Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego



Stanisław Saks

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXIV (1982)

ANTONI ZYGMUND (Chicago)

Stanisław Saks (1897–1942)

I

Stanisław Saks to jedna z czołowych postaci Matematyki Polskiej w okresie po pierwszej wojnie światowej; miał on też duży wpływ na rozwój matematyki poza granicami kraju, zarówno przez swe osiągnięcia osobiste (m. in. przez swą klasyczną książkę o teorii całki), jak i wyniki swych uczniów. Bez Saksa obecna polska analiza matematyczna nie byłaby tym, czym jest. Jego zainteresowania i główne osiągnięcia szły w kierunku zmiennej rzeczywistej (teoria miary i całki, różniczkowalność funkcji, analiza funkcjonalna, oraz tych działów funkcji analitycznych i harmonicznych, które stykają się ze zmienną rzeczywistą).

Stanisław Saks urodził się w Kaliszu 30 grudnia 1897 r. w rodzinie urzędnika prywatnego Filipa Saksa i Emmy z domu Bosak. W 1905 r. wstąpił w Kaliszu do szkoły handlowej, a gdy w 1907 r. rodzice przenieśli się do Warszawy, umieścili go w I klasie szkoły średniej Michała Kreczmara. Była to szkoła polska, z językiem wykładowym polskim, jedna z najlepszych w Warszawie. Atmosfera jej była patriotyczna, wrażliwa na problemy społeczne. Wielu uczniów tej szkoły odegrało później dużą rolę w ruchu socjalistycznym w kraju. Uległ tym wpływom i Stanisław Saks, który wcześnie wstąpił do ZNMS (Związku Niezależnej Młodzieży Socjalistycznej), a później do PPS. Praca naukowa odsunęła go od aktywnej działalności politycznej, ale sympatie socjalistyczne zachował do końca życia. Pisywał artykuły do *Robotnika* (pod pseudonimem Zygfryd).

Maturę otrzymał Saks w 1915 r. i jesienią tegoż roku wstępuje na dopiero co utworzony uniwersytet polski w Warszawie. Wykładał tam od samego początku Stefan Mazurkiewicz, którego zainteresowania szły w kierunku topologii i teorii funkcji (zmiennej rzeczywistej i zespolonej). Odegrał on niewątpliwie dużą rolę w rozwoju zainteresowań matematycznych Saksa; jakkolwiek poszły one później w kierunku analizy, dużą wrażliwość na aspekty topologiczne zagadnień analizy zachował Saks przez całe życie. Był to niewątpliwie wpływ Mazurkiewicza. Jest on wy-

raźny w książce Saksa (napisanej wspólnie z autorem niniejszego artykułu) *Teoria funkcji analitycznych* [I_4].

Jesień 1919 r. to moment przełomowy w rozwoju polskiej nauki, a w szczególności matematyki. Wraca do kraju z emigracji — czy wygnania — wielu wybitnych matematyków, zasilając istniejące kadry krajowe i stwarzając to, co wkrótce będzie nosić nazwę „polskiej szkoły matematycznej". Nieco zniekształcając obraz można by powiedzieć, że i przedtem istnieli matematycy polscy (i to bardzo wybitni, jak np. Wroński), ale nie było matematyki polskiej, zwartego ciała uczonych o wspólnych zainteresowaniach, pracujących nad podobnymi zagadnieniami i będących w bliższym kontakcie ze sobą.

Na pierwszym miejscu postawić tu należy nazwiska Wacława Sierpińskiego oraz Zygmunta Janiszewskiego. Janiszewski, po wyjściu z Legionów, zmarł w styczniu 1920 r., zaledwie w kilka miesięcy po objęciu katedry na uniwresytecie w Warszawie i rozpoczęciu wykładów, ale bezpośredni jego wpływ, choć krótkotrwały, był bardzo głęboki i jego, wraz z Sierpińskim i Mazurkiewiczem, postawić należy w pierwszym szeregu twórców polskiej szkoły matematycznej. Tak się złożyło, że wszyscy trzej mieli pokrewne zainteresowania matematyczne (topologię i funkcje zmiennej rzeczywistej), i fakt ten odegrał dużą rolę w rozwoju polskiej szkoły matematycznej, a w szczególności wpłynął na zainteresowania Saksa.

Lata 1919–1921 to okres przerwy w studiach Saksa. Wypełniły go służba w wojsku polskim i udział w powstaniu śląskim; nagrodzony został Krzyżem Walecznych (1).

