ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXIV (1982)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ERNST HÖLDER (Moguncja)

Działalność naukowa Leona Lichtensteina* (z okazji 100 rocznicy urodzin)

1. Z okazji setnej rocznicy urodzin Lichtensteina bardzo ważnym zadaniem jest przypomnienie jego osiągnięć w dziedzinie matematyki; zadaniem niełatwym wobec bogactwa publikacji naukowych Lichtensteina, których liczba wynosi około 125 (1). Przedstawię niżej kilka swych własnych uwag bibliograficznych bądź historycznych.

Przede wszystkim uważam, że publikacje Lichtensteina są rzadko cytowane; szczególnie dotyczy to obszernych jego prac drukowanych w czasopismach dużego formatu (Abh. d. Preuss. Akad. d. Wiss. [1], Crelles Journal, Acta Math. [2]–[3]). Być może przyczyna leży w tym, że wiele miejsca zajmują tam subtelne rozważania — te, które Bers i Schechter we wprowadzeniu do swego opracowania poświęconego równaniom eliptycznym i ich rozwiązaniom (2) nazywają *osobliwościami specjalnego rodzaju* (obszary nieograniczone, osobliwości rozwiązań); dziś mogą być one zastąpione przez stosowanie bardziej abstrakcyjnych przedstawień funkcjonalno-analitycznych.

Wyjątkiem może jest często wspominane twierdzenie Korna i Lichtensteina. Twierdzenie to mówi o możliwości konforemnego odwzorowania nieanalitycznego płata powierzchniowego na koło w płaszczyźnie ([1], [10]). Zasadniczo można więc powiedzieć, że każdy płat powierzchniowy w przestrzeni jest powierzchnią Riemanna.

---

* Artykuł niniejszy jest przekładem, dokonanym przez Adama Piskorka, tekstu powielonego w 1979 r. na Uniwersytecie w Bonn, pod tytułem *Lichtensteins wissenschaftliche Wirksamkeit (zum 100. Geburtstag von Leon Lichtenstein)* i przesłanego do Wiadomości Matematycznych przez autora za pośrednictwem Danuty Przeworskiej-Rolewicz. Por. jej artykuł o Lichtensteinie, Wiadom. Mat. 22 (1979), str. 107–113 (*przyp. red.*).

(1) Por. notkę (11) ze str. 200.

(2) L. Bers, F. John, M. Schechter, *Partial Differential Equations*, Interscience Publishers, New York–London–Sydney 1964, str. 133.

Fakt ten odgrywał również pewną rolę w ówczesnych badaniach powierzchni minimalnych i powierzchni o zadanej średniej krzywiźnie, którymi zajmowali się R. Courant, S. Hildebrandt i ich uczniowie. Tutaj i w innych jeszcze miejscach znalazł też zastosowanie kolejny wynik Lichtensteina z zakresu analizy zespolonej: dowód analityczności rozwiązania pewnego (nie-) liniowego równania różniczkowego cząstkowego ([11]), co zostało podkreślone we wspomnieniu pośmiertnym o Lichtensteinie [3] opracowanym przez O. Höldera [4].

Chętnie czytane dwa artykuły Lichtensteina o charakterze encyklopedycznym ([12], [13]) miały wieloraki wpływ zarówno na teorię potencjału i uniformizacji, jak i na zagadnienia brzegowe i zagadnienia na wartości własne dla równań cząstkowych. Zawierają też one bardzo szczegółowy przegląd całej ówczesnej literatury. Swego rodzaju kontynuacja drugiego artykułu znajduje się w opracowaniu C. Mirandy *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico* (Ergebn. d. Math., Neue Folge, Heft 2 (1955)).

Lichtenstein przybył (z Münster w Westfalii, a faktycznie raczej z Berlina) na Uniwersytet w Lipsku — jako następca geometry K. Rohna — do swych kolegów O. Höldera i Herglotza, którzy spowodowali powołanie go przez Wydział Filozoficzny. W roku 1928 Lichtenstein został dziekanem tego Wydziału.

Aż do odejścia Herglotza (1925) utrzymywała się harmonia pomiędzy trzema prądami matematycznymi, którą mój ojciec wcześniej przeżywał podczas swych studiów w Berlinie, ukierunkowanych przez trzech Wielkich: Weierstrassa, Kroneckera i Kummera.

Uczniowie

2. Podczas swego pobytu w Lipsku Lichtenstein miał wielu uczniów, których promował w następującej kolejności: E. Hölder, E. Kähler, V. Garten i K. Maruhn, H. Boerner, F. Neumann, H. Schubert. O ich rozprawach doktorskich, dotyczących zagadnień hydromechaniki i figur równowagi oraz zagadnień brzegowych i na wartości własne, wspomnę jeszcze przy omawianiu książek Lichtensteina.

Lichtenstein miał dwa etaty dla asystentów. Pierwszy, który przede mną miał L. Neder (późniejszy profesor w Münster), był w instytucie matematycznym w Lipsku; drugim etatem dysponował Lichtenstein jako redaktor „Fortschritte der Mathematik" i „Mathematische Zeitschrift" J. Springera w Berlinie. Wcześniej asystentami byli A. Weinstein, G. Szegö, prawdopodobnie również Müntz, a za moich czasów V. Garten i K. Maruhn.

---

[3] Ber. Sächs. Akad. d. Wiss. z. Leipzig, Math.-Phys. Kl. 76 (1934), str. 307–314.

[4] Otto Hölder — to ojciec Ernsta Höldera (*przyp. red.*).

A. Wintner i J. Schauder przebywali i pracowali naukowo u Lichtensteina jako stypendyści fundacji Rockefellera (jak to wynika z wypowiedzi W. Orlicza, cytowanej w odczycie wygłoszonym przez D. Przeworską-Rolewicz podczas uroczystości w Lipsku 1978, który ukaże się w Wiss. Zs. Univ. Leipzig). Poza wyżej wymienionymi, jako goście zagraniczni przebywali u Lichtensteina przez pewien okres młodzi, ale już wyraźnie ukształtowani matematycy, jak J. Nikliborc, J. von Neumann, J. Leray ([5]).

