ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXV (1983)

wmptm 1897

STANISŁAW HARTMAN (Wrocław)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Przegląd współczesnych problemów przemiennej analizy harmonicznej

Na tle książki: Colin C. Graham i O. Carruth McGehee, *Essays in Commutative Harmonic Analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 238, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1979, str. XXI+464, cena DM 88,–. ISBN 3-540-90426-3.

Przemienna analiza harmoniczna wyrosła z teorii szeregów Fouriera i z teorii dualności Pontriagina. To uproszczenie. Należałoby wymienić jeszcze Bohra, Weila, Gelfanda, Wienera, Sidona... Trudno wiedzieć, gdzie się zatrzymać szukając genezy teorii matematycznej. Ale odkrycie Pontriagina, wiążące szeregi i całki Fouriera z algebrą i topologią, stworzyło wyższy punkt widzenia. Dzięki niemu elementy harmoniczne, jakimi są funkcje wykładnicze o urojonym argumencie, ukazały się jako charaktery grupy koła lub grupy liczb rzeczywistych, a twierdzenia takie jak równość Parsevala lub nierówność Hausdorffa–Younga jako przypadki ogólnych prawidłowości związanych ze strukturą algebraiczną i topologiczną grupy przemiennej lokalnie zwartej.

Główną korzyścią płynącą z tego szerszego spojrzenia jest nie tyle objęcie badaniami całej tej klasy grup, ile powstanie nowych metod, które wzbogaciły analizę harmoniczną już w przypadku koła i prostej. W pierwszych dziesięcioleciach po II wojnie światowej dawano tej nowej analizie harmonicznej przydomek „abstrakcyjna", teraz już rzadko używany (ale zachowany np. przez *Mathematical Reviews*), bo abstrakcji w tym nie tak znów wiele, a kto chciałby się wyrzekać skuteczniejszych metod w imię „konkretu"? Chodzi zatem naprawdę nie o „abstrakcyjną", lecz o współczesną analizę harmoniczną. Jej to właśnie jest poświęcona książka Grahama i McGehee.

Essays... Słownik oksfordzki podaje znaczenie podobne do polskiego „eseju" – utwór prozą, zwykle krótki, na dowolny temat. Eseje matematyczne – tego chyba jeszcze nie było, ale autorzy dobrze wybrali tytuł, ponieważ, jak sami w przedmowie piszą, porządek rozdziałów w książce nie ma takiego znaczenia, jak zwykle, i można je czytać niezależnie, jeśli się tylko zna symbole i terminy. Dodajmy, że długą listę symboli wraz z ich wytłuma-

czeniem podali autorzy na początku. W większości są one zrozumiałe dla tych, którzy znają dzieła przez nich polecane w krótkim wstępie zatytułowanym *Prerequisites* (np. Rudina, Hewitta-Rossa, Katznelsona, Kahane'a).

Mamy więc 13 esejów o przemiennej analizie harmonicznej na 412 stronicach. W przedmowie czytamy: *This book considers various spaces and algebras made up of functions, measures, and other objects – situated always on one or another locally compact abelian group, and studied in the light of the Fourier transform. The emphasis is on the objects themselves, and of the structure-in-detail of the spaces and algebras. A mathematician needs to know only a little about Fourier analysis on the commutative groups, and then may go many ways within the large subject of harmonic analysis – into the beautiful theory of Lie group representations, for example. But this book represents the tendency to linger on the line, and the other abelian groups, and to keep asking questions about the structure thereupon. That tendency, pursued since the early days of analysis, has defined a field of study that can boast of some impressive results, and in which there still remain unanswered questions of compelling interest.*

Dalej autorzy wymieniają kilka nazwisk odkrywców, którzy wywarli największy wpływ na ich własną drogę naukową: J.-P. Kahane'a, Y. Katznelsona, P. Malliavina, .Y. Meyera, J. Taylora, N. Varopoulosa. W kilku słowach charakteryzują też dzieło naukowe S. Drury'ego, G. Browna i W. Morana oraz T. Körnera, z ostatniej dekady. Nawiązując do uwag, od których zacząłem tę recenzję, powtórzę jeszcze, jak autorzy się odnoszą do dylematu: czy dowolna grupa abelowa lokalnie zwarta, czy tylko koło lub prosta? Piszą mianowicie, że często musieli wybierać, ponieważ czasem lepiej widać istotę rzeczy, gdy się ograniczyć do konkretnej grupy (w domyśle bardzo klasycznej), oszczędzając sobie czysto technicznych komplikacji, a czasem pożyteczniej jest i „estetyczniej" ująć kwestię szerzej.

