że zbiór wypukły $K \subset E^n$ ma skończoną szerokość (por. zad. 239) wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór promieni kul zawartych w K jest ograniczony.

P. Mankiewicz (Warszawa)

Uwaga do zadania 215 (Wiadom. Mat. 18(1974), s. 220). Zadanie to przesłałem do redakcji Wiadomości Matematycznych informując, że usłyszałem je od prof. A. O. Gelfonda, który z kolei dowiedział się o nim od pewnego matematyka radzieckiego, nazwiska którego nie pamiętał. Uważałem, że zadanie to jest interesujące i warto uchronić je przed zapomnieniem. Opublikowanie tego zadania pod moim nazwiskiem uważam za niewłaściwe. Ponadto, o ile mi wiadomo, rozwiązanie zadania nie jest znane, zatem przy numerze zadania powinna być gwiazdka.

J. Browkin

Rozwiązania zadań

190*. Niech $x_1, \ldots, x_n$ $(1 < n < 2^m - 1)$ będą dowolnymi niezerowymi elementami ciała Galois $\mathrm{GF}(2^m)$ oraz niech

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} x_j^i \in \mathrm{GF}(2^m)$$

dla $i = 1, 3$. Czy jeśli $S_3 = S_1^3$, to $S_1 = 0$?

Z. Szwaja (Poznań)

W zadaniu zakłada się niewątpliwie, że elementy $x_1, \ldots, x_n$ są różne. W przeciwnym razie wystarcza przyjąć $n = 3$, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, aby otrzymać odpowiedź negatywną. Że również przy założeniu różności elementów $x_1, \ldots, x_n$ odpowiedź jest negatywna, wskazuje przykład $n = m = 4$, $x_i = \xi^{i-1}$, gdzie ξ jest pierwiastkiem równania $\frac{x^5 - 1}{x - 1} = 0$ nieprzywiedlnego w GF [2]. Mamy

$$S_1 = \xi^4 \neq 0, \qquad S_3 = \xi^2 = S_3^1.$$

A. Schinzel (Warszawa)

Krótkie informacje

Zgodnie z tradycją, na uroczystości otwarcia Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Vancouver wręczono medale Fieldsa, przyznawane matematykom, którzy nie przekroczyli 40 lat i w okresie od poprzedniego Kongresu uzyskali szczególnie wybitne wyniki. Laureatami zostali Enrico Bombieri (Uniwersytet w Pizie) i David Mumford (Uniwersytet Harvard).