Niezależnie od recenzentów Lichtenstein sam dokładnie studiował wszystkie prace, które wpływały do redakcji Mathematische Zeitschrift. Pracował nad nimi zarówno pod względem merytorycznym, jak i formalnym, aż do przysłowiowej kropki nad *i*, co Landau ganił.

3. Wintner zajmował się w Wiedniu i Budapeszcie (u F. Riesza) przede wszystkim teorią nieskończenie wielu nieliniowych równań [liczbowych] i równań różniczkowych. Lichtenstein umożliwił Wintnerowi kontynuowanie tych badań w Lipsku, a w szczególności napisanie książki *Spektraltheorie der unendliche Matrizen* (Lipsk 1929). Do jej powstania przyczynił się Lichtenstein, który napisał do niej wstęp. Książka ta oraz wiele prac Wintnera, powstałych bezpośrednio po ukazaniu się dwu encyklopedycznych artykułów Hellingera i Toeplitza, dały nowy początek tej teorii. Do spotkania Wintnera i J. von Neumanna, mimo jego bytności u Lichtensteina, niestety nie doszło.

Lichtenstein dbał o Wintnera prawie jak ojciec; jednakże nie udało mu się doprowadzić — może na szczęście — do habilitacji Wintnera w Lipsku.

Wintner stosował metody nieskończenie wielu zmiennych do twierdzeń o istnieniu zaburzeń w mechanice nieba, do teorii Hilla zmienności orbity księżyca i księżyca z „maksymalną lunacją" oraz teorii małych planet. Wintner podał również podstawy matematyczne dla rodzin rozwiązań („grup") zagadnienia 3 ciał, które E. Strömgren (wówczas w Kopenhadze) po raz pierwszy traktował nowoczesnymi metodami numerycznymi, oraz sformułował dla nich zasadę zamknięcia.

Dokładne oszacowania Schaudera potencjału warstwy podwójnej i pojedynczej, które ukazały się w Math. Z. 33, 35 (1931/32), traktował Lichtenstein jako nowy ważny przyczynek w rozwijaniu metody H-warunku ([6]), zapoczątkowanej pracami O. Höldera, Liapunowa, Korna i jego samego, której Lichtenstein nadał także nazwę. Te wyniki zapewne stały się dla Lichtensteina okazją rozszerzenia jego własnych oszacowań potencjału newtonowskiego ([22], [23], [24]) i zastosowania ich do innych obszarów ([25]), dla których twierdzenia o istnieniu uważał on za ważne.

([5]) Informacja o J. Lerayu jest mylna, co wynika z jego własnej wypowiedzi; por. również jego artykuł *Mon Ami Jules Schauder*, Wiadom. Mat. 23 (*przyp. red.*).

([6]) W dzisiejszej terminologii nazywa się *warunkiem Höldera* (*przyp. red.*).

Pewną rolę odegrały przy tym funkcjonalno-teoretyczne rozważania Lichtensteina dotyczące pomocniczych parametrów, dla których dopuszczał on wartości zespolone.

Zarówno dla Schaudera, jak i Leraya, którzy wspólnie napisali fundamentalną pracę *Topologie et équations fonctionnelles* ([7]), te oszacowania (pierwotnie odłożone na później, ale nieopublikowane ze względu na ukazanie się wcześniejszej pracy O. D. Kelloga) stanowiły przygotowanie do nowej metody przedłużania za pomocą nierówności *a priori* dla równań różniczkowych cząstkowych.

Książki Lichtensteina

4. Z myślą o czytelnikach, którzy pragnęliby bliżej poznać dzieła Lichtensteina przedstawię teraz — bardziej systematycznie i w sposób uporządkowany według dziedzin — trzy obszerne książki Lichtensteina. Ukazywały się one co dwa lata nakładem J. Springera:

(H) *Grundlagen der Hydromechanik* (1929), [14];

(I) *Vorlesung über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen* (1931), [15];

(G) *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten* (1933), [16].

Hydromechanika

Jeżeli chodzi o dzieło (H), to ograniczę się przede wszystkim do przytoczenia mojej opinii napisanej w związku ze wznowieniem go w 1968 r. Ukazała się ona w *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 74 (str. 32–33, B. G. Teubner, Stuttgart); cytuję ją za pozwoleniem Wydawnictwa:

Po 40 latach ukazało się wznowienie L. Lichtensteina *Grundlagen der Hydromechanik* (1929) jako tom 30 żółtej serii. To bardzo dobrze.

Dla mnie, jednego z uczniów Lichtensteina, który i dziś stosuje jego metody teorii potencjału do zagadnień przepływów, nie jest łatwo dzieło to ocenić krytycznie.

Po pierwszym rozdziale przygotowawczym, zawierającym materiał, który dziś — w innym przedstawieniu i ukierunkowaniu topologicznym — nazywa się *topologią różniczkową*, oraz po drugim rozdziale, który dotyczył podstawowych kwestii teorii form różniczkowych zamkniętych i całek harmonicznych, następuje trzeci główny rozdział *Vorbereitendes aus der Potentialtheorie*.

([7]) J. P. Schauder, *Oeuvres*, Warszawa 1978, str. 320–348, omówiona w *L'oeuvre de Jules Schauder*, ibidem, str. 14; por. Wiadom. Mat. 13 (1959), str. 13–19 oraz 23 (1980), str. 75–83.