W 1921 r. Saks zostaje asystentem przy katedrze matematyki na Wydziale Mechanicznym Politechniki Warszawskiej, przy profesorze Juliuszu Rudnickim. Stanowisko to zachowuje aż do wybuchu wojny w 1939 r. Nawiasem dodam, że to prawdopodobnie dzięki wpływom Saksa zostałem jego kolegą, będąc mianowany w rok później młodszym asystentem przy tej samej katedrze. Był to początek bliskiej przyjaźni naukowej i osobistej, która łączyła nas do końca jego życia. Trzecim asystentem przy tej katedrze był Stefan Kulczycki. Po przejściu prof. Rudnickiego na katedrę w Wilnie, następcą jego i zwierzchnikiem Saksa został prof. Witold Pogorzelski.

Studia uniwersyteckie kończy Saks w 1922 r. doktoratem. Praca jego *Przyczynek do topologii powierzchni obszarów płaskich* była częściowo wydrukowana w *Fundamentach* (p. [4]). Promotorem był prof. Stefan

(1) W Archiwum UW znajduje się podanie S. Saksa o ponowne wpisanie go w rejestr studentów. Swą przerwę w studiach uzasadniał on m. in. udziałem w akcji plebiscytowej na Górnym Śląsku.

W jednym z numerów *Przekroju* w latach 1946–1950 ukazało się zdjęcie S. Saksa zrobione w czasie akcji powstańczej na Śląsku (*przyp. red.*).

Mazurkiewicz. Saks habilituje się na Uniwersytecie Warszawskim w roku akademickim 1926/1927 i zostaje zatrudniony jako docent Uniwersytetu Warszawskiego w latach 1927–1939, zachowując asystenturę na Politechnice.

Pisząc o tym okresie należy nieco bardziej szczegółowo uwzględnić prof. Sierpińskiego, którego wpływ na osobę Saksa był co najmniej tak ważny, jak wpływ Mazurkiewicza.



Stanisław Saks w karykaturze L. Jeśmanowicza

W 1915 r. Sierpiński — jako profesor Uniwersytetu Lwowskiego — został wywieziony przez okupacyjne władze rosyjskie do Moskwy, gdzie przebywał do 1918 r. Wrócił wtedy do wolnej Warszawy i otrzymał profesurę na Uniwersytecie. Pobyt w Moskwie, gdzie nawiązał bliski kontakt naukowy i osobisty z prof. N. Łuzinem i jego uczniami („moskiewska szkoła matematyczna"), miał duży wpływ na zainteresowania i prace Sierpińskiego, a pośrednio i na kierunek matematyki polskiej. Łuzin był wybitną indywidualnością matematyczną, i jemu oraz jego uczniom i kolegom zawdzięczamy wiele klasycznych twierdzeń teorii funkcji zmiennej rzeczywistej (można tu wspomnieć twierdzenie Jegorowa o zbieżności ciągów funkcji mierzalnych; twierdzenie samego Łuzina o budowie funkcji mierzalnych; twierdzenia Chińczyna o różniczkowalności funkcji i o całce Denjoy; twierdzenia Priwałowa o wartościach granicznych funkcji analitycznych i harmonicznych, i wiele, wiele in-

nych). Wpływ Łuzina i jego szkoły odbił się w dużym stopniu na zainteresowaniach Saksa, jak to widać wyraźnie z jego prac.

Z kolei należy wspomnieć o wpływie szkoły matematycznej lwowskiej na Saksa. Hugo Steinhaus, który studiował przed 1914 r. w Getyndze, przywiózł do kraju znajomość nowych prądów i osiągnięć w analizie matematycznej, a w szczególności w rodzącej się analizie funkcjonalnej. Ta ostatnia, oświeżona nowymi i oryginalnymi ideami Banacha i jego uczniów (Mazura, Schaudera, Kaczmarza, Orlicza, Ulama i innych), nadaje specyficzny charakter i siłę matematyce lwowskiej. Można by powiedzieć, że gdy w matematyce warszawskiej dominuje topologia i zmienna rzeczywista, to Szkoła Lwowska celuje w analizie funkcjonalnej. Powiedzenie bardziej dobitne niż ścisłe, gdyż od samego początku obie szkoły miały mocny wpływ na siebie, zarówno przez kontakty osobiste, jak i wspólne prace; wielką rolę odegrała tu przyjaźń osobista Sierpińskiego i Banacha.



W 1929 r. wychodzi we Lwowie pierwszy tom *Studia Mathematica*. Saks miał od samego początku bliski kontakt ze *Studiami* i jeden z najpiękniejszych wyników matematycznych Saksa jest w teorii analizy funkcjonalnej (o czym niżej).

