prof. Sikorski nazywa wartością dystrybucji $f(u, t)$ w nieskończoności względem t i oznacza ją $f(u, \infty)$. Podobnie określa się $f(u, -\infty)$. Zrozumiałe jest obecnie znaczenie symbolu $\int_{-\infty}^{\infty} f(u, t)\,dt$, które odpowiada całce niewłaściwej względem t. Gdy pojęcie całki niewłaściwej jest zdefiniowane, definicje splotu dystrybucji i transformaty Fouriera są pod względem formalnym takie same jak w klasycznej analizie, tj.

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt, \qquad Ff(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-2\pi ixt)\,dt.$$

Wprowadzone pojęcie całki z „ciągłej części dystrybucji" jest proste i wystarcza do wyprowadzenia ciekawego wzoru na podstawianie do wielowymiarowej delty Diraca. Wynik ten jest zawarty w pracy [74].

W przedmowie do tłumaczenia na język rosyjski książki [117] (pióra E. Sołomencewa), czytamy że *zasługi i osiągnięcia polskiej szkoły teorii dystrybucji są dobrze znane. Rozwijana w pracach jej przedstawicieli ciągowa metoda uzasadnienia i budowy tej teorii przyciąga swoją poglądowością i związkiem z intuicyjnymi fizycznymi wyobrażeniami.*

Głównym dorobkiem polskiej szkoły dystrybucji są prace prof. J. Mikusińskiego z ciągowej teorii dystrybucji, prace prof. S. Łojasiewicza z funkcjonałowej teorii dystrybucji i prace prof. R. Sikorskiego z algebraiczno-różniczkowej teorii dystrybucji. Niezależnie od swojej własnej koncepcji teorii dystrybucji prof. R. Sikorski ma duży wkład w rozwój ciągowej teorii dystrybucji.

A. Pełczyński (Warszawa)

O Romanie Sikorskim w analizie funkcjonalnej i trochę poza nią

Gdy pisałem zamówiony u mnie przez redakcję artykuł o pracach Romana Sikorskiego z analizy funkcjonalnej, stale na myśl przychodziły wspomnienia naszych z nim kontaktów. Od wspomnień więc zacznę.

Roman Sikorski należy do pokolenia, które poniosło największe straty w II Wojnie Światowej. Brak dostatecznej liczby przedstawicieli tego

pokolenia wśród matematyków polskich dał się dotkliwie odczuć. Nawet wielka indywidualność Sikorskiego w małym tylko stopniu potrafiła ten brak złagodzić. Sikorski jest o 14 lat młodszy od mojego nauczyciela prof. Mazura, a o 12 lat starszy ode mnie.

W połowie lat pięćdziesiątych Sikorski był dla mnie i wielu moich kolegów jakby starszym bratem. Był jedynym docentem, który pojawiał się w pokoju asystenckim w gmachu Obserwatorium Astronomicznego (gdzie wówczas mieściło się Seminarium Matematyczne UW), nie tylko po to, by wywiesić informacje o materiale przerobionym na wykładzie, lecz również, aby porozmawiać z nami, poplotkować i pożartować.

Nasi matematyczni mistrzowie byli dla niego zwykłymi ludźmi, o których opowiadał nam anegdoty. Z kolei on był dla nas bliskim życzliwym starszym kolegą, nie pozbawionym śmieszności, ale też pełnym cech pozytywnych, które pragnęliśmy sobie przyswoić.

Raz na przykład Sikorski opowiadał nam o tym, jak po magisterium, po rozmowie z prof. Kuratowskim zrozumiał, że aby zrobić coś w matematyce, trzeba solidnie popracować. Na pracę tę poświęcał wakacje „podczas, gdy inni jeździli w góry lub nad morze". Myśmy co prawda nie wyrzekali się ani morza ani gór, ale przykład Sikorskiego uświadamiał nam, że sukcesy matematyczne zawdzięcza się w równym stopniu zdolnościom co pracowitości, że nie wystarczy „mieć wyniki", ale trzeba je jeszcze często w mozolnym trudzie przygotować do publikacji, że wiedzę naszych mistrzów należy zawsze konfrontować z bieżącą literaturą przedmiotu.

