wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą funkcji harmonicznej oraz potencjału newtonowskiego masy dodatniej (p. [49]).

Opierając się na tym, Saks wykazał — i to jest jego główne osiągnięcie w tej teorii — że funkcje podharmoniczne mają prawie wszędzie to, co można by nazwać *uogólnionym laplasjanem*, a więc coś w rodzaju drugiej pochodnej (opuszczamy ścisłą definicję jako zbyt techniczną). Jest to ważny wynik, uogólniający osiągnięcia wybitnych matematyków pracujących w tej dziedzinie. Praca [49], która ten wynik zawiera, jest ostatnią pracą Saksa, jaka ukazała się w druku.

Oczywiście niniejszy artykuł jest bardzo niekompletnym przedstawieniem osiągnięć Saksa, daje jednak pewien obraz zagadnień, które interesowały Saksa, a później jego uczniów.

P. Wojtaszczyk (Warszawa)

O pracach S. Saksa z analizy funkcjonalnej

Z wyników S. Saksa z zakresu analizy funkcjonalnej żywy ciągle wpływ na współczesne badania wywierają: wspólna z Banachem praca [26] oraz cykl prac [35], [36], [46].

W pracy [26] autorzy pokazali, że *w przestrzeni* $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, *z każdego ciągu ograniczonego* f_n *można wybrać podciąg* f_{n_k} *limesowalny w normie metodą pierwszych średnich, tzn. taki, że dla pewnego* $f \in L_p(0,1)$

$$\lim \|m^{-1}(f_{n_1} + \ldots + f_{n_m}) - f\| = 0.$$

Powyższą własność nazywamy własnością Banacha–Saksa. Własność ta, łącząca w bardzo prosty sposób zbieżność słabą z normową, przyciągała uwagę wielu matematyków. S. Kakutani [F] udowodnił, że własność tę ma każda przestrzeń jednostajnie wypukła. Z ciekawszych i nowszych wyników na ten temat można wymienić podany przez A. Baernsteina II [A] pierwszy przykład przestrzeni refleksywnej nie mającej własności Banacha–Saksa oraz przykład J. Bourgaina [B] przestrzeni X z własnością Banacha–Saksa, lecz takiej, że $L_2(X)$ tej własności już nie ma.

Dużo większy wpływ wywarły jednak prace [35], [36], [46]. Uogólniając wcześniejsze wyniki H. Hahna [E] i O. Nikodyma [G] i [H], w pra-

cy [36] Saks pokazał następujący fakt (wyrażony w nieco uwspółcześnionej terminologii):

Niech F_n będzie ciągiem przeliczalnie-addytywnych funkcji zbioru (o wartościach w $\mathbf{R}$), bezwzględnie ciągłych względem pewnej miary μ na zbiorze E. Wówczas

(a) *jeżeli dla każdego zbioru mierzalnego $X \subset E$ ciąg liczbowy $F_n(X)$ zbiega do granicy $F(X)$, to funkcja zbioru $F(X)$ jest też bezwzględnie ciągła względem μ;*

(b) *jeżeli dla każdego zbioru mierzalnego $X \subset E$*

$$\limsup |F_n(X)| < \infty,$$

to istnieje stała M taka, że $|F_n(X)| \leqslant M$ dla każdego $X \subset E$ i $n = 1, 2, \ldots$

Twierdzenie to, zwane obecnie twierdzeniem Vitaliego–Hahna–Saksa, jest podstawowym narzędziem w badaniach klasycznych przestrzeni Banacha $L_1(\mu)$ i $C(K)$, a jego uogólnienie na przypadek miar wektorowych odgrywa zasadniczą rolę w badaniu tych miar (por. [D]).

Jednakże główna rola, jaką odegrały prace [35], [36], [46], nie polegała na uzyskanych wynikach, lecz na metodzie dowodowej: Saks pierwszy zastosował w tym kontekście metodę kategorii Baire'a używając jej dla przestrzeni zbiorów mierzalnych z pseudometryką określoną jako miara różnicy symetrycznej. Metoda ta stała się od tej chwili standardowa.

