wmptm 1897

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego



Roman Sikorski.

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXIV (1982)

HELENA RASIOWA (Warszawa)

Prace Romana Sikorskiego z logiki matematycznej*

Roman Sikorski jest autorem lub współautorem 20 prac (w tym jednej książki) z dziedziny logiki matematycznej ([1]), opublikowanych w latach 1950–1970. Prawie wszystkie poświęcone są metodom mnogościowym, topologicznym i algebraicznym w metamatematyce i wiążą się z teorią algebr Boole'a oraz ogólniej — z teorią krat i algebrą uniwersalną.

Poszukiwanie związków między logiką a algebrą, zainicjowane już w pracach Boole'a i kontynuowane przez Peirce'a, Schrödera i innych logików, doprowadziło do pojęcia algebry Boole'a. Różne poglądy filozoficzne na podstawy matematyki, które zrodziły się w wyniku odkrycia antynomii semantycznych i teoriomnogościowych, stały się przyczyną krytyki logiki klasycznej i źródłem powstania różnych logik nieklasycznych (intuicjonistycznej, modalnych, wielowartościowych Łukasiewicza i Posta, minimalnej, pozytywnej). Obecnie znanych jest wiele logik skonstruowanych z inspiracji filozoficznych lub praktycznych. Logiki nieklasyczne znajdują różne zastosowania, np. w informatyce.

Logiki stworzone w pierwszym okresie badane były intensywnie w latach 1920–1940 za pomocą metod algebraicznych, szczególnie w polskiej szkole logicznej (J. Łukasiewicz, A. Lindenbaum, A. Tarski i inni). Badania te dotyczyły najprostszych systemów logicznych, a mianowicie rachunków zdań. Ważnym narzędziem, a jednocześnie pomostem między systemami logicznymi a metamatematyką tych systemów, była metoda interpretacji formuł jako wielomianów odpowiednich algebr oraz metoda wprowadzona przez Lindenbauma i Tarskiego traktowania zbioru formuł lub zbioru klas równoważności formuł jako algebry abstrakcyjnej. Algebry

* W związku z nadaniem profesorowi Romanowi Sikorskiemu tytułu członka honorowego PTM (por. Wiadom. Mat. 22 (1980), str. 328), Redakcja zwróciła się do kilku osób z prośbą o napisanie artykułów dotyczących jego działalności naukowej. Publikujemy otrzymane materiały, dołączając do nich karykatury L. Jeśmanowicza (*przyp. red.*).

([1]) Pozycje [26], [56], [63], [76], [83], [84], [86], [88], [98], i [21], [27], [34], [36], [40], [47], [52], [57], [64], [71], [91], [107], [112], [116].

klas równoważności formuł nazwane są obecnie algebrami Lindenbauma–Tarskiego.

Wyżej wymienione metody pozwoliły między innymi ustalić związki między teoriami zerowego rzędu logiki klasycznej, tj. opartymi na klasycznym rachunku zdań, a teorią algebr Boole'a. Prace Stone'a (1937) i Tarskiego (1938) oraz późniejsze Mc Kinsey'a i Tarskiego (1946, 1949) ustaliły podobne związki między rachunkami zdań logiki intuicjonistycznej a kratami pseudokomplementatywnymi oraz między rachunkami zdań pewnych logik modalnych (w szczególności logiki $S4$ Lewisa) a topologicznymi algebrami Boole'a, zwanymi także algebrami domknięć. Przykładami krat pseudokomplementatywnych są pseudociała zbiorów, tj. algebry wszystkich podzbiorów otwartych dowolnej przestrzeni topologicznej $\mathscr{X}$ z operacjami teoriomnogościowymi sumy i iloczynu oraz operacjami $\Rightarrow$, $\neg$, zdefiniowanymi równościami

$$Y \Rightarrow Z = \mathrm{Int}\,((\mathscr{X} - Y) \cup Z), \qquad \neg\, Y = \mathrm{Int}\,(\mathscr{X} - Y),$$

oraz podalgebry takich algebr. Powyższe przykłady wyczerpują wszystkie kraty pseudokomplementatywne z dokładnością do izomorfizmu. Topologiczne algebry Boole'a reprezentowalne są przez topologiczne ciała zbiorów, czyli ciała podzbiorów dowolnej przestrzeni topologicznej zamknięte ze względu na operację wnętrza Int. Operacja wnętrza interpretuje funktor modalny „koniecznie", a operacja domknięcia — funktor modalny „możliwie".