Lichtenstein, któremu zawdzięcza się — prócz podstawowych rozpraw — również artykuł encyklopedyczny o teorii potencjału, miał zamiar poświęcić tej teorii podręcznik. Chyba dobrze się stało, że swego zamiaru nie urzeczywistnił. Wszystko bowiem, co jest najważniejsze dla hydromechaniki z tej dziedziny, można znaleźć w tym rozdziale. Jak pokazują twierdzenia Lichtensteina o istnieniu, które on w jedenastym rozdziale jedynie przytacza, te pomocnicze środki teorii potencjału nie wystarczają w żaden sposób. Dla przykładu, własności ciągłości potencjału, które były przedmiotem badań O. Höldera, Korna, Kelloga, Schaudera i Lichtensteina, powinny być rozszerzone na obszary nieograniczone. W swej książce wspomina Lichtenstein również o równoległych obszernych badaniach hydrodynamicznych, które prowadził N. Günter w związku z pracami Lapunowa (a którym w Mathematische Zeitschrift nadał większy rozgłos). Dziś te pomocnicze środki teorii potencjału, w zmodyfikowanej formie i w połączeniu z innymi metodami (wariacyjnymi, z funkcjami uogólnionymi), wkraczają w teorię Morreya (*Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Berlin 1966), dając szczytowe osiągnięcia w tej dziedzinie.

Po krótkim rozdziale czwartym, zawierającym ogólne podstawy mechaniki, rozdział piąty przedstawia — mniej aksjomatycznie niż w ujęciu pozytywistycznym Gustawa Kirchhoffa — kinematykę ośrodka ciągłego. W tym rozdziale i w rozdziale siódmym o tensorze napięć pojawiają się różne formalne ulepszenia, wykorzystujące teorię macierzy i teorię form różniczkowych, które częściowo znajdowały się już w wykładach Herglotza o mechanice ośrodka ciągłego (1925/26) w Getyndze.

Dotąd nie wykorzystano bardzo subtelnych i szczegółowych rozważań kinematycznych o propagacji nieciągłości w rozdziale szóstym: zastosowania do gazodynamiki, która rozwinęła się burzliwie po ukazaniu się książki, nie zostały jeszcze zrobione. Zagadnienia hiperboliczne (badane już przez Hadamarda) zostały całkiem opuszczone. Wyniki nowych badań w tej dziedzinie znalazły się w pracach i książce Guderleya, *Schallnahe Strömungen*, Berlin 1957.

Hydrostatyka w rozdziale ósmym została przez Lichtensteina przedstawiona interesująco dzięki zastosowaniom nowoczesnych metod wariacyjnych, w szczególności w wyprowadzeniu starego prawa Archimedesa, gdzie został wykorzystany lemat Haara. Również do tego kręgu należą „figury równowagi wirującej cieczy", które stanowią główną dziedzinę pracy Lichtensteina. Poświęcił on im swą ostatnią monografię (Berlin 1933). W podobny sposób, starannie opracowana jest w rozdziale dziewiątym zasada Hamiltona.

Wyprowadzenie twierdzeń o wirach dla cieczy niejednorodnych, w szczególności równania cząstkowego eliptycznego na ciśnienie, przedstawione — znowu formalnie, niezbyt zadowalająco, ale bardzo ogólnie —

w rozdziale dziewiątym, stały się podstawą dla twierdzeń o istnieniu omówionych w rozdziale jedenastym. Twierdzenia te Lichtenstein ogłosił w trzech obszernych pracach o zagadnieniach początkowych dla jednorodnych i niejednorodnych nieściśliwych cieczy idealnych, natomiast w swej książce podał je jedynie w zwięzłej postaci i bez szczegółowych dowodów. Czytelnik książki z trudem może tu ocenić trudności, jakie musiał pokonać Lichtenstein.

Von Mises (1929) w swej błyskotliwej opinii o książce — pisanej, gdy Lichtenstein był ciężko chory — stwierdził: „W każdym razie znaczenie dzieła Lichtensteina, o którym chętnie wyrażamy się z uznaniem, polega nie na tym, że tkwi ono w mechanice 1870 roku, lecz na tym, że wykazuje ono wartości matematyki 1930 roku".

Lichtenstein w matematycznych dowodach istnienia widział nieodzowny dowód na to, że sięgające Eulera założenia mechaniki ośrodka ciągłego są wewnętrznie niesprzeczne. Lichtenstein i von Mises w swych wymaganiach matematycznych byli całkowicie różni; dziś poziom matematyczny prac z mechaniki i fizyki matematycznej jest znacznie wyższy, może w części zawdzięczamy to dziełu Lichtensteina ...

Jeżeli chodzi o teorię cieczy lepkiej, to ostatni paragraf książki Lichtensteina zatytułowany *Permanente Bewegung einer homogenen inkompressiblen zähen Flüssigkeit*, zawiera wkład zasadniczy, chociaż dotyczy on tylko małych liczb Reynoldsa. Teoria ta została rozwinięta (po części dzięki pojęciu rozwiązań uogólnionych) przez Leraya, Hopfa i innych, a głównie przez O. A. Ładyżeńską, której zawdzięcza się także podstawy matematyczne w tej dziedzinie.

Podobnie może znaleźć zastosowanie aktualna dziś teoria stabilności i bifurkacji, która również była osobno przedstawiona przez Lichtensteina (por. Lichtenstein, *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen* ..., Berlin 1931).

Całkowicie nierozwiązane są jeszcze w chwili obecnej zagadnienia ruchu powierzchni swobodnej (gdy np. obserwuje się ustalone fale Levi-Civity lub inne). Tu nie działa już metoda kolejnych przybliżeń, dla powierzchni swobodnej bowiem giną własności ciągłości. Takie jest w istocie ważne i nierozwiązane zagadnienie, z którego von Mises miał pokpiwać mówiąc: „możliwość, by zakrzywiona w sposób ciągły powierzchnia ograniczająca przeszła na powierzchnię, której normalna jest ciągła i spełnia »warunek Höldera«, budzi zgrozę u czytelnika".

Obszerne opracowania Lichtensteina z dziedziny hydrodynamiki, na których opierała się jego książka, są następujące:

I. *Über einige Existenzsätze des Anfangswertproblems der Hydrodynamik für homogene Flüssigkeiten*, [17], [18].

II. To samo dla niejednorodnych cieczy; twierdzenie o wirach, [19].

III. Ustalony (swobodny) ruch pewnej ... cieczy lepkiej, [20].

IV. Twierdzenia o ciągłości, stacjonarne prostoliniowe włókna wirów Helmholtza-Kirchhoffa, [21];

dalsze, niezbędne do tego prace, to *Twierdzenia pomocnicze teorii potencjału* I–IV ([22]–[25]).