Powróćmy do historii osobistej Saksa. Po habilitacji w 1926 r. prowadzi on wykłady zlecone na Uniwersytecie Warszawskim (obok ćwiczeń na Politechnice) aż do wybuchu wojny w 1939 r. W okresie tym jest jednoroczna przerwa (1931–1932), kiedy to, po otrzymaniu stypendium amerykańskiej Fundacji Rockefellera, wyjeżdża na rok do Stanów Zjednoczonych, głównie do Brown University (w Providence, stan Rhode Island), gdzie współpracuje z prof. J. D. Tamarkinem (emigrantem z Rosji po 1917 r.). Współpraca ta była bardzo pożyteczna nie tylko z uwagi na jej treść czysto naukową. Tamarkinowi zawdzięczamy bardzo wiele. Umożliwił on (stypendia) matematykom polskim kontakty osobiste z zagranicą, później organizował pomoc przy odbudowie biblioteki seminarium matematycznego w Warszawie po jej zniszczeniu w czasie ostatniej wojny.

W okresie, o którym mówimy, talent matematyczny Saksa rozwija się w całej pełni. Sprzyja temu charakter środowiska matematycznego warszawskiego, pełnego utalentowanej młodzieży zainteresowanej w pracy naukowej, a w szczególności w bieżących osiągnięciach swych profesorów. Długoletnia współpraca między profesorami a uczniami jest tu zjawiskiem normalnym.

Saks był wyjątkowo utalentowanym wykładowcą. Precyzja, jasność

i elegancja jego stylu były bardzo atrakcyjne i przyciągały słuchaczy, do czego należy dodać osobistą życzliwość przy organizowaniu pracy i współpracy naukowej studentów. Miał on bliskie kontakty naukowe i z innymi środowiskami matematycznymi (w szczególności Lwowem i Wilnem). W Warszawie współpracował najbliżej może z Aleksandrem Rajchmanem i Zygmuntem Zalcwasserem, a nieco później z Edwardem Marczewskim, Romanem Sikorskim i Samuelem Eilenbergiem.

Zalcwasser (zamordowany w Treblince, 1943) i Rajchman (zmarł w 1940, Dachau) byli bardzo zainteresowani teorią różniczkowalności funkcji zmiennej rzeczywistej i tu ich kontakt z Saksem i Sierpińskim miał niewątpliwie duży wpływ na polskie osiągnięcia w tej dziedzinie. Sierpińskiego może najbardziej interesowały aspekty bairowskie tej teorii; pojęcia zbiorów G_δ i F_σ, zbiorów pierwszej i drugiej kategorii itp., występują stale w jego wykładach i pracach oraz pracach jego uczniów. Zainteresowania Saksa szły w równej mierze w kierunku metrycznym (lebesgue'owskim) teorii i jego najpiękniejsze osiągnięcia są może w symbiozie tych dwóch kierunków.

Mówiąc o talencie pedagogicznym Saksa należy wspomnieć o dwóch jego książkach *Zarys teorii całki* [I_1] i (napisanej wspólnie z autorem niniejszego artykułu) *Teorii funkcji analitycznych* [I_4].

Pierwsza z nich, która — znacznie rozszerzona — ukazała się później w tłumaczeniach: francuskim, angielskim i rosyjskim, pozostaje dziełem klasycznym i dotychczas nie zastąpionym. Jest to rzecz rzadko spotykana, by książka w tej dziedzinie zachowała swą wartość i żywotność przez tak długi czas. Była ona następczynią dwu innych klasycznych dzieł w tej dziedzinie: Lebesgue'a i de la Vallée-Poussina, ale była pierwszą, która wyszła w traktowaniu całki poza przestrzenie euklidesowe, co było uogólnieniem bardzo istotnym. Zawiera też bibliografię, bardzo szczegółową, z jednym tylko (charakterystycznym) wyjątkiem: bibliografia ta nie zawiera ani jednej pracy napisanej przez samego Saksa (choć prace jego napisane wspólnie z innymi są starannie i szczegółowo cytowane).

Teoria funkcji analitycznych, która również ukazała się w tłumaczeniach angielskim i francuskim, jest przede wszystkim podręcznikiem uniwersyteckim. Oryginalnością jej jest m. in. podejście do twierdzenia Cauchy'ego przez twierdzenie Rungego o aproksymowalności funkcji holomorficznych w zbiorze otwartym przez funkcje wymierne mające bieguny poza tym zbiorem. To podejście, którego twórcą był Saks, usuwa nieco kłopotliwe elementy topologiczne klasycznego dowodu.