Mechanizm tego, jak Sikorski „uświadamiał" młodzież, ilustruje następujące zdarzenie:

W roku 1955 Profesor Mazur wprowadzał nas na swoim seminarium w tajemniczy świat przestrzeni Banacha. Chyba od docenta Altmana dowiedział się on o twierdzeniu Karlina, że przestrzeń $C[0,1]$ nie ma bazy bezwarunkowej. Mazur udowodnił twierdzenie natychmiast, że tak powiem „z marszu". Dowód Mazura opierał się na starym wyniku (Banacha i jego) o słabej zupełności przestrzeni sprzężonej do $C[0,1]$. Mazur spytał nas, czy twierdzenie Karlina można przenieść na przestrzeń $C(K)$ dla dowolnego K nieprzeliczalnego metrycznego i zwartego (1). Udało mi się w skomplikowany sposób odpowiedzieć na to pytanie. Kiedy przedstawiałem swój dowód na posiedzeniu Oddziału Warszawskiego PTM (był to mój debiut), Sikorski natychmiast zauważył, że sprzężona

(1) W tych „zamierzchłych czasach" twierdzenie Milutina o izomorfizmie wszystkich przestrzeni $C(K)$ dla K nieprzeliczalnych metrycznych i zwartych nie było nikomu znane; leżało zagrzebane w bibliotece Uniwersytetu Łomonosowa w Moskwie. Odkopali je tam około 1964 r. V. I. Guarariĭ i M. J. Kadec. Na skutek błędnej notatki w Książce Szkockiej wierzono, że dla K przeliczalnych i zwartych $C(K)$ jest izomorficzne z c_0.

do przestrzeni $C(K)$ dla K metrycznych, zwartych i nieprzeliczalnych jest izometryczna ze sprzężoną do $C[0,1]$, więc dowód Mazura przenosi się bez zmian, a dodatkowe rozumowanie jest zbędne.

Izometria ta wynika z izomorfizmu odpowiednich miarowych algebr Boole'a. Dziś dla specjalisty rozumowanie podane przez Sikorskiego jest standardowe. Wtedy dla nas, dla których jedynymi dostępnymi książkami z analizy funkcjonalnej była monografia Banacha i podręcznik Lusternika i Sobolewa, argument Sikorskiego wydawał się niezwykle oryginalny. Od różnorodności matematyki tam użytej kręciło się w głowie.

Szerokość zainteresowań Sikorskiego, jego wiedza i łatwość, z jaką się nią posługuje, są rzeczywiście wyjątkowe i godne pozazdroszczenia. Sikorski jest matematykiem o wielu specjalnościach. Gdybym jednak musiał zlokalizować go w matematycznej społeczności, to nazwałbym go „boolowcem". Moim zdaniem monografia *Boolean algebras* [69] jest najlepszą z jego książek, jego najcenniejszy wkład do matematyki to różnorodne zastosowania technik boolowskich, jego intuicje nawet w teorii operatorów są często boolowskie.

Wszelka jednak „lokalizacja" tak wielostronnego matematyka jak Sikorski jest sztuczna! Ćwierć wieku temu, kiedy poznawaliśmy bliżej Sikorskiego, był tą wielodziedzinową wiedzą matematyczną tak naładowany, że byle tknąć, wysypywały się wiadomości. Chętnie się dzielił swą wiedzą. Podobnie jak w jednym z przebojów owych czasów: *This land is my land, this land is your land, From California to the New York Island, From the Redwood Forest to the Palm Footstep, This land was made for you and me*, zdawał się śpiewać to samo o matematyce.

W roku akademickim 1953–1954 Sikorski wykładał nam trzy główne przedmioty: funkcje analityczne, funkcje rzeczywiste i równania różniczkowe. Skorzystam z rzadkiej okazji, aby „wystawić oceny" za te wykłady mojemu byłemu egzaminatorowi.

Wykład z funkcji analitycznych był bardzo dobry. Ucząc się do egzaminu potrafiłem w zasadzie prawie cały (spory) materiał odtworzyć sobie z pamięci wraz z dowodami. Szczególną uwagę przywiązywał Sikorski do twierdzenia Riemanna o odwzorowaniach konforemnych.

