ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXIV (1982)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Rozwiązanie zadania

263. Niech $F\colon \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$, gdzie $\boldsymbol{R}_+$ oznacza zbiór wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych, będzie działaniem spełniającym następujące warunki:

1° $F(a, F(b, c)) = F(F(a, b), c)$,

2° $F(a, b) = F(b, a)$,

3° $F(a, 0) = a$ i $F(0, b) = b$,

4° funkcja F jest ciągła i niemalejąca ze względu na każdą ze zmiennych.

Niech $k\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ będzie taką funkcją, że $k(u) > 0$ dla każdej dodatniej liczby u. Mówimy, że funkcja k jest *F-superaddytywna*, gdy

$$F\big(k(a), k(b)\big) \leqslant k(a+b) \qquad \text{dla dowolnych } a, b \in \boldsymbol{R}_+.$$

Czy dla każdego działania F istnieje funkcja F-superaddytywna? Jeżeli tak nie jest, to scharakteryzować zbiór tych F, dla których istnieją funkcje F-superaddytywne.

J. Musielak (Poznań), *J. Peetre* (Lund)

(Rozwiązanie częściowe). Rozważmy nierówność funkcyjną

$$k(a+b) \geqslant F(k(a), k(b)) \qquad \text{dla } a, b \in \boldsymbol{R}_+, \tag{1}$$

oraz równanie funkcyjne

$$\varphi(a+b) = F(\varphi(a), \varphi(b)) \qquad \text{dla } a, b \in \boldsymbol{R}_+, \tag{2}$$

gdzie $k\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ i $\varphi\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ są funkcjami niewiadomymi. Założenia 1°–3° oznaczają, że struktura $(\boldsymbol{R}_+, F)$ jest półgrupą przemienną z jednością. Jednością tej półgrupy jest 0. Rozważmy następujące przypadki:

I. Funkcja F jest ściśle rosnąca ze względu na każdą ze zmiennych. Przy założeniach 1°–4°, w tym przypadku możemy powtórzyć fragment rozumowania zamieszczony w monografii J. Aczéla *Lectures on functional equations and their applications*, Academic Press, New York and London 1966, str. 54–56, dowodzącego istnienia ściśle rosnącego rozwiązania równania (2) w klasie funkcji ciągłych i nieujemnych. Konstruowane tam rozwiązanie jest rozwiązaniem „na" i jest ono oczywiście rozwiązaniem

nierówności (1) w $\boldsymbol{R}_+$. Za pomocą skonstruowanego rozwiązania równania (2) można zresztą wyznaczyć wszystkie rozwiązania nierówności (1) w żądanej klasie funkcji. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie:

Jeżeli funkcja $F\colon \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ *spełnia warunki* 1°–3°, *a ponadto jest ciągła i ściśle rosnąca ze względu na każdą ze zmiennych, to ogólne rozwiązanie nierówności* (1) *dane jest wzorem*

$$k(x) = f(h(x)), \qquad x \in \boldsymbol{R}_+,$$

gdzie $f\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ *jest ciągłym i ściśle rosnącym rozwiązaniem równania* (2) *o wartościach na całym* $\boldsymbol{R}_+$, *zaś* $h\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ *jest dowolną funkcją nadaddytywną.*

Twierdzenie to można otrzymać z nieco ogólniejszego wyniku dowodzonego w rozprawie doktorskiej autora z 1978 roku.

II. Funkcja $F\colon \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ jest ciągła i niemalejąca na każdą ze zmiennych oraz istnieje przynajmniej jeden element $u > 0$, taki że

$$F(u, u) = u.$$

Wtedy szukaną w zadaniu funkcją $k\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ jest np. funkcja

$$k(x) = u, \qquad x \in \boldsymbol{R}_+.$$

Zauważmy, że jeżeli funkcja F ma więcej niż jeden dodatni idempotent, to istnieje niestałe rozwiązanie nierówności (1). Tak jest np. dla funkcji $F(a, b) = \max(a, b)$; funkcja k dana jest wtedy wzorem

$$k(x) = x, \qquad x \in \boldsymbol{R}_+.$$

III. Pozostaje jeszcze jeden możliwy przypadek. Funkcja F spełnia warunki 1°–4° i ma jedynie idempotent równy zeru (lecz nie jest ściśle rosnąca na każdą ze zmiennych). Nie wiem, czy taka funkcja F istnieje, a jeśli tak, to nie wiem, czy nierówność (1) ma rozwiązanie w żądanej klasie funkcji.

Podane powyżej rozważania można krótko wypowiedzieć w języku teorii równań funkcyjnych wielu zmiennych. W tym celu zauważmy najpierw, że założenia 1°–4° implikują następujące fakty:

(a) Każde niestałe i nieujemne rozwiązanie równania (2) w $\boldsymbol{R}_+$ jest funkcją niemalejącą.

(b) Każde rozwiązanie równania (2) powtarzające zero w $\boldsymbol{R}_+$ jest funkcją tożsamościowo równą zeru.

Zatem: Jeżeli funkcja F spełniająca warunki 1°–4° dopuszcza niezerowe rozwiązanie równania (2) w $\boldsymbol{R}_+$, to rozważany problem ma pozytywne rozwiązanie. Jeżeli taka funkcja F dopuszcza tylko rozwiązania zerowe, to nie wiadomo, czy nierówność (1) ma rozwiązania w żądanej klasie funkcji. Nie wiadomo także, czy taka funkcja istnieje.

W związku z podanym rozwiązaniem nasuwa się jeszcze jedno pytanie, a mianowicie, jaki jest opis wszystkich rozwiązań nierówności (1), gdy funkcja F spełnia warunki 1°–4° i ma przynajmniej jeden idempotent różny od zera? Czy wtedy równanie (2) ma rozwiązanie niestałe?

Z. Powązka (Kraków)