Praca [26] dotycząca ruchu niekoherentnej materii w rozciągającej się nieskończenie przestrzeni obala zarzut (postawiony przez H. Seeligera) niestosowalności newtonowskiego prawa grawitacji w nieskończonej przestrzeni. Lichtenstein pokazał, że nawet w przestrzeni nieskończonej i wypełnionej materią, jeśli przyjąć właściwe założenie o gęstości, można poprawnie określić siłę przyciągania.

Wróćmy jeszcze do prac stanowiących podstawę omawianej książki. Prace te zawierają, prócz rozwiązań zagadnień początkowych, również badanie ruchów stacjonarnych. Opracowanie Lichtensteina (metodycznie związane ściśle z jednorodnymi i niejednorodnymi figurami równowagi) stacjonarnego ruchu wirów powinno być, jak zauważył Maruhn (Proc. IX. Cong. Int. Méc. Appl., Bruxelles 1957, 1, str. 173–176), skorygowane z powodu koniecznej zależności „obrotu" od odległości od osi. Istnienie globalnego rozwiązania udowodnili Fraenkel i Berger (Acta Math. 132 (1974), str. 13–51) przez sprowadzenie do zagadnienia wariacyjnego za pomocą symetryzacji Steinera.

Te pierścieniowe figury (równowagi wirującej cieczy lub też stacjonarnych wirów) wydają się mi podstawą (z uwzględnieniem zmiennej gęstości, w sensie „figury ziemi") traktowania pierścieni toroidalnych plazmy, jak również pierścieni nadprzewodników; obydwa te zagadnienia odgrywają pewną rolę w nowoczesnych urządzeniach technicznych, bądź też mają teoretyczną wartość dla dowodów istnienia skwantowanych wpływów magnetycznych.

Wspomnę jeszcze o rozprawie *Über einige Lichtensteinsche Hilfssätze der Potientialtheorie und ihre Anwendung auf die Hydrodynamik* H. Schuberta. Zainicjował ją Lichtenstein, a zakończona została w 1935 u mnie. Rozprawa ta przenosi skomplikowane oszacowania teorii potencjału w przestrzeni na przypadek płaski, dwuwymiarowy z pewnym warunkiem i stosuje je do zagadnienia początkowego dla płaskiego przepływu cieczy nieściśliwej.

W ostatnich latach życia Lichtensteina dowiedzieliśmy się o sensacji hydrodynamicznej: młody polski matematyk Wolibner rozwiązał globalnie względem czasu dwuwymiarowe zagadnienie początkowe. O tym opowiadał Lichtenstein, a ja samodzielnie znalazłem potem inne wyprowadzenie jego oszacowań. W końcu Schaefer podał dla ruchu szeregi potęgowe względem czasu t, które są zbieżne bez ograniczeń.

Za pomocą oszacowań pochodnych potencjałów w nieograniczonych obszarach płaszczyzny rozwiązałem podczas wojny zagadnienie stacjonarnego gazodynamicznego opływu wokół znajdującego się w płaszczyź-

nie R^2 profilu z kątami, przy małej liczbie Macha (Por. mój: Bericht IBFZ BS 72/1, *Beiträge zur mathematischen Behandlung des Umströmungsproblems der Gasdynamik*, DFGLR, 1972).

Globalnie, dla szybkości dowolnie bliskich szybkości dźwięku, dowód istnienia można przeprowadzić tylko dla obszarów ograniczonych i profilów bez kątów, metodą przedłużania pochodzącą od Schaudera i Leraya (w tomie Math. Z. 72 (1960) poświęconym pamięci Lichtensteina). Bers badał to zagadnienie w nieograniczonych obszarach przepływu, stosując metody odwzorowań konforemnych (Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954), str. 441–504). Również badane przez Bersa drugie zagadnienie brzegowe dla powierzchni minimalnych w dopełnieniu walca (Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951), str. 465–491) stanowi pewne rozsądne adiabatyczne przybliżenie zagadnienia opływu wokół profilu.

Klasyczne prace Müntza i Korna związane z zagadnieniami brzegowymi powierzchni minimalnych, które Lichtenstein znacznie rozszerzył i uogólnił na regularne powierzchnie ekstremalne można znaleźć — jak właściwie wszystko o powierzchniach minimalnych — w książce: J. C. C. Nitsche, *Vorlesungen über Minimalflächen* (Berlin–Heidelberg–New York 1975).

Równania całkowe

5. Monografia Lichtensteina (I) *Integro- und Differentialgleichungen* wprowadza w klasyczny sposób (uogólniona teoria E. Schmidta) w analizę nieliniową i daje wiele zastosowań. Przede wszystkim rozwiązania w otoczeniu znanego (ewentualnie trywialnego) rozwiązania były otrzymywane metodą kolejnych przybliżeń. Również były badane zagadnienia globalne. Postawiony mi raz jeszcze przez Schaudera zarzut, że Lichtenstein w każdym przypadku szczególnym dowodził metodą kolejnych przybliżeń tego, co wynika obecnie z twierdzenia Banacha o punkcie stałym, nie dotyczy książki (I). W owych czasach pojęcia ukształtowane przez Banacha stosowano bojaźliwie.

Taki sposób przedstawienia dał Lichtensteinowi okazję zreferowania swoich wcześniejszych badań ([4], [5]) dotyczących liniowych równań cząstkowych, głównie w przypadku dwu zmiennych niezależnych, a w szczególności pierwszego i drugiego zagadnienia brzegowego oraz zagadnienia na wartości własne.