Wykład z równań różniczkowych zwyczajnych był poprawny — jak wszystkie wykłady Sikorskiego — ale nijaki. Moim zdaniem wykładowca równań różniczkowych „nie czuł".

Wykład z funkcji rzeczywistych — ulubionego przedmiotu Sikorskiego — był bardzo ambitny. Materiał był ogromny. Może charakter przedmiotu sprawił, że wykład był zbyt formalny. Sikorski wiele czasu poświęcił prezentacji oryginalnego dowodu F. Riesza, że funkcja monotoniczna jest prawie wszędzie różniczkowalna. Jestem wdzięczny wykładowcy, że podał właśnie ten dowód, a nie zwykle wykładany prostszy dowód oparty na twierdzeniu Vitaliego o pokryciu (w przeciwnym razie

może bym nigdy dowodu Riesza nie poznał). Żałuję tylko, że wykładowca nie podkreślił wówczas związku rieszowskiego „lematu wschodzącego słońca" z twierdzeniem maksymalnym Hardy'ego i Littlewooda.

Po wykładzie i egzaminie z funkcji rzeczywistych uświadomiliśmy sobie, że właściwie tego przedmiotu „nie czujemy". Poprosiliśmy Sikorskiego o jakieś ćwiczeniowe seminarium. Pisał on wówczas swoje *Funkcje rzeczywiste* [60]; chętnie się zgodził.

Seminarium to miało zazwyczaj przebieg następujący. Sikorski przypominał na wstępie podstawowe pojęcia omawianego fragmentu materiału stanowiącego pewną całość i podawał główne twierdzenia bez dowodu; następnie zasypywał nas dużą ilością trudnych zadań i drobnych problemików. Poznaliśmy wówczas mnóstwo użytecznych faktów i technik: twierdzenie Liapunowa o dziedzinie miary wektorowej, twierdzenie (chyba Hausdorffa) o istnieniu punktów ciągłości funkcji dwóch zmiennych ciągłych ze względu na każdą zmienną z osobna, twierdzenie Vitaliego o pokryciu, zasadę wyczerpywania itd. Powstało na tym seminarium kilka oryginalnych publikacji.

Inny charakter miało środowe seminarium Sikorskiego w IM PAN. Było to przede wszystkim seminarium szkoleniowe stanowiące dla mnie bardzo dobre uzupełnienie badawczego „wtorkowego" seminarium prof. Mazura, które było poświęcone głównie pewnym specjalnym strukturalnym problemom z teorii przestrzeni Banacha i przestrzeni liniowo metrycznych. Różnorodność traktowanych tematów na środowym seminarium jest jeszcze jednym świadectwem szerokości zainteresowań prowadzącego.

Pierwszy raz zetknąłem się na tym seminarium z teorią spektralną operatorów w przestrzeni Hilberta: pamiętam celną „boolowską" uwagę Sikorskiego, że miara spektralna jest analogiem miary zero-jedynkowej. Obok prac Nachbina o charakteryzacji metrycznej iniektywnych przestrzeni Banacha referowano na tym seminarium klasyczne twierdzenia Hamburgera o momentach, teorię Gelfanda algebr Banacha (mam do tej pory pretensję do prowadzącego, że tolerował używanie przez referentkę monstrum językowego „zero-potęgowy w sensie uogólnionym" zamiast *quasi-nilpotent*), twierdzenia reprezentacyjne dla operatorów w przestrzeniach C i L_1 (piękny cykl referatów Rylla-Nardzewskiego). Dużo czasu na tym seminarium poświęcono (na ogół bezskutecznym) próbom zrozumienia mądrości „czerwonej książeczki" [Gr1] Alexandra Grothendiecka.

Pracami Grothendiecka Sikorski interesował się w związku ze swoimi badaniami w teorii wyznacznikowej w przestrzeniach Banacha, której poświęcona jest znakomita większość prac Sikorskiego z analizy funkcjonalnej: [35], [37], [65], [66], [73], [78], [79], [80], [89], [121].