Zbliżamy się do końca życia osobistego Saksa i tu natrafiamy na sprawy bolesne dla Polaka. Pod koniec lat trzydziestych wybitna rola Saksa w matematyce była tak znana zarówno w kraju, jak i za granicą, że było rzeczą naturalną powołanie go na wakujące stanowisko profesora

matematyki na Uniwersytecie Warszawskim, i taki wniosek został wysunięty (2). Niestety, istniejące wówczas w naszych warunkach prądy nacjonalistyczne i rasistowskie, które dotarły i do środowisk uniwersyteckich, uczyniły ten wniosek nierealnym i został on wycofany na życzenie samego Saksa. Również profesorowie matematyki Uniwersytetu Stefana Batorego wystąpili z wnioskiem o powołaniu go na katedrę w Wilnie (3). Zdawało się, że wniosek ten miał wszelkie szanse pomyślnego załatwienia. Tragedia września 1939 r. zamknęła i tę drogę.

Po wybuchu wojny Saks został zmobilizowany i wraz z wycofującym się wojskiem znalazł się w okolicach Lwowa. W latach 1940–1941 był zatrudniony na Uniwersytecie Lwowskim w katedrze kierowanej przez S. Banacha. W jakiś czas po zajęciu Lwowa przez Niemców wrócił do Warszawy. Zaaresztowany jesienią w 1942 r., zginął zamordowany przez Gestapo 23 listopada tegoż roku. Zostawił syna Marka i żonę Zofię z Korzeniowskich. Zostawił też po sobie pamięć nie tylko wybitnego uczonego, ale i wyjątkowo szlachetnego człowieka. Dla tych, którzy go znali bliżej, pozostanie on na zawsze pięknym wspomnieniem.

II

Przejdźmy teraz do omówienia głównych osiągnięć Saksa rozpoczynając od jego wyników w teorii różniczkowalności całek i funkcji.

Punkty przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej $\boldsymbol{R}^n$ oznaczać będziemy przez $x = (x_1, \ldots, x_n)$, a dla funkcji określonych w jakimś podzbiorze $E \subset \boldsymbol{R}^n$ używać będziemy znakowania $f(x_1, \ldots, x_n)$ lub $f(x)$. Rozważać będziemy głównie funkcje rzeczywiste mierzalne (w sensie Lebesgue'a), określone bądź w całej przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$, bądź też w jakimś przedziale

$$(Q_0) \qquad a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$$

(2) W posiadaniu Marka Saksa znajduje się list dziekana S. Mazurkiewicza do doc. S. Saksa komunikujący, że Rada Wydziału „na posiedzeniu dnia 21 stycznia 1936 r. uchwaliła powołać Pana Docenta na III Katedrę Matematyki, wakującą na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym U.J.P. po przeniesieniu p. prof. dra Kazimierza Żorawskiego w stan spoczynku z dniem 1 września 1935 r. Wobec powyższego proszę Pana Docenta o powiadomienie mnie, na piśmie, czy zgadza się Pan na objęcie tej katedry w charakterze profesora nadzwyczajnego." (*Przyp. red.*)

(3) Oto fragment listu datowanego 13. I. 1932, wysłanego przez tamtejszego dziekana do S. Saksa przebywającego wówczas w Cambridge (Massachussets): „Jest mi miło zakomunikować Szanownemu Panu, że na wniosek Komisji dla obsadzenia wakującej Katedry Matematyki na naszym Wydziale, Rada Wydziału na posiedzeniu w dniu 12 stycznia br. uchwaliła jednogłośnie powołać Pana Doktora na stanowisko profesora nadzwyczajnego matematyki na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Stefana Batorego w Wilnie od dnia 1 kwietnia br. Jakkolwiek prof. Zygmund oświadczył mi, że Szanowny Pan przychylnie odniesie się do naszej propozycji, to jednak dla załatwienia formalności ..." (*przyp. red.*)

tej przestrzeni. Gdy $b_j - a_j$ nie zależy od j, przedział Q nazywać będziemy kostką. Miarę zbioru E mierzalnego (w sensie Lebesgue'a) oznaczać będziemy przez $|E|$; dla miary zewnętrznej dowolnego (niekoniecznie mierzalnego) zbioru $E \subset \boldsymbol{R}^n$ używać będziemy znakowania $|E|_e$. Oczywiście

$$|Q_0| = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n).$$

Gdy zmienny przedział Q zawiera określony punkt x, a średnica Q zdąża do 0, to mówimy, że Q *ściąga się* do x i piszemy $Q \searrow x$. Gdy $Q \searrow x$ i stosunek boku największego do najmniejszego pozostaje ograniczony, będziemy mówić, że Q *ściąga się regularnie* do x i pisać: $Q \searrow x$(reg.)