Następujące twierdzenie formułuje wyżej wspomniane związki między rachunkiem zdań S_χ logiki intuicjonistycznej a kratami pseudokomplementatywnymi. Dla każdej formuły α następujące warunki są równoważne: (i) α jest twierdzeniem w S_χ, (ii) α interpretowane jako wielomian $\alpha_{\mathfrak{A}}$ dowolnej kraty pseudokomplementatywnej $\mathfrak{A}$ jest tożsamościowo równe elementowi największemu $\vee$ (tzn. $\alpha_{\mathfrak{A}} = \vee$), (iii) α traktowane jako wielomian $\alpha_{G(\mathscr{X})}$ dowolnego pseudociała $G(\mathscr{X})$ podzbiorów otwartych dowolnej przestrzeni topologicznej $\mathscr{X}$ jest tożsamościowo równe całej przestrzeni $\mathscr{X}$, (iv) $\alpha_{G(\mathscr{X})} = \mathscr{X}$ tożsamościowo w pseudociele $G(\mathscr{X})$ wszystkich podzbiorów otwartych ustalonej normalnej, w sobie gęstej przestrzeni topologicznej $\mathscr{X}$ (np. prostej euklidesowej).

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla rachunku zdań S_λ logiki modalnej $S4$ oraz topologicznych algebr Boole'a (Mc Kinsey, Tarski).

Jednym z wyników pracy [34] było algebraiczne scharakteryzowanie systemów S_μ rachunków zdań logiki minimalnej przez klasę μ-algebr. Ich przykładami są algebry $(G(\mathscr{X}), \cup, \cap, \Rightarrow, \neg)$ wszystkich podzbiorów otwartych dowolnej przestrzeni topologicznej $\mathscr{X}$ z teoriomnogościowymi operacjami $\cup$, $\cap$, $\Rightarrow$ zdefiniowanymi tak jak w pseudociałach i operacją $\neg$ zdefiniowaną równością $\neg Y = Y \Rightarrow \neg\, \mathscr{X}$, gdzie $\neg\, \mathscr{X}$ jest dowolnym ustalonym zbiorem w $G(\mathscr{X})$. Te algebry i ich podalgebry

wyczerpują wszystkie μ-algebry z dokładnością do izomorfizmu. W tej samej pracy również scharakteryzowano algebraicznie systemy S_n rachunku zdań logiki pozytywnej przez klasę wszystkich krat relatywnie pseudokomplementatywnych. Wszystkimi przykładami tych krat z dokładnością do izomorfizmu są algebry wszystkich podzbiorów otwartych oraz wszystkich otwartych i gęstych podzbiorów dowolnej przestrzeni topologicznej $\mathfrak{X}$ z operacjami $\cup$, $\cap$, $\Rightarrow$ zdefiniowanymi tak jak w pseudociałach.

Głównym nurtem badawczym prac omawianych w tym artykule jest uogólnienie metod algebraicznych, teoriomnogościowych i topologicznych stosowanych w badaniach rachunków zdań na bogatsze systemy logiczne, a mianowicie rachunki predykatów pierwszego rzędu i teorie elementarne. Uogólnienie to dotyczy pewnej klasy logik zawierającej — między innymi — logikę klasyczną, intuicjonistyczną, pewne logiki modalne, w szczególności $S4$ Lewisa, logikę minimalną i pozytywną.

Poszukując metod dowodzenia niewyprowadzalności formuł w intuicjonistycznym rachunku predykatów A. Mostowski (1948) zaproponował interpretację algebraiczną takich formuł w zupełnych kratach pseudokomplementatywnych. Predykaty (symbole relacji) interpretowane są jako funkcje o odpowiedniej ilości argumentów z ustalonego uniwersum $U \neq \emptyset$ w ustaloną, zupełną kratę pseudokomplementatywną $\mathfrak{A}$, spójniki zdaniotwórcze jako odpowiednie operacje w $\mathfrak{A}$, a kwantyfikatory ogólne i egzystencjalne odpowiednio jako kresy dolne i górne w $\mathfrak{A}$.