Nieliniowe zagadnienia, w szczególności zagadnienia wariacyjne ([30], [31]), prowadzą w tzw. „przypadku osobliwym" do dyskusji równań bifurkacji, z czym można wiązać dyskusję stabilności i jej zmiany. Gra to dziś wielką rolę. Przypadek osobliwy zachodzi, gdy pojawiające się tu liniowe równania wariacyjne Jacobiego mają funkcję własną. Dla takich właśnie liniowych równań różniczkowych (zwyczajnych i cząstko-

wych) Lichtenstein badał zagadnienia brzegowe i na wartości własne, korzystając z metody Hilberta nieskończenie wielu zmiennych ([27], [28]). Rozszerzone tą metodą przez Lichtensteina kryterium wartości własnych liniowych równań różniczkowych Jacobiego w zagadnieniu minimum powierzchni ekstremalnych ([29]–[31]) stanowi uogólnienie słynnych badań H. A. Schwarza ([8]) dotyczących powierzchni minimalnych.

Badania Lichtensteina zwyczajnego jednowymiarowego zagadnienia wariacyjnego ([29]) zostały rozszerzone w rozprawie H. Boernera ([9]) m. in. na jednowymiarowe zagadnienia wariacyjne wyższych rzędów. Potem uczynił to E. Hölder w przypadku ekstremali zagadnienia wariacyjnego Lagrange'a badanego przez Carathéodory'ego (w poświęconym pamięci Lichtensteina tomie Prac Matematyczno-Fizycznych 43 (1935), str. 307–346, również w Acta Math. 70 (1939), str. 193–242, Math. Ann. 148 (1962), str. 214–225).

Badania Lichtensteina dwuwymiarowych zagadnień wariacyjnych ([28], [31]), w szczególności liniowego zagadnienia na wartości własne, przeniósł później w Moguncji E. Hölder na wielowymiarowe eliptyczne zagadnienia wariacyjne (wiele niezależnych zmiennych i wiele poszukiwanych funkcji, Math. Ann. 148 (1962), str. 214–225). Nadto S. Hildebrandt podał samodzielnie ostateczne wyniki (Math. Ann. 148 (1962)) przez zastosowanie rezultatów Hestensa dotyczących eliptyczności.

W przypadku nieliniowych zagadnień wariacyjnych lokalna metoda rozwiązywania może prowadzić do globalnych rozwiązań za pomocą metody przedłużania przez zastosowanie oszacowań Schaudera przy przyjętych *a priori* ograniczeniach.

Równaniami cząstkowymi w przypadku, gdy liczba zmiennych niezależnych przewyższała 2, a funkcji niewiadomych było wiele, Lichtenstein zajmował się mało. Dziedzinę tę rozwinął w swych pracach przede wszystkim Morrey. Stosuje się tu głównie metody wariacyjne, których Lichtenstein używał tylko wyjątkowo. Również pojawiły się całkiem nowe przestrzenie funkcji z uogólnionymi pochodnymi (dystrybucje, przestrzenie Sobolewa). W tych przestrzeniach najpierw poszukuje się (metodami wariacyjnymi) rozwiązania słabego, a następnie pokazuje jego regularność.

W książce (I) podane są konkretne zastosowania dotyczące figur równowagi i hydrodynamiki, dla których ta metoda pasuje jak ulał, np. fale wodne Levi-Civity, których potencjalno-teoretyczne badania za pomocą nieliniowych równań całkowych Lichtenstein dał jako temat roz-

([8]) W uroczystym tomie poświęconym Weierstrassowi, Acta Soc. Scient. Fennicae 15 (1888), str. 315–362.

([9]) Math. Zs. 34 (1931), str. 293–319 i Math. Z. 35 (1932), str. 161–189, zagadnienia na wartości własne.

prawy F. Neumannowi (Lipsk 1930, ustalone, bezwirowe ciecze w kanałach), a następnie uprościł w swej książce.

Do tego rodzaju zagadnień o swobodnym brzegu stosuje się — rzecz jasna — również inne metody. Wspomnę tu o tych, które opisał H. Beckert, a nadto przedstawił E. Zeidler w nowej monografii *Beiträge zur Theorie und Praxis freier Randwertaufgaben* (Schriftenreihe d. Inst. f. Math. bei der DAW(A)Z, Berlin 1971), która w wielu miejscach opiera się na klasycznej monografii Lichtensteina.

Poza tym monografia ta zawiera rozmaite inne zagadnienia, które są sklasyfikowane pod kątem stosowania przedstawionych metod, oraz rozważa fale występujące w praktyce.

Figury równowagi

6. Okres lipski Lichtensteina rozpoczął jego wykład inauguracyjny [32] pt. *Astronomia i matematyka w wzajemnym oddziaływaniu* (1923). Później (1928) miał — dobrze przygotowany przez uprzednie wykłady z teorii potencjału, mechaniki i hydromechaniki — wykład o hipotezach kosmologicznych; w tym wykładzie Lichtenstein szkicował zagadnienia ciał niebieskich, które później częściowo jego uczniowie, w kierowanych przezeń rozprawach badali i dalej rozwijali.

W związku z figurami równowagi Lichtenstein zainteresował się młodym matematykiem w swej ojczystej Polsce. Był to Nikliborc. Udowodnił ogólnie on ograniczenie szybkości kątowej (połowa Poincarégo), którą Crudeli znalazł tylko dla figur wypukłych, oraz znalazł ograniczenia dla spłaszczenia (Math. Z. 31 (1929), str. 366–377 i Math. Z. 34 (1931), str. 74–90). Topolog Mazurkiewicz podał ograniczenie e^{268050} na rozciągnięcie osi figury równowagi, które ja (tamże, str. 754) nieistotnie obniżyłem do wartości e^{9000}, chociaż prawdopodobnie wynosi ona 1; jednakże to Nikliborc osiągnął w tej dziedzinie istotny sukces.

Kostitzin również przyczynił się do książki (G) poprzez swój artykuł o równaniu Clairauta w teorii ziemi.

Można wydzielić trzy grupy badań, które stanowiły podstawę książki (G) Lichtensteina:

(a) *Badania figur równowagi*, gdzie należą:

I. ciecze jednorodne [33];

II. poprawność i przede wszystkim stabilność [34];

III. niejednorodne ciecze; kształt ziemi [35].

Do I dochodzą jeszcze motywacje wyrażone w [30].