W wielu dowodach teorii całki wystarczy rozważać przypadek $n = 2$, który jest typowy; rozciągnięcie dowodów na wypadek ogólnego n jest często zwykle formalnością.

Podstawowe twierdzenie Lebesgue'a mówi, że *gdy f jest funkcją całkowalną, to dla prawie każdego punktu x*

$$\lim_{Q \searrow x(\text{reg.})} \frac{1}{|Q|} \int_Q f = f(x). \tag{1}$$

Jednym z najciekawszych zagadnień teorii całki jest pytanie: kiedy w powyższym twierdzeniu warunek regularności w założeniu $Q \searrow x$ może być opuszczony (lub osłabiony)? Jednym z pierwszych wyników Saksa, podanym już w jego polskiej książce o całce, jest dowód, że ma to miejsce, gdy f jest funkcją ograniczoną; szczególnie ważny jest tu przypadek, gdy f jest funkcją charakterystyczną zbioru (otrzymujemy wtedy tzw. twierdzenie o *punktach gęstości* zbioru).

Oczywiście warunek ograniczoności funkcji f (który w naszym wypadku jest równoważny warunkowi lokalnej ograniczoności) jest bardzo restryktywny i obecnie mamy znacznie mocniejsze twierdzenie, ale wynik Saksa był historycznie pierwszym, w którym regularność przedziałów Q nie jest zakładana. Wynik ten był bardzo pochlebnie oceniony w pracy Fryderyka Riesza, jednej z czołowych postaci w historii całki Lebesgue'a (Fund. Math. 22, 1934). Saks pokazał również (niezależnie od niego zrobili to również Busemann i Feller), że bez założenia regularności przedziałów Q relacja (1) może być fałszywa wszędzie dla funkcji f, o której zakładamy wyłącznie całkowalność.

Ten negatywny wynik podał Saks również w innej, mocniejszej postaci, która zasługuje na uwagę, gdyż jest prototypem sformułowań innych podobnych twierdzeń. Wykazał on mianowicie, że *w przestrzeni L funkcji f całkowalnych na $\boldsymbol{R}^n$, mamy, pomijając zbiór funkcji pierwszej kategorii Baire'a, relację*

$$\limsup_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q f = +\infty$$

w każdym punkcie $x \in \boldsymbol{R}^n$.

Zagadnienie różniczkowalności całki Lebesgue'a jest obecnie w pewnym sensie rozwiązane. Wynik Jessena, Marcinkiewicza i autora niniejszego artykułu (Fund. Math. 25, 1936) mówi, że gdy całkowalna (czy też tylko lokalnie całkowalna) jest nie tylko funkcja f, lecz i funkcja

$$|f|(\log^+|f|)^{n-1}, \tag{2}$$

to równość (1) zachodzi dla prawie każdego punktu x (w szczególności mamy ją, gdy $f \in L^p$, $p > 1$); warunek lokalnej całkowalności funkcji (2) jest tu istotny. Saks otrzymał tu bardzo precyzyjny negatywny wynik udowadniając (p. [39]), że dla każdej funkcji $\sigma(t) \geqslant 0$ $(t > 0)$ takiej, że

$$\liminf_{t \to 0} \sigma(t)/t = 0,$$

istnieje funkcja całkowalna $f \geqslant 0$ taka, że funkcja

$$\sigma(f)\varepsilon(f)(\log^+ f)^{n-1}$$

jest całkowalna, a jednocześnie

$$\limsup_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q f = +\infty$$

w każdym punkcie x.

Różniczkowalność całki ma odpowiednik w różniczkowalności pola powierzchni. Rozważmy dla prostoty pole powierzchni S: $z = f(x, y)$, gdzie f jest funkcją ciągłą, określoną w prostokącie K: $a \leqslant x \leqslant a'$, $b \leqslant y \leqslant b'$. Stosując ogólnie przyjętą obecnie definicję, za pole powierzchni S uważamy granicę dolną pól wielościanów

$$z = p(x, y) \qquad (a \leqslant x \leqslant a',\ b \leqslant y \leqslant b'),$$

gdy $p(x, y)$ zdąża jednostajnie do $f(x, y)$. Podstawowy wynik zawdzięczamy tu Tonelliemu, który wykazał, że *pole S jest skończone wtedy i tylko wtedy, gdy f jest o wahaniu skończonym w sensie Tonelliego*; przez to rozumiemy, że wahanie (jordanowskie) funkcji f traktowanej przy ustalonym x wyłącznie jako funkcję zmiennej y, $b \leqslant y \leqslant b'$, jest funkcją całkowalną zmiennej x na odcinku $a \leqslant x \leqslant a'$ i analogicznie przy zmienionej roli x i y.

