σ-reprezentowalną σ-algebrę Boole'a $\boldsymbol{A}$ i takie dwa σ-izomorfizmy h_1 i h_2 z pewnych σ-ciał $\boldsymbol{F}_1$ i $\boldsymbol{F}_2$ w $\boldsymbol{A}$, że nie istnieje wspólne rozszerzenie izomorfizmów h_1 i h_2 na σ-produkt σ-ciał $\boldsymbol{F}_1$ i $\boldsymbol{F}_2$. Wynika stąd np., że nie każda σ-reprezentowalna algebra Boole'a ma własność silnego σ-rozszerzania, [11].

Książka cieszy się olbrzymim powodzeniem, o czym świadczy szybkie wyczerpywanie się kolejnych wydań i tłumaczenia na inne języki.

Niech mi wolno będzie zakończyć artykuł wspomnieniem osobistym. W połowie lat pięćdziesiątych zgłosiłem się do Profesora z prośbą o opiekę naukową. Profesor — jak mi to później powiedział — wyznaje zasadę, że młodym adeptom matematyki należy stawiać trudne zadania, ponieważ nie dysponując zbyt rozległą wiedzą nie są w stanie uświadomić sobie w pełni trudności zadania. Nieświadomość trudności ułatwia im zaatakowanie problemu z większą siłą i wiarą w sukces. Dostałem więc temat — zgodnie z tą zasadą — należycie trudny. Poddałem się po dwóch latach zmagań. Wspominam to jednak nie bez satysfakcji, ponieważ ów problem do dziś nie znalazł pełnego rozwiązania. Można go sformułować następująco (zob. [16]): dla dostatecznie wielkiej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ znaleźć taki σ-ideał $\boldsymbol{I}$ w ciele $P(X)$ wszystkich podzbiorów zbioru X mocy $\mathfrak{m}$, by zawierał wszystkie jednoelementowe podzbiory zbioru X oraz by algebra ilorazowa $P(X)/\boldsymbol{I}$ była zupełna.

E. Grzegorek i C. Ryll-Nardzewski (Wrocław)

Prace Romana Sikorskiego z teorii miary

Profesor Roman Sikorski jest matematykiem o bardzo wszechstronnych zainteresowaniach. Jedną z głównych dziedzin, której na przestrzeni lat przeszło dwudziestu poświęcił wiele publikacji i uzyskał różne rezultaty dobrze znane i cenione na całym świecie, jest teoria miary i rozmaite jej powiązania, przede wszystkim z topologią, algebrami Boole'a i funkcjami rzeczywistymi. Większość prac Sikorskiego z teorii miary powstała we wczesnych latach pięćdziesiątych. W tym czasie profesor Sikorski utrzymywał szczególnie żywe kontakty z wrocławskim ośrodkiem matematycznym i wielokrotnie brał czynny udział w posiedzeniach

seminarium poniedziałkowego (E. Marczewskiego i H. Steinhausa) oraz w posiedzeniach Wrocławskiego Oddziału PTM, na których był często zapraszanym referentem. Do dziś dnia wyniki Sikorskiego są bardzo dobrze znane matematykom wrocławskim (również młodszej generacji) i stale wpływają stymulująco na aktualnie prowadzone badania w tej dziedzinie.

W niniejszym artykule ograniczamy się do omówienia najbardziej reprezentatywnych prac Sikorskiego, z konieczności pomijając niektóre rezultaty równie ważne, ale których zreferowanie wymagałoby dokładniejszego wejścia w szczegóły techniczne bardziej zrozumiałe tylko dla specjalistów.

W pracy [2] (1948) wspólnej z E. Marczewskim zostało udowodnione, że w przestrzeni metrycznej X każda miara borelowska σ-skończona ma nośnik (najmniejszy zbiór domknięty miary pełnej) wtedy i tylko wtedy, gdy typ ośrodkowości przestrzeni X jest mniejszy od pierwszej liczby kardynalnej rzeczywiście mierzalnej. To daje, dla każdej miary borelowskiej σ-skończonej μ w przestrzeni metrycznej X, której typ ośrodkowości jest mniejszy od pierwszej liczby rzeczywiście mierzalnej, rozbicie przestrzeni X na zbiór ośrodkowy i zbiór otwarty miary μ zero.

Autorzy dowodzą też, że jest prawdziwy analogon powyższego twierdzenia dla miar dwuwartościowych, przy czym odpowiedni warunek na typ ośrodkowości X może być zastąpiony przez warunek: moc X jest mniejsza od pierwszej liczby kardynalnej $(0,1)$-mierzalnej. W szczególności każda dwuwartościowa miara borelowska w przestrzeni metrycznej mocy $2^{\aleph_0}$ jest trywialna, tzn. jej nośnik jest zbiorem jednopunktowym lub pustym. Pewne uogólnienia tego dla przestrzeni dziedzicznie parazwartych zostały uzyskane przez M. Katětowa (Fund. Math. 38 (1951)).