(b) Pod tytułem *Badania nad kształtem ciał niebieskich* pojawiły się:

I. teoria Laplace'a księżyca ziemi [36];

II. „gwiazdy podwójne" [37];

III. pierścieniowe figury równowagi (bez ciał centralnych) [38];

IV–VI. teoria Maxwella pierścieni Saturna [39], [40], [41];

VII. ponadto jeszcze pewne zagadnienie początkowe [42].

(c) Z zakresu *Badań kosmologicznych* ukazała się tylko

I. *O dwu masach jednostkowych skupionych w jednym punkcie* [43].

Oprócz tego istnieją jeszcze badania oceanu, które Lichtenstein — przy mocniejszych założeniach — jeszcze raz uprościł i umieścił w wykładach przeznaczonych do wygłoszenia w Adorf w Szwajcarii; praca ta została wydana przez K. Maruhna, patrz niżej.

Lichtenstein, na krótko przed śmiercią w 1933 r., skończył swe ostatnie dzieło o figurach równowagi. W tym dziele podał on bardzo dobry przegląd wszystkich badań — zarówno swoich, jak i swych współpracowników — w tej dziedzinie.

F. W. Levi uważał, że jedyną pociechą po śmierci Lichtensteina jest to, że dzieło swego życia zdołał zakończyć książką o figurach równowagi. Tak jest rzeczywiście, nie dotyczy to jednak specjalnych dziedzin figur równowagi i ciał niebieskich oraz innych jego zamierzeń naukowych (w rodzaju teorii spektralnej osobliwych równań różniczkowych).

Wielką niespodzianką było dla mnie, gdy pani Lichtenstein po śmierci męża przekazała mi dwa rękopisy wykładów, które zamierzał on wygłosić w Adorf. Te dwa opracowania [44], [45], które wydaliśmy wspólnie z K. Maruhnem, przyniosły całkowicie nową metodę dowodu istnienia figury równowagi. Dotychczas prowadziło się subtelne wyznaczanie odległości ζ od figury sąsiedniej za pomocą metod geometrii różniczkowej, teraz natomiast okazało się, że wystarczy tylko wyznaczyć H-warunek dla ζ, a pochodne są zupełnie niepotrzebne. Wszystko się znakomicie uprościło.

J. F. G. Auchmuty w swej pracy *Existence of Axisymmetric Equilibrium Figures* (Arch. Ration. Mech. 65 (1977)) rozwinął całkowicie nową, bezpośrednią metodę wariacyjną badania figur równowagi wirujących cieczy, jednak tylko symetrycznych względem osi obrotu. Z uczniów Lichtensteina E. Kähler i E. Hölder zajmowali się ogólną teorią figur równowagi. Pierwszy z nich w swej rozprawie (Math. Z. 28 (1928), str. 220–237), badając zagadnienie 3 ciał w mechanice nieba zwrócił uwagę na to, że figury równowagi na ogół nie mają płaszczyzny symetrii przechodzącej przez oś obrotu; mają one tylko płaszczyznę symetrii prostopadłą do osi obrotu, której istnienie wykazał ogólnie jako pierwszy Lichtenstein.

E. Hölder w swej rozprawie o figurach równowagi z napięciami powierzchniowymi (Math. Z. 25 (1926), str. 188–208), które wydają się właściwym modelem dla ciała niebieskiego ograniczonego stałą skorupą, podał przyczynki do ogólnej teorii: o traktowaniu trywialnych równań rozgałęzienia, które pochodzą z niezmienniczości zagadnienia względem grupy Liego przekształceń, dzięki czemu są one „trywialne" i pozwalają

się badać; to prowadzi do zamknięcia uzasadnionej przez Lichtensteina teorii księżyca ziemi (Leipz. Berichte 1926, str. 21–36).

Od E. Höldera pochodzą również przyczynki do teorii Lichtensteina stabilności figur równowagi (tamże, str. 23), które w przypadku niejednorodnych figur nie były do tego czasu podejmowane. Rozprawa habilitacyjna E. Höldera (Math. Z. 31 (1927), str. 197–257) zawiera badania okresowych torów w zagadnieniu wielu ciał (małe planety, Hilla wariacyjne tory księżyca). W rozprawie jest przedstawiona metoda badania równań rozgałęzienia za pomocą funkcji (uogólnionej) Greena, stosowanej do członów liniowych równania, oraz metody kolejnych przybliżeń, a następnie równań rozgałęzienia, stosowanej do członów nieliniowych; tak postępował Lichtenstein w teorii pierścieni Saturna. Metoda ta różni się od metody nieskończenie wielu zmiennych Hilla i Wintnera oraz od metody ciągłości Poincarégo.

7. W epilogu swej monografii [G] mówi Lichtenstein o „rozszerzeniach tej książki", które „prawie wyłącznie będą miały charakter matematyczny ...", ale „powstały one z badań kwestii astrofizycznych czy kosmologicznych": „Być może wyniki i metody przedstawione w tej książce ... w dalszej rozbudowie teorii atmosfery planet, powstawania satelitów, a możliwe że i teorii gwiazd podwójnych itp. uzyskają w astronomii bardziej praktyczne znaczenie. W związku z tym ... wprowadzanie dalszych parametrów fizycznych w przechodzeniu od jednej kontynuacji do następnej ... rozpatrywanych konfiguracji rozwoju według pewnego łańcucha quasi-stacjonarnych stanów jest pożądane". W taki sposób prawdopodobnie należy rozwijać model gwiazdy znajdującej się w głównym ciągu.

Garten, a szczególnie Maruhn zajmowali się satelitami Rochego, pierścieniowymi figurami równowagi z ciałami centralnymi i bez, niejednorodnymi figurami równowagi o charakterze gwiazdy podwójnej, które skupiają się w jednym punkcie, oraz figurami równowagi z kantem.