Jest rzeczą niemal oczywistą, że jeżeli $f(x, y)$ jest o wahaniu skończonym w sensie Tonelliego, to $\partial f/\partial x$ i $\partial f/\partial y$ istnieją prawie wszędzie. Wynik Saksa [13] głosi, że wtedy, ponadto, w prawie każdym punkcie $(x, y) \in K$ mamy

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{|S(Q)|}{|Q|} = \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2},$$

gdzie Q oznacza kwadrat zawierający punkt (x, y) i ściągający się do

tego punktu, $|Q|$ jest miarą Q, zaś $|S(Q)|$ jest miarą powierzchni S rozważanej wyłącznie na Q.

Klasyczny fakt, że krzywa prostowalna $y = f(x)$ ma styczną prawie wszędzie, nasuwa pytanie, czy powierzchnia $z = f(x, y)$ o skończonym polu musi mieć płaszczyznę styczną prawie wszędzie. Że tak nie musi być, pokazał Saks w pracy [34] konstruując w kwadracie jednostkowym funkcję ciągłą $z = f(x, y)$, która jest na każdym odcinku tego kwadratu absolutnie ciągła, ma tam wahanie absolutne < 1 (a więc pole tej powierzchni jest skończone), a jednak płaszczyzna styczna nie istnieje w żadnym punkcie.

Rozważmy funkcję rzeczywistą $f(x)$ zmiennej rzeczywistej określoną w pewnym otoczeniu punktu x_0. Liczby

$$\limsup_{h \to +0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \qquad \liminf_{h \to +0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

nazywamy odpowiednio górną i dolną *prawą pochodną Diniego* funkcji f w punkcie x i oznaczamy przez $D^+f(x_0)$, $D_+f(x_0)$. Zastępując tu warunek $h \to +0$ przez $h \to -0$ definiujemy odpowiednio górną i dolną *lewą pochodną Diniego*, $D^-f(x_0)$, $D_-f(x_0)$. Każdą liczbę pośrednią między tymi czterema pochodnymi nazywać będziemy *pośrednią pochodną Diniego*. Oczywiście f jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie cztery pochodne Diniego są tam skończone i sobie równe.

Teoria pochodnych Diniego jest bardzo obszerna i pierwsze głębokie wyniki zawdzięczamy tu Denjoy, który jednak ograniczał się do rozważania funkcji ciągłych. Wyniki Denjoy były uogólnione przez Pana i Panią Young na funkcje mierzalne, ale Saks w pewnym sensie zamknął tę teorię, rozciągając wyniki Denjoy (i innych) na wszystkie funkcje, mierzalne lub nie. Wyniki te idą w różnych kierunkach i zbyt trudne byłoby wyczerpujące ich tu przedstawienie. Wybierzemy kilka.

Niech E będzie dowolnym zbiorem punktów na osi rzeczywistej, a $f(x)$ funkcją określoną na E. Mówimy za Łuzinem, że f spełnia na E warunek N, jeżeli f przekształca każdy podzbiór E miary 0 na zbiór miary 0. Łuzin wykazał, że każda funkcja $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, która jest różniczkowalna na zbiorze E i ma tam pochodną równą zeru, musi z konieczności spełniać na E warunek N. Uogólniając ten wynik Saks [7] dowiódł, że konkluzja zachodzi, jeżeli założymy tylko, że w każdym punkcie zbioru E choć jedna z pochodnych Diniego funkcji f jest równa 0. Własność N jest ważnym pojęciem, choć dotychczas niezbyt dobrze rozumiemy jego rolę w analizie.

Saks [7] wykazał również, że jeżeli funkcja ciągła $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, jest prawie wszędzie różniczkowalna i ma pochodną f' całkowalną w sensie Lebesgue'a, czy tylko w sensie Denjoy–Perrona, to warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by f była całką swej pochodnej, jest

by f spełniała warunek N. Podał on też warunek konieczny i wystarczający podobnego typu na to, by funkcja mająca prawie wszędzie pochodną całkowalną w sensie Lebesgue'a była sama o wahaniu skończonym.