Metoda Saksa stała się punktem wyjścia nowego wątku badań w analizie funkcjonalnej. Saks rozpatrywał przestrzeń $L_1(\mu)$. Dla każdego zbioru mierzalnego $X \subset E$ rozpatrywał funkcjonał $\chi_X(f) = \int_X f d\mu$, który w naturalny sposób można utożsamiać z χ_X, funkcją charakterystyczną zbioru X. Można więc powiedzieć, że Saks rozpatrywał podzbiór $L_\infty(\mu)$ złożony z funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych, jednakże metryka na tym podzbiorze nie była metryką indukowaną z $L_\infty(\mu)$, lecz metryką z $L_1(\mu)$ (zauważmy, że miara różnicy symetrycznej zbiorów X_1 i X_2 to $\int_E (|\chi_{X_1} - \chi_{X_2}| d\mu)$).

Zostało to zauważone i następująco sformalizowane przez W. Orlicza ([I], str. 240): Niech X będzie przestrzenią unormowaną z normą $\|\cdot\|$ i niech $\|\cdot\|^*$ będzie inną normą określoną na X. W zbiorze R elementów $x \in X$ spełniających nierówność $\|x\| \leqslant 1$ określamy odległość między elementami $x, y \in R$ formułą $d(x, y) = \|x - y\|^*$. Jeżeli ta przestrzeń metryczna jest zupełna, to jest ona nazywana *przestrzenią Saksa*.

Definicja ta była modyfikowana i uogólniana przez różnych autorów, zawsze jednak chodziło o dwie normy, dwie topologie itp. Czytelnika zainteresowanego tą problematyką odsyłamy do monografii [C].

Analizy funkcjonalnej dotyczą również prace [24] i [47], mające obecnie wyłącznie historyczną wartość. Z kronikarskiego obowiązku odnotujmy ich treść. W pracy [24] autor pokazuje, że operator liniowy

i ciągły $U\colon l_p \to l_p$ jest surjekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $U(l_p)$ jest drugiej kategorii, a także wtedy i tylko wtedy, gdy U^* jest izomorficznym włożeniem (jest to szczególny przypadek ogólnych twierdzeń Banacha). Praca [47] zawiera inny dowód znanego już wówczas faktu, że każdy funkcjonał liniowy i ciągły na $C(K)$, K metryczne i zwarte, może być przedstawiony jako całka względem pewnej miary na K.

Prace cytowane

[A] A. Baernstein II, *On reflexivity and summability*, Studia Math. 42 (1972), str. 91–94.

[B] J. Bourgain, *On the Banach–Saks property in Lebesgue spaces*, Vrije Universiteit, Brussel, preprint, 1979.

[C] J. B. Cooper, *Saks spaces and applications to functional analysis*, North Holland, Amsterdam 1978.

[D] J. Diestel and J. J. Uhl, *Vector Measures*, AMS Mathematical Surveys 15, Providence 1977.

[E] H. Hahn, *Über Folgen linearer Operationen*, Monatshefte für Mathematik und Physik 32 (1922), str 1–88.

[F] S. Kakutani, *Weak convergence in uniformly convex spaces*, Tohoku Math. J. 45 (1938), str. 188–193.

[G] O. Nikodym, *Sur les familles bornées de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait*, Monatshefte für Mathematik und Physik 40 (1933), str. 418–26.

[H] —, *Sur les suites convergentes de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait*, ibidem 40 (1933), str. 427–32.

[I] W. Orlicz, *Linear operations in Saks spaces* (I), Studia Math. 11 (1950), str. 237–272.

Bibliografia Stanisława Saksa *

A. Książki

[I_1] *Zarys teorii całki*, Warszawa 1930.

[I_2] *Théorie de l'intégrale*, Monografie Matematyczne t. 2, Warszawa 1933.

[I_3] *Theory of the integral*, Monografie Matematyczne t. 7, Warszawa 1937.

[I_4] (z A. Zygmundem) *Funkcje analityczne*, Monografie Matematyczne t. 10, Warszawa 1939 (oraz późniejsze wydania polskie, francuskie i angielskie).

B. Artykuły

[1] *Sur l'équivalence de deux théorèmes de la Théorie des ensembles*, Fund. Math. 2 (1921), str. 1–3.

[2] (z A. Rajchmanem) *Sur la dérivabilité des fonctions monotones*, ibidem 4 (1923), str. 204–213.

* Bibliografię opracował P. Wojtaszczyk. Warto zwrócić uwagę, że pracy [38] nie ma w spisie prac A. Zygmunda opublikowanym w Wiadom. Mat. 19 (1976), str. 119–125 (*przyp. red.*).