W roku 1962 V. V. Sazonov opublikował ciekawy wynik na podobny temat. Udowodnił mianowicie, że miara σ-skończona borelowska w przestrzeni metrycznej, której moc jest nie większa od $2^{\aleph_0}$, jest doskonała wtedy i tylko wtedy, gdy jest skoncentrowana na zbiorze σ-zwartym. (Przypomnijmy, że każda dwuwartościowa miara jest zwarta w sensie Marczewskiego, więc doskonała.) G. Koumoullis w pracy doktorskiej (1978) udowodnił, że twierdzenie Sazonova jest prawdziwe dla dowolnej przestrzeni metrycznej, której moc jest mniejsza od pierwszej liczby kardynalnej $(0,1)$-mierzalnej.

W pracy [14] (1949) wspólnej z E. Marczewskim autorzy stawiają zagadnienie rozkładu przestrzeni topologicznej z miarą borelowską na zbiór I kategorii i zbiór miary zero. Autorzy dają prosty dowód, że taki rozkład istnieje dla wszystkich α-wymiarowych miar Hausdorffa w przestrzeniach metrycznych ośrodkowych. Opierając się na swej pracy [2] dowodzą też istnienia takiego rozkładu dla każdej σ-skończonej miary borelowskiej znikającej na zbiorach jednopunktowych, określonej w prze-

strzeni metrycznej, której typ ośrodkowości jest mniejszy od pierwszej liczby rzeczywiście mierzalnej. Założenie metryzowalności jest tu istotne. Jak pokazali autorzy, istnieje przestrzeń zwarta X i skończona miara borelowska, znikająca na zbiorach jednopunktowych i taka, że dla każdego zbioru $A \subset X$, $\mu^*(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem pierwszej kategorii w X; przy tym X ma bazę zbiorów otwartych mocy $2^{\aleph_0}$.



W pracy [15] (1949) Sikorski określa w naturalny sposób całkę dla σ-homeomorfizmów B_R w daną σ-algebrę Boole'a z miarą; wykorzystuje w tym celu twierdzenie Loomisa–Sikorskiego [6] (1948) oraz własne twierdzenie o indukowaniu σ-homeomorfizmów B_R w A przez punktowe funkcje rzeczywiste, [10] (1949). Wszystkie własności zdefiniowanej przez autora całki w σ-algebrze Boole'a z miarą są natychmiastową konsekwencją własności, jakie ma zwykła całka Lebesgue'a w przestrzeni miarowej.

Pewne próby definiowania całki w σ-algebrze Boole'a prowadzili wcześniej Carathéodory, Olmsted, Bischof i Ridder.

Warto zauważyć, że omówiony wyżej wynik Sikorskiego ma swój

odpowiednik dla całki typu Bochnera (metoda jest dokładnie ta sama, a prostą $\boldsymbol{R}$ zastępuje się dowolną ośrodkową przestrzenią Banacha).

W pracy [17] (1950) Sikorski wyjaśnił definitywnie związki między iloczynami kartezjańskimi σ-ciał a σ-niezależnymi rodzinami σ-ciał. W szczególności pokazał, że twierdzenie Banacha o rozszerzaniu σ-miar zdefiniowanych na σ-niezależnych σ-ciałach (Studia Math. 10 (1948)) wynika z twierdzenia o istnieniu miary produktowej. Równocześnie podobny rezultat uzyskał niezależnie S. Sherman (Amer. J. Math. 72 (1950)).

W pracy [20] (1950) Sikorski przeprowadził szczegółową analizę rozmaitych definicji pojęcia σ-produktu kartezjańskiego σ-algebr Boole'a spełniającego pewne naturalne warunki o rozszerzaniu miar lub o rozszerzaniu σ-homeomorfizmów. Badania te wiążą się ściśle z pracą [23] (1951), w której Sikorski, podając odpowiedni przykład, wykazał błędność pewnej konstrukcji Kapposa produktów miarowych algebr Boole'a. Ten sam przykład wykazuje — jak zauważył Sikorski — że twierdzenie Banacha o rozszerzaniu miar zdefiniowanych na σ-niezależnych σ-ciałach nie jest ogólnie prawdziwe dla miarowych σ-algebr Boole'a.

W pracy [3] (1948) twierdzenie Cantora–Bernsteina zostało uogólnione przez Sikorskiego na przypadek σ-algebr Boole'a.