Interpretację formuł zaproponowaną przez Mostowskiego można łatwo uogólnić na formuły rachunków predykatów takich logik, których rachunki zdań scharakteryzowane są algebraicznie przez klasy krat z pewnymi dodatkowymi operacjami. Dotyczy to w szczególności logik klasycznej, modalnej $S4$, minimalnej i pozytywnej.

W pracy [21] podany został pierwszy algebraiczny dowód twierdzenia Gödla o pełności rachunku predykatów logiki klasycznej, wykorzystujący odpowiednią algebraiczną interpretację formuł oraz topologiczne własności algebr Boole'a. Dowód opierał się na uzyskanym w tej pracy wyniku z teorii algebr Boole'a, znanym później w literaturze pod nazwą lematu Rasiowej–Sikorskiego. Głosi on, iż *dla każdej algebry Boole'a* $\mathfrak{A}$, *jeśli* c *jest jej elementem różnym od elementu największego* $\vee$ i Q *jest co najwyżej przeliczalnym zbiorem kresów górnych i dolnych w* $\mathfrak{A}$, *to istnieje w* $\mathfrak{A}$ *filtr pierwszy* V, *taki że* $c \notin V$ *i* V *zachowuje wszystkie kresy należące do* Q. Znaczy to, iż w algebrze ilorazowej $\mathfrak{A}/V$, $|c| = \wedge$ i warunek: $a = \sup_{t \in T} a_t$, $b = \inf_{v \in V} b_v$ należą do Q, implikuje że

$$|a| = \sup_{t \in T} |a_t| \quad \text{oraz} \quad |b| = \inf_{v \in V} |b_v| \quad \text{w } \mathfrak{A}/V.$$

Dla dowodu lematu pokazano, iż zbiór wszystkich filtrów pierwszych algebry Boole'a $\mathfrak{A}$, które zachowują przeliczalny zbiór ustalonych kre-

sów dolnych i górnych tej algebry, jest gęsty w przestrzeni topologicznej Stone'a wszystkich filtrów pierwszych w $\mathfrak{A}$. Powyższa własność jest wnioskiem z twierdzenia Baire'a o zbiorach pierwszej kategorii. Omawiany lemat znalazł liczne zastosowania. Na szczególną uwagę zasługuje fakt, iż Dana Scott — znakomity logik amerykański — otrzymał nowy dowód niezależności hipotezy continuum (słynnego wyniku w podstawach teorii mnogości uzyskanego przez Cohena) stosując w nim powyższy lemat.

Praca [27] przyniosła nowy dowód twierdzenia Löwenheima–Skolema–Gödla. W pracach [57] oraz [86] zbadane zostały warunki reprezentowalności w ciałach zbiorów algebr Lindenbauma–Tarskiego dla klasycznych nieprzeliczalnych teorii pierwszego rzędu oraz ustalone zostały związki między reprezentowalnością a istnieniem uogólnionych modeli odpowiednich mocy. Wyżej wspomniane algebry Lindenbauma–Tarskiego są algebrami Boole'a, w których istnieją kresy wyznaczone przez kwantyfikatory. Przy reprezentowalności tych algebr w ciałach zbiorów wymaga się, aby kresy dolne i górne wyznaczone przez kwantyfikatory przechodziły odpowiednio na iloczyny i sumy teoriomnogościowe.

W pracach [76] i [84] Sikorski przyporządkował każdej sformalizowanej teorii matematycznej (opartej na logice klasycznej) pewną przestrzeń topologiczną. Wykorzystał przy tym pewne własności topologiczne algebry Lindenbauma–Tarskiego danej teorii. Głównym wynikiem tych prac jest twierdzenie, iż przestrzeń topologiczna przyporządkowana danej teorii jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy teoria jest otwarta, tzn. gdy może być zaksjomatyzowana za pomocą formuł nie zawierających kwantyfikatorów. Wykorzystując ten wynik Sikorski [56] podał nowy topologiczny dowód twierdzenia Herbranda o teoriach otwartych, wyjaśniający sens mnogościowy tego twierdzenia.