W owym epilogu obiekty swoich badań nazywa Lichtenstein „praciałami Laplace'a" [36]; w związku z tym powstała praca Maruhna (Math. Z. 37 (1933), str. 463–478), w której bada się niejednorodne figury równowagi z kantem. To znakomicie pasuje do modelu rozwiniętego przez O. Struve jun. w 1931 dla gwiazd bardzo szybko wirujących, tzw. *typu Be* i z otoczką, które na równiku stale tracą energię; są one bliskie „pierścieniowym" modelom saturnopodobnym i zwartym gwiazdom podwójnym z wymianą materii; również Lichtenstein i Maruhn rozważali tego typu modele. Porównaj w związku z tym: A. Slettebak (redaktor), *Be and Shell Stars*, IUA Symp. 1976, cyt. na podstawie opinii D. Lemkego o tej książce zamieszczonej w czasopiśmie Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung 1 (1977).

Lichtenstein w zakończeniu swej książki *Hydromechanik*, (H), str.

338, po omówieniu stacjonarnej kuli gazowej Emdena powiada: „Także Eddington zadowala się rozważaniami stacjonarnej masy gazowej. Systematyczne badanie zagadnienia równowagi gwiazdy z równowagą promieniowania przy uwzględnieniu siły odśrodkowej stanowi w chwili obecnej otwarty problem". Tu właśnie Lichtenstein wskazuje w swoim przypisku na pracę: H. von Zeipel, *Zum Strahlungsgleichgewicht der Sterne*. Praca ta, wobec istnienia wirowania i wytwarzania energii, stłumiła entuzjazm Lichtensteina związany z odkryciem Emdena, że można by zbadać równowagę promieniowania w gazie politropowym (o stałym wykładniku $n = 3$).

W istocie przy obliczeniach dotyczących nowoczesnych modeli gwiazd robi się różne realistyczne założenia dotyczące strefy promieniowania lub równowagi konwekcyjnej (politropowej), równania stanu, nieprzeźroczystości $\varkappa$ i wytwarzania energii ε które zależą od innych jeszcze parametrów, jak np. od cząstek wodoru X i helu Y.

O tym wszystkim daje pełny obraz piękne przedstawienie M. Schwarzschilda *Structure and Evolution of the Stars* (Princeton, New Jersey 1958; por. mój zarys w Mitt. Mat. Sem. Giessen 123 (1977), str. 195–227). Teoria ta odnosi się głównie do stacjonarnej kuli gazowej i niewiele ulega wpływowi klasycznej teorii figur równowagi wirujących cieczy.

Oczywiście przy strukturach takich mas gazowych wirowanie figury ma drugorzędne znaczenie dla astrofizyki. Jednakże odkształcenie uwarstwień poprzez obrót wraz z rozbieżnością strumieni promieniowania powodują trudności oraz zapoczątkowują procesy mieszania w gwieździe, które chciałoby się pominąć; również wywołany tym zakłóceniem obrót linii absyd toru eliptycznego gwiazdy podwójnej stanowi test jej struktury, który jest stosowany praktycznie, p. M. Schwarzschild, str. 154 i 175.

W związku z tym Schwarzschild sam powiada: „Odległość poziomic odkształconych przez wirowanie w stosunku do początkowego stanu stacjonarnego jest małą rzędu 1. Dlatego też dla pozostałych wielkości można przyjąć zerowy rząd przybliżenia, jak również i dla wielkości wyjściowych z niezakłóconego modelu w stanie stacjonarnym — bez obawy o zakłócenie termicznej równowagi gwiazdy".

Zatem można — w przybliżeniu pierwszego rzędu — za wyjściową figurę (która poprzednio była numerycznie obliczona według nowoczesnego modelu) przyjąć strukturę kulistą. Wówczas jednak otrzymuje się, jak to wykazałem w ostatnio cytowanej pracy — z klasycznej teorii niejednorodnych figur równowagi Clairauta–Liapunowa–Lichtensteina — dokładnie równania różniczkowe dla przybliżenia pierwszego rzędu odkształcenia poziomic, wartości spłaszczenia gwiazdy czy też ruchu absyd gwiazdy podwójnej. Teoretycznie, z przybliżonych obliczeń wyłania się problem, jak ustalić związek między cyrkulacją wywołaną rozbieżnością strumienia promieniowania (jako stacjonarnego ruchu w wirującej gwieździe) a postacią powierzchni stałej gęstości.

Zakończenie

8. Omówiłem tu badania Lichtensteina, jak również to, co się z nimi wiązało. Ocenę tych badań wyraża pośmiertne wspomnienie o nim opracowane przez mego ojca, Otto Höldera ([10]). W przygotowywaniu tego wspomnienia byłem pomocny i ja, dzięki dokładnej znajomości wielu prac Lichtensteina. Niestety, Akademia Saska pominęła w druku spis publikacji Lichtensteina (opracowany własnoręcznie przez O. Höldera). Cytuję jedynie wspomniane przeze mnie prace Lichtensteina (w nowej numeracji) ([11]).

Literatura

[1] *Beweis des Satzes, dass jedes hinreichend kleine, im wesentlichen stetig gekrümmte, singularitätenfreie Flächenstück auf einen Teil einer Ebene zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet werden kann*, Abh. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 1911, Anfang (praca habilitacyjna).

[2] *Über die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken*, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 140 (1911), str. 100.

[3] *Über das Poissonsche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials*, ibidem 141 (1912), str. 12.

[4] *Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. I. Die ersten Randwertaufgaben. Allgemeine ebene Gebiete*, ibidem 142 (Schwarz-Heft) (1913), str. 1.

[5] *Dasgl. II. Abteilungsweise stetige Koeffizienten. Das zweite Randwertproblem. Gemischte Randwertbedingungen*, ibidem 143 (1913), str. 51.

[6] *Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung. Methode der unendlich vielen Variablen*, ibidem 145 (1915), str. 24.

[7] *Zur Variationsrechnung. Zweite Mitteilung. Das isoperimetrische Problem*, ibidem 165 (1931), str. 194.

[8] *Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Die erste Randwertaufgabe für analytische Gebiete mit Ecken*, Acta Math. 36 (1913), str. 345.