Praca [28] (1951) wspólna z Marczewskim poświęcona jest twierdzeniu typu Cantora–Bernsteina dla miarowych algebr Boole'a, a mianowicie jeśli μ i ν są ściśle dodatnimi miarami na σ-algebrach Boole'a $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ odpowiednio oraz jeśli $\boldsymbol{A}_0 \subset \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_0 \subset \boldsymbol{B}$ są σ-podalgebrami takimi, że algebra miarowa $(\boldsymbol{A}_0, \mu \mid \boldsymbol{A}_0)$ jest izomorficzna z $(\boldsymbol{B}, \nu)$ oraz *vice versa* $(\boldsymbol{B}_0, \nu \mid \boldsymbol{B}_0)$ jest izomorficzna z $(\boldsymbol{A}, \mu)$, to algebry $(\boldsymbol{A}, \mu)$ i $(\boldsymbol{B}, \nu)$ są izomorficzne. Dowód wykorzystuje twierdzenie D. Maharam o strukturze algebr miarowych.

W pracy [48] (1955) autor podaje nowy oryginalny dowód klasycznego twierdzenia o związkach funkcji addytywnych figury elementarnej w $\boldsymbol{R}^n$ z miarami przeliczalnie addytywnymi.

Od Tarskiego pochodzi stary problem istnienia skończonej, skończenie addytywnej ściśle dodatniej miary w dowolnej algebrze Boole'a spełniającej warunek c.c.c. (każda rodzina niezerowych parami rozłącznych elementów jest co najwyżej przeliczalna). W latach sześćdziesiątych odpowiedź negatywną dał Gaifman. O. M. Nikodym wykazał w roku 1955, w skomplikowany sposób, że odpowiedź jest pozytywna dla dowolnej algebry Boole'a, jeśli dopuszcza się miary o wartościach w ciałach niearchimedesowskich. W pracy [113] (1971) wspólnej z K. Woycicką autorzy podają odmienny i bardzo krótki dowód twierdzenia Nikodyma.

R. Sikorski jest autorem oryginalnego podręcznika *Funkcje rzeczywiste* [60], [67]. Powszechnie ceniona monografia Sikorskiego *Boolean algebras* zawiera bardzo wiele wyników własnych z pogranicza teorii miary i algebr Boole'a.

Wyniki Sikorskiego z teorii miary weszły na stałe do literatury. Tak na przykład w znanej książce J. C. Oxtoby'ego *Measure and category* znalazło się miejsce na omówienie prac [2] i [14]. Nieduża ta książka zawiera tylko najładniejsze, a zarazem ciekawe dla szerokiego kręgu matematyków rezultaty dotyczące analogii między miarą a kategorią Baire'a.

Piotr Antosik (Katowice)

Prace Romana Sikorskiego z teorii dystrybucji

Prof. R. Sikorski był w latach pięćdziesiątych jednym z tych matematyków, którzy odczuwali potrzebę oparcia teorii dystrybucji na prostszych pojęciach niż to zrobili S. L. Sobolew i L. Schwartz. Punktem wyjścia definicji dystrybucji podanej w jego pracy [38] jest pojęcie pary uporządkowanej (p, f), gdzie p jest nieujemną liczbą całkowitą, a f jest funkcją ciągłą w zbiorze otwartym Q. Dwie takie pary (p, f) i (q, g) są *równoważne*, gdy $p \geqslant q$, pochodna $f^{(p-q)}$ jest ciągła i różnica $f^{(p-q)} - g$ jest wielomianem stopnia mniejszego od q lub $q \geqslant p$ i różnica $g^{(q-p)} - f$ jest wielomianem stopnia mniejszego od p. *Dystrybucją rzędu skończonego* w Q jest klasa par równoważnych w Q. Rozwinięcie tej teorii jest podane w książce *Funkcje rzeczywiste* [60], str. 425.

Zaletą metody algebraiczno-różniczkowej wprowadzenia dystrybucji przez prof. Sikorskiego jest jej bezpośredniość i elementarność. Język tej metody jest bliższy języka analizy klasycznej niż język oryginalnej teorii Schwartza. Dalsza jednolitość języka i metod analizy i teorii dystrybucji występuje w ciągowej teorii dystrybucji, która została przedstawiona w pracach [55] i [82] napisanych wspólnie z prof. Janem Mikusińskim. W pracach tych dystrybucjami są klasy równoważności podstawowych ciągów funkcji.

W przypadku dystrybucji rzędu skończonego jednej zmiennej określonej na całej prostej wystarczy przyjąć, że ciąg funkcji gładkich f_n, tj. funkcji mających pochodne dowolnego rzędu, jest *podstawowy*, jeśli istnieją funkcje F_n i rząd k ($k = 0, 1, \ldots$), takie że $F_n^{(k)} = f_n$ i ciąg F_n jest niemal jednostajnie zbieżny na prostej. Dwa ciągi f_n i g_n są *równoważne*, gdy ciąg przeplatany $f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots$ jest podstawowy. Klasy ciągów równoważnych są nazywane *dystrybucjami*. Sposób wprowadze-