Pojęcie pochodnych Diniego można wprowadzić dla funkcji przedziału w przestrzeni n-wymiarowej. Weźmy, dla prostoty, $n = 2$ i niech $F(J)$ będzie funkcją addytywną prostokąta J. Jeżeli J zawiera punkt (x, y) i ściąga się do (x, y), to liczby

$$\limsup_{J \searrow (x,y)} F(J)/|J| \quad \text{oraz} \quad \liminf_{J \searrow (x,y)} F(J)/|J|$$

będziemy oznaczać odpowiednio przez $\overline{F}^*(x, y)$ i $\underline{F}^*(x, y)$ i nazywać *mocną górną* i *dolną pochodną funkcji* F w punkcie (x, y). Jeżeli obie liczby są równe, to ich wspólną wartość oznaczać będziemy przez $F^*(x, y)$ i nazywać *mocną pochodną* funkcji F w punkcie (x, y).

Jeżeli w powyższej definicji przez J rozumieć będziemy kwadrat zawierający punkt (x, y), to $F^*(x, y)$ — jeżeli istnieje — oznaczać będziemy przez $F'(x, y)$ i mówić, że F jest *różniczkowalna* w punkcie (x, y). Główny wynik Saksa [43] mówi, że *jeżeli* $F^*(x, y) > -\infty$ *w każdym punkcie zbioru* $E \subset \boldsymbol{R}^2$, *to funkcja* F *jest różniczkowalna i ma pochodną* F' *skończoną w prawie każdym punkcie zbioru* F. Wynik ten pozostaje prawdziwy dla każdego n.

Jeszcze jeden pokrewny wynik, który tym razem dotyczy nie funkcji, ale podzbiorów przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$. Ograniczymy się znów do przypadku $n = 2$.

Niech E będzie podzbiorem $\boldsymbol{R}^2$ i niech $a \in E$. Półprostą t wychodzącą z a nazywać będziemy *półsteczną pośrednią* (zbioru E w punkcie a), jeżeli istnieje ciąg punktów $a_n \in E$, różnych od a, zdążających do a i takich, że półprosta $\overrightarrow{aa_n}$ zdąża do t. Linię prostą przechodzącą przez a, utworzoną przez dwie półsteczne pośrednie do E w punkcie a nazywamy *styczną* do E w punkcie a.

Zbiór półstycznych pośrednich dla E w punkcie $a \in E$ nazywać będziemy *contingensem* zbioru E w punkcie a i oznaczać przez $\mathrm{contg}_E a$.

Saksowi [42] zawdzięczamy tu następujące twierdzenie:

(a) *Dla każdego zbioru* $E \subset \boldsymbol{R}^2$ *zbiór* A *tych punktów* $a \in E$, *gdzie* $\mathrm{contg}_E a$ *nie jest całą płaszczyzną, jest sumą przeliczalnej ilości łuków ciągłych i prostowalnych.*

(b) *W każdym punkcie zbioru* A, *pomijając jego podzbiór o długości* 0, *contingens* E *jest bądź półpłaszczyzną, bądź też prostą styczną do* E.

Łączy się z tym twierdzeniem następujący wynik [6] dotyczący stycznych do krzywych płaskich:

(c) *Dla krzywej płaskiej* C *zbiór stycznych do niej, wychodzących z jednego punktu, ma miarę dwuwymiarową zero, chyba że wierzchołek tego pęku stycznych jest na krzywej.*

Liczne są osiągnięcia Saksa w analizie funkcjonalnej (patrz poniższy artykuł), ale jedno jest specjalnie ważne i zasługuje na wyróżnienie, gdyż mało osób orientuje się w historii tego twierdzenia.

W połowie lat dwudziestych Banach i Steinhaus zgłosili do *Fundamentów* pracę *Sur le principe de condensation de singularités*. Dają oni tam twierdzenie „o zagęszczeniu osobliwości" w terminach analizy funkcjonalnej, dla ciągów operacji liniowych określonych w jakiejś przestrzeni Banacha. Sformułowanie ogólne i abstrakcyjne, otrzymane znaną metodą superpozycji „coraz to mocniejszych osobliwości". Samo twierdzenie brzmi: *Niech* $u_n(x)$ *będzie ciągiem ograniczonych liniowych operacji określonych w przestrzeni Banacha* E, *i niech* $\|u_n\|$ *będzie normą operacji* u_n. *Jeżeli* $\sup \|u_n(x)\|$ *jest skończone w każdym punkcie* x *zbioru* F *drugiej kategorii w* E (*w szczególności, jeżeli jest ono skończone w każdym punkcie* $x \in E$), *to ciąg* $\|u_n\|$ *jest ograniczony. Innymi słowy, istnieje taka stała* M, *że*

$$\|u_n(x)\| \leqslant M\|x\| \quad \text{dla } x \in E,\ n = 1, 2, \ldots$$

Redakcja *Fundamentów* przesłała pracę Saksowi jako recenzentowi. Saks znalazł zupełnie inny dowód, oparty na pojęciu kategorii Baire'a, dowód, który stał się klasycznym wzorem dla wielu innych rozumowań. Jest to może jeden z najpiękniejszych wyników Saksa, ale o jego tu roli mało kto wie, gdyż w pracy owej nie jest podkreślone, że mamy tu zupełnie nową metodę, nie wyjaśnione jest też, na czym polęga jej różnica w stosunku do pierwotnej metody Banacha i Steinhausa (4).