Chciałbym z grubsza przybliżyć czytelnikowi tę technicznie dość

skomplikowaną problematykę. Celem teorii wyznacznikowej jest podanie analitycznych wzorów będących uogólnieniem klasycznych wzorów Kramera oraz podanie kryteriów na rozwiązanie równania liniowego $Tx = y$ dla operatora liniowego $T\colon X \to X$ działającego w przestrzeni Banacha X. Jest dość oczywiste (nawet dla nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta), że klasa wszystkich operatorów liniowych ograniczonych działających w tej przestrzeni jest „za duża", aby można dla niej zbudować taką teorię.

W istocie teorię wyznacznikową udaje się zbudować jedynie w wąskiej klasie perturbacji identyczności $I_X\colon X \to X$ operatorami „bliskimi" skończenie wymiarowych, tzn. takimi operatorami $T\colon X \to X$, że różnica $A = I_X - T$ ma pewne własności zbliżone do własności operatorów skończenie wymiarowych. Dokładniej właściwą klasą perturbacji okazuje się klasa tych operatorów A, które wyznaczają funkcjonały liniowe na operatorach skończenie wymiarowych, ograniczone względem normy operatorowej $\| \ \|$, tj. operatorów spełniających następujący warunek: istnieje nieujemna stała $C < \infty$ taka, że dla każdego skończenie wymiarowego operatora $F\colon X \to X$ ślad $\operatorname{tr}(FA)$ spełnia nierówność

$$|\operatorname{tr}(FA)| \leqslant C\|F\|.$$

Operatory takie wprowadzili niezależnie Grothendieck i Leżański we wczesnych latach pięćdziesiątych; przyjęła się dla nich nazwa: operatory *integralne* w sensie Grothendiecka. Sikorski nazywa je w swoich pracach „endomorfizmami Leżańskiego" albo operatorami *quasi-nuklearnymi*. Przykładem takich operatorów są operatory nuklearne; operator liniowy $N\colon X \to X$ nazywa się *nuklearnym*, jeżeli istnieją: ciąg elementów (x_j) przestrzeni X oraz ciąg (x_j^*) funkcjonałów liniowych na X, takie że

$$N(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x)x_j \quad \text{dla } x \in X$$

oraz $\sum \|x_j\|\|x_j^*\| < \infty$.

Teoria wyznacznikowa w dowolnych przestrzeniach Banacha została stworzona niezależnie przez Grothendiecka [Gr3], Leżańskiego [L] i Rustona [R] w latach 1950–1954. Ruston i Grothendieck rozważali w zasadzie perturbacje identyczności operatorami nuklearnymi i pracowali za pomocą formalizmu produktów tensorowych. Teoria Leżańskiego, którą rozwinął Sikorski i nadał ostateczny jej kształt, jest trochę ogólniejsza; dotyczy ona perturbacji identyczności operatorami integralnymi w sensie Grothendiecka; polega na konstrukcji tzw. *systemów wyznacznikowych*, tj. z grubsza mówiąc wyznaczników operatorowych, których wartościami są formy $2n$-liniowe określone na produkcie kartezjańskim $X^n \times (X^*)^n$ (X^* oznacza przestrzeń sprzężoną do przestrzeni X); w konstrukcjach tych istotną rolę odgrywa funkcjonał śladu.

Obecnie najprostszym sposobem wprowadzenia systemu wyznacznikowego wydaje się następujący (zaproponowany przez A. Pietscha [P1], [P2]). Jeśli $A: X \to X$ jest operatorem integralnym, to (jak pokazał Grothendieck) A faktoryzuje się przez pewną przestrzeń Hilberta H, tzn. istnieją operatory $\alpha: X \to H$ oraz $\beta: H \to X$ takie, że $\beta\alpha = A$, ponadto faktoryzacja (α, β) ma jeszcze dodatkową własność, że operator „pokrewny" do $A = \beta\alpha$, tj. operator $\alpha\beta: H \to H$ jest typu Hilberta–Schmidta. Teorię wyznacznikową dla operatorów Hilberta–Schmidta zbudował Carleman [C] około roku 1920; teorię tę rozwinął Smithies około 1940 (cf. [S]), a w pewnym sensie zakończył Sikorski około 1960 w pracy [73] (patrz też [79]). Stosując tę teorię buduje się układ wyznacznikowy dla operatora $I_H + \alpha\beta$. Następnie ten układ interpretuje się jako układ wyznacznikowy dla operatora $I_X + \beta\alpha = I_X + A$; korzysta się przy tym z własności śladu

$$\operatorname{tr}(\beta\alpha F) = \operatorname{tr}(\alpha F \beta)$$

dla każdego skończenie wymiarowego operatora $F: X \to X$.