[9] *Integration der Differentialgleichung* $\Delta_2 u = ke^u$ *auf geschlossenen Flächen, Methode der unendlich vielen Variablen*, Acta Math. 40 (1916), str. 1.

[10] *Zur Theorie der konformen Abbildung. Konforme Abbildung nichtanalytischer, singularitätenfreier Flächenstücke auf ebene Gebiete*, Bull. Acad. Sci. Cracovie 1916, str. 192.

[11] *Über den analytischen Charakter der Lösungen regulärer zweidimensionaler Variationsprobleme*, ibidem 1913, str. 916.

([10]) Por. notkę ([4]) ze str. 188 (*przyp. red.*).

([11]) Pełny spis prac Lichtensteina ukazał się w Wiadomościach Matematycznych 38 (1935), 137–157, uzupełniony pięcioma publikacjami pośmiertnymi przez D. Przeworską-Rolewicz, Wiadom. Mat. 22 (1979), str. 113. Pełny spis prac zawierający 164 pozycje znajduje się w jej artykule *Leon Lichtenstein 1878–1933*, Wissenschaftliche Zeitschrift Karl Marx Universität Leipzig 29 (1980), str. 15–26 (*przyp. red.*).

[12] *Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung*, Enzyklop. d. math. Wiss. II C 3, str. 177, B. G. Teubner, Leipzig 1918.

[13] *Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, ibidem C 12, str. 1277, Leipzig 1924.

[14] *Grundlagen der Hydromechanik*, Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften Bd. 30, J. Springer, Berlin 1929.

[15] *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen*, J. Springer, Berlin 1931.

[16] *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten*, J. Springer, Berlin 1933.

[17] *Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze*, Math. Z. 23 (1925), str. 89.

[18] *Ergänzungen zu der vorstehenden Abhandlung*, ibidem 23 (1925), str. 310.

[19] *Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Zweite Abhandlung. Nichthomogene, unzusammendrückbare, reibungslose Flüssigkeiten*, ibidem 26 (1926), str. 196.

[20] *Das gleiche. Dritte Abhandlung. Permanente Bewegungen einer homogenen, inkompressiblen, zähen Flüssigkeit*, ibidem 28 (1928), str. 387.

[21] *Das gleiche. Vierte Abhandlung. Stetigkeitssätze. Eine Begründung der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie geradliniger Wirbelfäden*, ibidem 32 (1930), str. 608.

[22] *Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. I*, ibidem 23 (1925), str. 72.

[23] *Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. II*, Ber. d. math.-phys. Kl. d. Sächs. Akad. d. Wiss. 78 (1926), str. 147.

[24] *Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. III*, ibidem, str. 213.

[25] *Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. IV*, ibidem 82 (1930), str. 265.

[26] *Über einen Einwand gegen das Newtonsche Attraktionsgesetz. Ein Problem der Dynamik vollkommen inkohärenter, gravitierender Medien*, Math. Z. 27 (1928), str. 607.

[27] *Zur Analysis der unendlich vielen Variablen. I. Entwicklungssätze der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Rend. d. Circ. mat. d. Palermo 38 (1914), str. 113.

[28] *Das gleiche. Zweite Abhandlung: Reihenentwicklung nach Eigenfunktionen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Math. Z. 3 (1919), str. 127.

[29] *Zur Variationsrechnung. Erste Mitteilung*, Nachr. d. Gesellschaft d. Wiss. z. Göttingen, math.-physikal. Kl. 1919, str. 161.

[30] *Untersuchungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme. I. Das einfachste Problem bei fester Begrenzung. Jacobische Bedingung und die Existenz des Feldes. Verzweigung der Extremalflächen*, Monatshefte f. Math. u. Phys. 28 (1917), str. 3.

[31] *Das gleiche. Zweite Abhandlung. Das einfachste Problem bei fester und freier Begrenzung*, Math. Z. 5 (1919), str. 26.

[32] *Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung*, S. Hirzel, Leipzig 1923.

[33] *Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender, homogener Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen*, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 48 (1918), str. 1120.

[34] *Untersuchungen über die Gleichgewichsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Zweite Abhandlung. Stabilitätsbetrachtungen*, Math. Z. 7 (1920), str. 126.

[35] *Das gleiche. Dritte Abhandlung. Nichthomogene Flüssigkeiten. Figur der Erde*, ibidem 36 (1933), str. 481.

[36] *Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Erste Abhandlung. Die Laplacesche Theorie über die Gestalt des Erdmondes*, Math. Z. 10 (1921), str. 130.

[37] *Das gleiche. Zweite Abhandlung. Eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit*, ibidem 12 (1922), str. 201.

[38] *Das gleiche. Dritte Abhandlung. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper*, ibidem 13 (1923), str. 82.

[39] *Untersuchungen über die Figur der Himmelskörper. Vierte Abhandlung. Zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe*, ibidem 17 (1923), str. 62.

[40] *Das gleiche. Fünfte Abhandlung. Neue Beiträge zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe*, Aus: *Probleme der Astronomie*, Festschrift f. H. Seeliger. J. Springer, Berlin 1924, str. 200.

[41] *Untersuchungen über Gestalt der Himmelskörper. Sechste Abhandlung. Weitere Beiträge zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe*, Ann. d. Scuola Normale sup. d. Pisa, Serie II, Vol. I, Fasc. I–II (1932), str. 173.

[42] *Das gleiche. Siebente Abhandlung. Beiträge zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe. Anfangswertproblem*, Math. Z. 37 (1933), str. 424.

[43] *Kosmogonische Untersuchungen. I. Eine aus zwei Einzelmassen, die einen Punkt gemeinsam haben, bestehende Gleichgewichtsfigur nichthomogener Flüssigkeit*, Ber. d. math.-phys. Kl. d. Sächs. Akad. d. Wiss. 80 (1928), str. 35.

[44] *Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren homogener Flüssigkeiten* (opracowane przez E. Höldera), Math. Z. 39 (1935).

[45] *Zur mathematischen Theorie der Gestalt des Weltmeeres* (opracowana przez K. Maruhna), Prace mat.-fiz. 43 (1936).