Omówimy teraz główny wynik Saksa w teorii funkcji podharmonicznych, dziedzinie, gdzie funkcje analityczne oraz funkcje ogólne zmiennej rzeczywistej ocierają się o siebie. Teoria ta zawsze interesowała Saksa, a dla czytelnika polskiego specjalnie ciekawy jest (jeszcze teraz) artykuł monograficzny Saksa [27], napisany po polsku, gdzie daje on szczegółowy, elementarny i wielce oryginalny opis tej teorii.

Ograniczając się dla prostoty do wypadku (typowego) funkcji rzeczywistej trzech zmiennych, mówimy że funkcja $u(P)$ jest *podharmoniczna* w obszarze G, jeżeli w każdym punkcie $P_0 \in G$ i dla każdej kuli o środku P_0 zawartej w G, liczba $u(P_0)$ nie przekracza średniej wartości u na powierzchni naszej kuli. Mamy tu więc do czynienia z uogólnieniem pojęcia funkcji wypukłej jednej zmiennej na przestrzeń wielowymiarową i stąd, częściowo, znaczenie tej teorii. Jeden z jej głównych wyników (który zawdzięczamy F. Rieszowi) mówi, że funkcja u jest podharmoniczna

(4) Banach i Steinhaus w przedmowie do swej pracy (Fund. Math. 9, 1927) stwierdzili, że „Saks czytając nasz rękopis zauważył, że dowody w § 2 mogą być znacznie uproszczone. Zrezygnowaliśmy więc z naszego własnego tekstu, zastępując go tekstem Saksa. W ten sposób uniknęliśmy pewnych dość żmudnych rachunków" (*przyp. red.*)

wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą funkcji harmonicznej oraz potencjału newtonowskiego masy dodatniej (p. [49]).

Opierając się na tym, Saks wykazał — i to jest jego główne osiągnięcie w tej teorii — że funkcje podharmoniczne mają prawie wszędzie to, co można by nazwać *uogólnionym laplasjanem*, a więc coś w rodzaju drugiej pochodnej (opuszczamy ścisłą definicję jako zbyt techniczną). Jest to ważny wynik, uogólniający osiągnięcia wybitnych matematyków pracujących w tej dziedzinie. Praca [49], która ten wynik zawiera, jest ostatnią pracą Saksa, jaka ukazała się w druku.

Oczywiście niniejszy artykuł jest bardzo niekompletnym przedstawieniem osiągnięć Saksa, daje jednak pewien obraz zagadnień, które interesowały Saksa, a później jego uczniów.

P. Wojtaszczyk (Warszawa)

O pracach S. Saksa z analizy funkcjonalnej

Z wyników S. Saksa z zakresu analizy funkcjonalnej żywy ciągle wpływ na współczesne badania wywierają: wspólna z Banachem praca [26] oraz cykl prac [35], [36], [46].

W pracy [26] autorzy pokazali, że *w przestrzeni* $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, *z każdego ciągu ograniczonego* f_n *można wybrać podciąg* f_{n_k} *limesowalny w normie metodą pierwszych średnich, tzn. taki, że dla pewnego* $f \in L_p(0,1)$

$$\lim \|m^{-1}(f_{n_1} + \ldots + f_{n_m}) - f\| = 0.$$

Powyższą własność nazywamy własnością Banacha–Saksa. Własność ta, łącząca w bardzo prosty sposób zbieżność słabą z normową, przyciągała uwagę wielu matematyków. S. Kakutani [F] udowodnił, że własność tę ma każda przestrzeń jednostajnie wypukła. Z ciekawszych i nowszych wyników na ten temat można wymienić podany przez A. Baernsteina II [A] pierwszy przykład przestrzeni refleksywnej nie mającej własności Banacha–Saksa oraz przykład J. Bourgaina [B] przestrzeni X z własnością Banacha–Saksa, lecz takiej, że $L_2(X)$ tej własności już nie ma.

Dużo większy wpływ wywarły jednak prace [35], [36], [46]. Uogólniając wcześniejsze wyniki H. Hahna [E] i O. Nikodyma [G] i [H], w pra-