W latach 1953–1961 Sikorski napisał 9 prac dotyczących teorii wyznacznikowej w przestrzeniach Banacha. Podsumowaniem ich jest artykuł przeglądowy [80]. Zawiera on przejrzysty i dalece nieformalny wykład teorii. Sikorski bardzo sugestywnie stara się wyjaśnić, dlaczego wprowadzone definicje systemu wyznacznikowego stanowią naturalne uogólnienie klasycznej teorii równania liniowego w przestrzeniach skończenie wymiarowych; dlaczego naturalne jest pracowanie z operatorami integralnymi w sensie Grothendiecka; w jaki sposób problem jednoznaczności teorii wyznacznikowej dla operatorów integralnych w sensie Grothendiecka, a nawet nuklearnych działających w danej przestrzeni Banacha X, wiąże się z pytaniem, czy X ma tzw. *własność aproksymacji* w sensie Grothendiecka. Sądzę, że każdy matematyk zamierzający pracować w teorii wyznacznikowej w przestrzeniach Banacha lub zagadnieniach pokrewnych powinien się zapoznać z tym pięknym przeglądem.

Punktem wyjścia dla badań Sikorskiego było prawdopodobnie:

1° chęć zrozumienia trudnych, mało intuicyjnych prac Leżańskiego,

2° wyjaśnienie różnic i podobieństw między podejściami Leżańskiego, Rustona a Grothendiecka i ustalenie zakresu tych podejść,

3° porównanie tych ogólnych konstrukcji z klasycznymi teoriami wyznacznikowymi, tj. teorią Fredholma dla operatorów całkowych

$$K(f)(y) = \int f(x)K(x, y)\,dx,$$

teorią Kocha dla macierzy nieskończonych i teorią Carlemana dla operatorów Hilberta–Schmidta w przestrzeniach Hilberta.

Ten ambitny plan wykonał Sikorski z dużym naddatkiem. Z jednej strony odkrył wiele nowych wzorów analitycznych dla wyznaczników,

z drugiej rozwinął czysto algebraiczną teorię systemów wyznacznikowych, wskazując na jej naturalny związek z teorią operatorów Fredholma w przestrzeniach Banacha.

Badania Sikorskiego miały duży wpływ na badania wielu matematyków, wymienię tu tylko pracę A. Pietscha [P1] o operatorach pokrewnych, niedawną pracę Hermanna Königa [K] o teorii wyznacznikowej dla operatorów p-sumujących i związanych z nimi osobliwymi operatorami całkowymi, jedyną pracę Grothendiecka w Studia Mathematica [Gr2], w której zweryfikował on hipotezę Sikorskiego, że ślad złożenia trzech operatorów integralnych w sensie Grothendiecka jest niezmienniczy przy cyklicznych permutacjach tych operatorów; ten wynik Grothendiecka został następnie uogólniony na dowolną skończoną liczbę operatorów dwusumujących przez N. J. Nielsena [N].

W Polsce badania z teorii wyznacznikowej kontynuuje uczeń profesora Sikorskiego, doc. A. Buraczewski. Ostatnio Sikorski powrócił znowu do tej problematyki. W Studia Mathematica ukazała się praca [121] (wspólna z Buraczewskim) poświęcona teorii wyznacznikowej operatorów, których pewna potęga jest operatorem nuklearnym.

Poza pracami z teorii wyznacznikowej, Sikorski napisał jeszcze kilka prac z analizy funkcjonalnej (nie licząc oczywiście prac z teorii dystrybucji). Dotyczą one: istnienia granic uogólnionych, niezmienniczych ze względu na działanie półgrupy abelowej (lub nawet rozwiązalnej) dla funkcji skalarnych ograniczonych, określonych na pewnym zbiorze abstrakcyjnym, na którym działa ta półgrupa jako półgrupa przekształceń [24], [32]; inna praca [33] to prosty dowód znanego twierdzenia Mazura–Orlicza o nierównościach liniowych; dowód polega na redukcji do klasycznego twierdzenia Banacha o przedłużaniu funkcjonału liniowego dominowanego przez funkcjonał Banacha; jeszcze inna praca [45] podaje bardzo ogólny schemat sumowalności funkcji skalarnych i wektorowych, którego szczególnymi przypadkami są metody Toeplitza i tzw. metody ciągłe.

