niem logiki intuicjonistycznej (minimalnej, pozytywnej) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje term τ w języku rozważanego rachunku predykatów tej logiki taki, że formuła $\alpha(\tau)$ jest twierdzeniem. W przypadku rachunku predykatów logiki modalnej $S4$ formuła $\bigvee_x \Box\alpha(x)$ jest twierdzeniem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje term τ taki, że formuła $\alpha(\tau)$ jest twierdzeniem.

Dla logiki intuicjonistycznej Sikorski udowodnił ([63], zob. również [64]) twierdzenie o pełności ze względu na interpretacje w pseudociałach podzbiorów otwartych przestrzeni topologicznej $\mathscr{X}_0$ będącej pewnym zbiorem liczb niewymiernych. W dwa lata później Dyson i Kreisel (1961) udowodnili analogiczne twierdzenie o pełności ze względu na interpretacje w pseudociałach podzbiorów otwartych przestrzeni topologicznych będących podzbiorami domkniętymi discontinuum Cantora.

Wyżej wymienione oraz inne wyniki stały się punktem wyjścia książki *The mathematics of metamathematics* [91] przedstawiającej nowe, jednolite ujęcie dużego fragmentu logiki matematycznej. Wyróżnia się ono silną matematyzacją aparatu używanego w metamatematyce, stosowaniem algebry uniwersalnej, teorii krat, teorii zbiorów i topologii oraz tendencją przedstawiania twierdzeń metamatematycznych jako konsekwencji pewnych twierdzeń matematycznych. Książka doczekała się trzech wydań w języku angielskim (1963, 1968, 1970) oraz przekładu na język rosyjski wydanego w Moskwie (1972).

Tadeusz Traczyk (Warszawa)

Prace Romana Sikorskiego z teorii algebr Boole'a

Topologiczno-mnogościowe wykształcenie i podobny — jak mniemam — sposób myślenia matematycznego prof. Sikorskiego wycisnęły swoje piętno na jego wczesnych pracach z teorii algebr Boole'a [4], [5], [10], [12], [15], [25], [30], [39]. Ogólnie mówiąc, chodzi w tych pracach o zbadanie, z jakich pojęć i twierdzeń topologicznych da się wyeliminować pojęcie punktu przez zastąpienie zbioru elementem algebry Boole'a. Z tego punktu widzenia Autor bada takie pojęcia, jak domknięcie, ciągłość, zbieżność, mierzalność ($\mathscr{B}$) i inne.

Główną pracą w tej grupie jest *Closure algebras* [12]. Przedmiotem jej badań jest *algebra domknięć*, tzn. przeliczalnie addytywna algebra Boole'a (zwana dalej σ-algebrą) z dodatkową operacją domknięcia spełniającą 4 aksjomaty Kuratowskiego. Odpowiednikiem przestrzeni ośrodkowej metryzowalnej jest tu algebra domknięć z przeliczalną bazą ele-



mentów otwartych, nazwana przez Autora *C-algebrą*. Każda C-algebra jest słabo homeomorficzna z C-algebrą powstałą z przestrzeni metrycznej ośrodkowej przez podzielenie ciała wszystkich jej podzbiorów przez pewien σ-ideał; algebry domknięć nazywają się *słabo homeomorficzne*, gdy podalgebry ich borelowskich elementów są izomorficzne oraz ich izomorfizm h spełnia warunek $h(\bar{a}) = \overline{h(a)}$. Algebry domknięć znalazły ciekawe zastosowanie w logice nieklasycznej, o czym wspomina poprzedni artykuł H. Rasiowej.

Równolegle — niejako na marginesie tego topologicznego nurtu badań — w latach czterdziestych powstało kilka niezwykle interesujących prac Sikorskiego poświęconych algebraicznym własnościom algebr Boole'a. Mam tu na myśli pozycje [6], [9], [10], [17], [20].

Twierdzenie zwane *twierdzeniem Loomisa–Sikorskiego* zostało odkryte niezależnie przez Loomisa i Sikorskiego mniej więcej w tym samym czasie,

około 1948 r., patrz [6]. Mówi ono, że każda *σ-algebra Boole'a jest σ-reprezentowalna*, tzn. — z dokładnością do izomorfizmu — ma postać algebry ilorazowej $\boldsymbol{F}/\Delta$, gdzie $\boldsymbol{F}$ jest σ-ciałem zbiorów i Δ jest σ-ideałem. Twierdzenie to jest znakomitym uzupełnieniem słynnego twierdzenia Stone'a o reprezentacji algebr Boole'a, mówi bowiem także, jakie są topologiczne charakteryzacje σ-ciała $\boldsymbol{F}$ i σ-ideału Δ ($\boldsymbol{F}$ jest σ-ciałem generowanym przez zbiory otwarto-domknięte w przestrzeni Stone'a, Δ jest ideałem zbiorów pierwszej kategorii należących do $\boldsymbol{F}$).