Po ostatnim trzynastym eseju następują jeszcze 52 stronice. W *Appendix* przypomina się niektóre dobrze znane pojęcia i twierdzenia, np. iloczyny Riesza, nierówność Bernsteina, rozszerzanie transformaty miary z podgrupy na całą grupę. Potem znajdujemy 25 stronic bibliografii (*References*), po 25–30 pozycji na każdej. Liczba cytowanych autorów wynosi około 400. Z polskich znalazłem (według alfabetu): Banacha, Hartmana, Marcinkiewicza, Milicer-Grużewską, Rajchmana, Rylla-Nardzewskiego, Steinhausa i Zygmunda. Zaledwie ośmiu i przeważnie dawnych. Widać stąd, że przemienna analiza harmoniczna we współczesnym kształcie to nie jest „polski" temat. 15 stronic zawiera indeks, w którym umieszczone są terminy razem z odsyłaczami do odpowiednich stronic tekstu i nazwiska z odsyłaczami do bibliografii, i także do tekstu.

Z olbrzymią literaturą autorzy obeszli się moim zdaniem najlepiej, jak mogli, nie przerywając wykładu ustawicznymi odsyłaczami, lecz umieszczając po każdym paragrafie *Uwagi* (*Remarks*) lub *Uznania i uwagi* (*Credits and*

Remarks), w których informują, od kogo pochodzą przedstawione właśnie wyniki i gdzie je można znaleźć.

Książka Grahama i McGehee ma cechy dobrego pisarstwa matematycznego. Napisana jest treściwie i zwięźle, ale nie nazbyt sucho i bez modnej dzisiaj przesadnej oszczędności wykładu, która zmusza czytelnika do ciągłego uzupełniania rozumowań. Tylko gdzieniegdzie przydałoby się więcej wyjaśnień. Te 13 esejów nie składa się ani na encyklopedię przemiennej analizy harmonicznej, ani na traktat, ani nawet na jedną monografię. Do ich czytania wystarczą, formalnie rzecz biorąc, poza „analizą I" podstawowe wiadomości o grupach, o przestrzeniach liniowo-topologicznych i o algebrach Banacha, pewne obeznanie z teorią miary i z pojęciami teorii prawdopodobieństwa i znajomość tylko głównych pojęć i wyników analizy harmonicznej. Jest to jednak dzieło, które się zrodziło na wysokim piętrze bardzo już rozwiniętej teorii i ma na celu ukazanie jej obecnego stanu, a przez to zdaje sprawę z wielu badań szczegółowych, finezyjnych, kwantytatywnych. Aby odczuć smak tych zagadnień, trzeba być z analizą harmoniczną trochę bardziej obeznanym. Dlatego książka nie nadaje się na podręcznik tego przedmiotu. Za to dla matematyka już weń wprowadzonego stanowi znakomitą pomoc, gdyż zawiera imponujący zasób wiedzy, a także otwarte problemy, którym poświęcony jest nawet specjalny rozdział (ostatni).

Książka została napisana przez autorów śledzących bez przerwy postępy analizy harmonicznej, do których zresztą sami znacznie się przyczynili. Mimo to, i mimo że książka wyszła zaledwie rok temu, jest już miejscami przestarzała (przykłady podam później). Tak być musi, gdyż matematyka w żadnym swoim żywym fragmencie nie da się schwytać i umknie każdej rejestracji.

Teraz postaram się opowiedzieć o treści kolejnych rozdziałów. Może z tego wyniknąć coś w rodzaju artykułu przeglądowego o obecnym stanie przemiennej analizy harmonicznej.

Tytuł rozdziału 1 brzmi: *Zachowanie się transformat* (znaczy: transformat Fouriera). Centralnym punktem pierwszych trzech paragrafów jest twierdzenie Cohena o idempotentach i następująca słynna hipoteza Littlewooda: dla każdego skończonego zbioru $E \subset Z$ mocy N

$$\|\sum_{n\in E} e^{in\cdot}\|_1 = \int_0^{2\pi} |\sum_{n\in E} e^{inx}|\, dx \geqslant C \log N, \tag{1}$$

gdzie C jest stałą uniwersalną. To oszacowanie nie może być wzmocnione, gdyż prawa strona daje dokładny rząd wielkości lewej, gdy $E = [1, N]$. Gdy Λ jest dowolnym zbiorem liczb całkowitych uporządkowanym według wielkości, to szereg $\sum_{n\in\Lambda} e^{inx}$ jest szeregiem Fouriera–Stieltjesa miary (borelowskiej na kole), dla której