Kończąc spróbuję sformułować pewne ogólne cechy twórczości Romana Sikorskiego w analizie funkcjonalnej:

1° Tematyka badań Sikorskiego wydaje się wywodzić z problematyki seminarium z analizy funkcjonalnej prowadzonego we wczesnych latach pięćdziesiątych w IM PAN przez prof. Stanisława Mazura.

2° Sikorski raczej podejmował tematykę rozpoczętą przez innych niż inicjował nową.

3° Głębokie i ważne badania Sikorskiego w teorii wyznacznikowej w przestrzeniach Banacha stanowią jego trwały wkład do Analizy Funkcjonalnej.

Jestem przekonany, że tematyka ta będzie wkrótce znowu podjęta przez młodych zdolnych matematyków i rozwinięta w wielu kierunkach.

Cytowane prace z teorii wyznacznikowej

[C] T. Carleman, *Zur Theorie der linearem Integralgleichungen*, Math. Z. 9 (1921), str. 196–217.
[Gr1] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16, Providence 1955.
[Gr2] —, *The trace of some operators*, Studia Math. 20 (1961), str. 141–143.
[Gr3] —, *La théorie de Fredholm*, Bull. Soc. Math. France 84 (1956), str. 319–384.
[K] Hermann König, *A Fredholm determinant theory for p-summing maps in Banach spaces*, Math. Ann. 247 (1980), str. 255–274.
[L] T. Leżański, *The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces*, Studia Math. 13 (1953), str. 244–276.
[N] N. J. Nielsen, *On the trace of some operators*, ibidem 43 (1972), str. 209–215.
[P1] A. Pietsch, *Zur Fredholmschen Theorie in lokalkonvexen Räumen*, ibidem 22 (1963), str. 161–179.
[P2] —, *Operator Ideals*, VEB, Berlin 1978.
[R] A. F. Ruston, *On the Fredholm theory of integral equations for operators belonging to the trace class of a general Banach space*, Proc. London Math. Soc. 53 (1948), str. 109–124.
[S] F. Smithies, *Integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge 1970.

Spis publikacji Romana Sikorskiego do roku 1980

[1] *On the cartesian product of metric spaces*, Fund. Math. 34 (1947), str. 289–292.
[2] (z E. Marczewskim) *Measures in non-separable metric spaces*, Colloq. Math. 1 (1948), str. 133–139.
[3] *On a generalization of theorems of Banach and Cantor–Bernstein*, ibidem 1 (1948), str. 140–144.
[4] *Sur les corps de Boole topologiques*, C. R. Acad. Paris 226 (1948), str. 1675–1676.
[5] *Sur la convergence des suites d'homomorphies*, ibidem 226 (1948), str. 1792–1793.
[6] *On the representation of Boolean algebras as fields of sets*, Fund. Math. 35 (1948), str. 247–256.
[7] *On the separability of topological spaces*, Colloq. Math. 1 (1948), str. 279–284.
[8] *Remarks on a problem of Banach*, ibidem 1 (1948), str. 285–288.
[9] *A theorem on extension of homomorphisms*, Ann. Soc. Polon. Math. 21 (1948), str. 332–335.
[10] *On the inducing of homomorphisms by mappings*, Fund. Math. 36 (1949), str. 7–22.
[11] *On algebraic extensions of ordered fields*, Ann. Soc. Polon. Math. 22 (1949), str. 173–184.
[12] *Closure algebras*, Fund. Math. 36 (1949), str. 165–206.
[13] *A theorem on the structure of homomorphisms*, ibidem 36 (1949), str. 245–247.
[14] (z E. Marczewskim) *Remarks on measures and category*, Colloq. Math. 2 (1949), str. 13–19.
[15] *The integral on a Boolean algebra*, ibidem 2 (1949), str. 20–26.
[16] *On an unsolved problem from the theory of Boolean algebras*, ibidem 2 (1949), str. 27–29.