Twierdzenie to nie daje się uogólnić na m-algebry dla $\mathfrak{m} > \aleph_0$. W rok później Sikorski [13] podaje natomiast proste warunki konieczne i dostateczne na to, aby m-algebra Boole'a była m-reprezentowalna. Dla $\mathfrak{m} > \aleph_0$ istnieją algebry Boole'a, które tych warunków nie spełniają.

Wydaje się, że prof. Sikorski pierwszy zwrócił uwagę na wyjątkową rolę σ-algebr w teorii algebr Boole'a oraz na ich specyficzne własności, często różne od własności m-algebr Boole'a dla $\mathfrak{m} > \aleph_0$. Ujawniło się to nie tylko w teorii algebr domknięć i w teorii m-reprezentowalności, ale także w kilku innych fragmentach teorii algebr Boole'a.

Z badaniami Profesora w teorii reprezentacji algebr Boole'a jest blisko związany słynny „Lemat Rasiowej i Sikorskiego" zamieszczony w pracy [21] wspólnej z H. Rasiową. Mówi on, że w dowolnej algebrze Boole'a istnieje filtr pierwszy zawierający z góry zadany różny od zera element algebry i zachowujący z góry zadaną przeliczalną rodzinę sum i iloczynów w tej algebrze. Lemat ten znalazł interesujące zastosowania w logice (por. artykuł H. Rasiowej, str. 161–165) i w teorii mnogości. Jest blisko związany z metodą forcingu i aksjomatem Martina (zob. T. Jech, *Set theory*, lematy 17.5 i 23.2).

Często twierdzeniem Sikorskiego jest także nazywane inne twierdzenie o podstawowym znaczeniu, [9]. Jego treść najjaśniej i najkrócej oddaje język teorii kategorii: *obiektami iniektywnymi w kategorii algebr Boole'a są algebry zupełne* (tzn. m-addytywne dla każdej liczby kardynalnej m). Oto dwa ważne wnioski z tego twierdzenia. Algebra zupełna $\boldsymbol{B}$ jest minimalnym rozszerzeniem (*completion*) algebry $\boldsymbol{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera gęstą podalgebrę $\boldsymbol{B}_0$ izomorficzną z $\boldsymbol{A}$. Minimalne rozszerzenie algebry $\boldsymbol{A}$ jest zupełnym ciałem zbiorów wtedy i tylko wtedy, gdy algebra $\boldsymbol{A}$ jest atomowa. Analogiczne twierdzenia o minimalnych σ-rozszerzeniach i ogólnie o minimalnych m-rozszerzeniach zostały sformułowane później ([20], [90]) i zastosowane w teorii σ-produktów i m-produktów boole'owskich.

Następną dziedziną badań prof. Sikorskiego o podstawowym znaczeniu są *produkty wolne* algebr Boole'a oraz *σ-produkty* i *m-produkty* ([17], [20], [31]). Wprowadzona w pracy [20] definicja produktu wolnego rodziny $(\boldsymbol{B}_t)_{t\in T}$ w klasie wszystkich algebr Boole'a okazała się równoważna z definicją koproduktu w kategorii algebr Boole'a. Jest więc tyko

jeden taki produkt (z dokładnością do izomorfizmu). Natomiast $\mathfrak{m}$-produkty rodziny $(\boldsymbol{B}_t)_{t\in T}$ $\mathfrak{m}$-algebr Boole'a dla $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ nie mają już tej własności. Istnieją nieizomorficzne $\mathfrak{m}$-produkty. Tworzą zbiór częściowo uporządkowany w naturalny sposób. Szczególnie interesujące są jego elementy maksymalne i minimalne. Np. minimalny σ-produkt σ-ciał zbiorów jest izomorficzny ze znanym z teorii miary produktem σ-ciał. Maksymalny σ-produkt ma natomiast bardzo użyteczną i elegancką własność wspólnego rozszerzania σ-homomorfizmów. Dlatego jest też nazywany *σ-produktem wolnym*.

Ponieważ minimalne σ-rozszerzenie produktu wolnego w klasie wszystkich algebr Boole'a (tzn. koproduktu) rodziny $(\boldsymbol{B}_t)_{t\in T}$ jest izomorficzne z minimalnym σ-produktem tej rodziny, nasuwa się przypuszczenie, że minimalny σ-produkt jest najmniejszym elementem w klasie wszystkich σ-produktów tej rodziny. Tak jest w przypadku, gdy $\boldsymbol{B}_t$ jest σ-ciałem zbiorów (ogólniej σ-dystrybutywną σ-algebrą Boole'a) dla każdego $t \in T$. Dotychczas nie wiadomo jednak, czy to przypuszczenie jest prawdziwe ogólnie.