W cyklu prac [34], [36], [40], [52], [64] metody algebraiczne, topologiczne i mnogościowe zastosowane zostały do badań dotyczących pewnej klasy logik nieklasycznych, obejmującej logiki: pozytywną, minimalną, intuicjonistyczną i modalną $S4$. Wprowadzono dla rachunków predykatów tych logik algebraiczne pojęcie spełniania w ustalonym uniwersum oraz w odpowiednich algebrach zbiorów i przy zastosowaniu lematu Rasiowej–Sikorskiego udowodniono twierdzenia o pełności analogiczne do twierdzenia Gödla dla logiki klasycznej. Metodami algebraicznymi i topologicznymi uzyskano w pracach [40], [52] twierdzenia o formułach egzystencjalnych dla powyższych logik. Głoszą one, iż formuła postaci $\alpha \vee \beta$ jest twierdzeniem rachunku predykatów logiki intuicjonistycznej (minimalnej, pozytywnej) wtedy i tylko wtedy, gdy α jest twierdzeniem lub β jest twierdzeniem. W przypadku logiki $S4$ formuła $\Box\alpha \vee \Box\beta$ (gdzie $\Box$ jest funktorem zdaniotwórczym „koniecznie") jest twierdzeniem wtedy i tylko wtedy, gdy α jest twierdzeniem lub β jest twierdzeniem. Ponadto twierdzenia te mówią, iż formuła $\bigvee_x \alpha(x)$ jest twierdze-

niem logiki intuicjonistycznej (minimalnej, pozytywnej) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje term τ w języku rozważanego rachunku predykatów tej logiki taki, że formuła $\alpha(\tau)$ jest twierdzeniem. W przypadku rachunku predykatów logiki modalnej $S4$ formuła $\bigvee_x \Box\alpha(x)$ jest twierdzeniem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje term τ taki, że formuła $\alpha(\tau)$ jest twierdzeniem.

Dla logiki intuicjonistycznej Sikorski udowodnił ([63], zob. również [64]) twierdzenie o pełności ze względu na interpretacje w pseudociałach podzbiorów otwartych przestrzeni topologicznej $\mathscr{X}_0$ będącej pewnym zbiorem liczb niewymiernych. W dwa lata później Dyson i Kreisel (1961) udowodnili analogiczne twierdzenie o pełności ze względu na interpretacje w pseudociałach podzbiorów otwartych przestrzeni topologicznych będących podzbiorami domkniętymi discontinuum Cantora.

Wyżej wymienione oraz inne wyniki stały się punktem wyjścia książki *The mathematics of metamathematics* [91] przedstawiającej nowe, jednolite ujęcie dużego fragmentu logiki matematycznej. Wyróżnia się ono silną matematyzacją aparatu używanego w metamatematyce, stosowaniem algebry uniwersalnej, teorii krat, teorii zbiorów i topologii oraz tendencją przedstawiania twierdzeń metamatematycznych jako konsekwencji pewnych twierdzeń matematycznych. Książka doczekała się trzech wydań w języku angielskim (1963, 1968, 1970) oraz przekładu na język rosyjski wydanego w Moskwie (1972).

Tadeusz Traczyk (Warszawa)

Prace Romana Sikorskiego z teorii algebr Boole'a

Topologiczno-mnogościowe wykształcenie i podobny — jak mniemam — sposób myślenia matematycznego prof. Sikorskiego wycisnęły swoje piętno na jego wczesnych pracach z teorii algebr Boole'a [4], [5], [10], [12], [15], [25], [30], [39]. Ogólnie mówiąc, chodzi w tych pracach o zbadanie, z jakich pojęć i twierdzeń topologicznych da się wyeliminować pojęcie punktu przez zastąpienie zbioru elementem algebry Boole'a. Z tego punktu widzenia Autor bada takie pojęcia, jak domknięcie, ciągłość, zbieżność, mierzalność ($\mathscr{B}$) i inne.