Minimalny σ-produkt nie jest izomorficzny z maksymalnym σ-produktem nawet w przypadku rodziny $(\boldsymbol{B}_t)_{t\in T}$ złożonej z dwóch σ-ciał zbiorów.

Te niezwykle ważne wyniki zawarte są w pracy [20]. Zostały one potem uogólnione na $\mathfrak{m}$-produkty dla $\mathfrak{m} > \aleph_0$ w pracy [90].

Na odrębne omówienie zasługuje napisana przez prof. Sikorskiego w języku angielskim monografia *Boolean algebras* [69], której pierwsze wydanie ukazało się nakładem Springer-Verlag w 1958 roku, a drugie uaktualnione [99] w 1964. Była to pierwsza książka w literaturze światowej zawierająca doskonale uporządkowane, monograficzne opracowanie aktualnej, świetnie wyselekcjonowanej, wiedzy o algebrach Boole'a. Selekcja była bardzo surowa, ale dokonana z niezwykłym wyczuciem hierarchii ważności wyników. Choć wykorzystano ponad 500 pozycji bibliograficznych, nie weszły do niej prace słabe, ani takie także prace z pogranicza teorii algebr Boole'a i innych teorii oraz te prace o znaczeniu stosowanym, które nie wnosiły wiele do samej teorii. Bezlitośnie Profesor obszedł się np. z własnymi pracami o algebrach domknięć, poświęcił im 2 stronice w Dodatku, omawiając nie wyniki, a jedynie ich zastosowania w logice intuicjonistycznej i modelowej, gdzie odgrywają one ważną rolę (zob. [91]).

Monografia ta zawiera też wiele nigdzie nie publikowanych odkryć Autora. Dotyczy to głównie przykładów i kontrprzykładów, których pomysłowość zawsze mnie zadziwiała. Szczególnie wysoką wartość ma następujący kontrprzykład ([99], str. 175). Wykorzystując podstawowe twierdzenie o zbiorach analitycznych na prostej Profesor skonstruował

σ-reprezentowalną σ-algebrę Boole'a $\boldsymbol{A}$ i takie dwa σ-izomorfizmy h_1 i h_2 z pewnych σ-ciał $\boldsymbol{F}_1$ i $\boldsymbol{F}_2$ w $\boldsymbol{A}$, że nie istnieje wspólne rozszerzenie izomorfizmów h_1 i h_2 na σ-produkt σ-ciał $\boldsymbol{F}_1$ i $\boldsymbol{F}_2$. Wynika stąd np., że nie każda σ-reprezentowalna algebra Boole'a ma własność silnego σ-rozszerzania, [11].

Książka cieszy się olbrzymim powodzeniem, o czym świadczy szybkie wyczerpywanie się kolejnych wydań i tłumaczenia na inne języki.

Niech mi wolno będzie zakończyć artykuł wspomnieniem osobistym. W połowie lat pięćdziesiątych zgłosiłem się do Profesora z prośbą o opiekę naukową. Profesor — jak mi to później powiedział — wyznaje zasadę, że młodym adeptom matematyki należy stawiać trudne zadania, ponieważ nie dysponując zbyt rozległą wiedzą nie są w stanie uświadomić sobie w pełni trudności zadania. Nieświadomość trudności ułatwia im zaatakowanie problemu z większą siłą i wiarą w sukces. Dostałem więc temat — zgodnie z tą zasadą — należycie trudny. Poddałem się po dwóch latach zmagań. Wspominam to jednak nie bez satysfakcji, ponieważ ów problem do dziś nie znalazł pełnego rozwiązania. Można go sformułować następująco (zob. [16]): dla dostatecznie wielkiej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ znaleźć taki σ-ideał $\boldsymbol{I}$ w ciele $P(X)$ wszystkich podzbiorów zbioru X mocy $\mathfrak{m}$, by zawierał wszystkie jednoelementowe podzbiory zbioru X oraz by algebra ilorazowa $P(X)/\boldsymbol{I}$ była zupełna.

E. Grzegorek i C. Ryll-Nardzewski (Wrocław)

Prace Romana Sikorskiego z teorii miary

Profesor Roman Sikorski jest matematykiem o bardzo wszechstronnych zainteresowaniach. Jedną z głównych dziedzin, której na przestrzeni lat przeszło dwudziestu poświęcił wiele publikacji i uzyskał różne rezultaty dobrze znane i cenione na całym świecie, jest teoria miary i rozmaite jej powiązania, przede wszystkim z topologią, algebrami Boole'a i funkcjami rzeczywistymi. Większość prac Sikorskiego z teorii miary powstała we wczesnych latach pięćdziesiątych. W tym czasie profesor Sikorski utrzymywał szczególnie żywe kontakty z wrocławskim ośrodkiem matematycznym i wielokrotnie brał czynny udział w posiedzeniach