$$\hat{\mu}(n) = \int_0^{2\pi} e^{-int}\, d\mu(t)$$

jest równe 1 lub 0 zależnie od tego, czy $n \in \Lambda$ czy $n \notin \Lambda$. Taka miara nazywa się *idempotentna*, gdyż zachodzi oczywiście równość $\mu * \mu = \mu$, gdzie $*$ oznacza splot. Z (1) wynika, że sumy częściowe tego szeregu dążą w normie L^1 do nieskończoności. Sprawa wyznaczenia wszystkich miar idempotentnych na kole, a tym bardziej na dowolnej grupie lca (tj. abelowej lokalnie zwartej) nie jest łatwa. Niech Γ oznacza $\hat{G}$ czyli grupę (topologiczną) charakterów G. Przez pierścień warstw (*coset ring*) grupy rozumie się najmniejszą rodzinę zbiorów zamkniętą względem dopełnień i skończonego dodawania (mnogościowego) oraz zawierającą wszystkie warstwy wszystkich otwartych podgrup Γ. Dowodzi się łatwo, że jeśli zbiór E należy do pierścienia warstw, to jego funkcja charakterystyczna jest transformatą miary, oczywiście miary idempotentnej. Znacznie trudniej jest dowieść, że innych miar idempotentnych nie ma. Udowodnił to H. Helson w przypadku $\Gamma = T$, a potem P. Cohen ogólnie. Autorzy podają późniejszy krótszy dowód.

Hipoteza Littlewooda dotyczy oczywiście norm (w przestrzeni $C^*(T)$) miar idempotentnych. Cohen był pierwszym, który udowodnił, że jeśli miary μ_N (na okręgu) mają gęstość $\sum_{n \in E_N} e^{inx}$ i $|E_N| = N$, to $\|\mu_N\| = \int \left| \sum_{n \in E_N} e^{inx} \right| dx \to \infty$. Faktycznie udowodnił więcej, a mianowicie, że nierówność (1) będzie prawdziwa, jeśli po prawej stronie napisać $C(\log N/\log\log N)^{1/8}$, a wtedy sumę pod całką po lewej stronie można zastąpić przez $\sum_{n \in E} c_n e^{inx}$, gdzie $|c_n| \geqslant 1$. Davenport podwyższył wykładnik w oszacowaniu Cohena do 1/4. Autorzy przedstawiają jego dowód z uogólnieniem na inne grupy. Pichorides poprawił ten wynik zastępując 1/4 przez 1/2, a później osiągnął $C(\log N)^{1/2}$. Autorzy podają dowód tego twierdzenia z nieznacznym wzmocnieniem. Dziś cały ten rozdział napisaliby inaczej, gdyż kilka miesięcy temu (piszę w maju 1981) jeden z nich (McGehee) wraz z L. Pigno i B. Smithem udowodnił (1). Ich dowód jest znacznie krótszy od wszystkich poprzednich.

W rozdziale 1 szacuje się także (od dołu) normę miary ciągłej, dla której $|\hat{\mu}(n)| \geqslant 1$ zachodzi dla „wielu" n. Wiadomo, że może tak być nawet dla nieskończenie wielu n. Zbiór tych n może być nawet gęsty w uzwarceniu Bohra (wracamy do tego przy omawianiu rozdziału 7), ale ma zawsze gęstość 0. Dalej znajdujemy twierdzenie Rajchmana: jeśli $\lim_{n \to \infty} \hat{\mu}(n) = 0$, to $\lim_{n \to -\infty} \hat{\mu}(n) = 0$. Twierdzenie to jest obecnie znane w różnych ostrzejszych postaciach, np. w formie ilościowych związków między $\limsup_{n \to \infty} \hat{\mu}(n)$ a $\limsup_{n \to -\infty} \hat{\mu}(n)$.

Następuje ważny dla analizy harmonicznej dowód nierównoważności dwóch norm dla miary na grupie nieskończonej, mianowicie normy $\|\mu\|$ czyli

$\|\mu\|_{C^*}$ i $\|\mu\|_{PM} = \|\hat{\mu}\|_\infty$. Oczywiście druga nigdy nie przekracza pierwszej. Znana konstrukcja Rudina i Shapiry prowadzi do ciągu miar μ_n, dla których $\|\mu_n\|/\|\mu_n\|_{PM} \to \infty$. Probabilistyczne oszacowania tego ilorazu (z dołu) dla miar na grupach skończonych zostały użyte przez Daviego do dowodu, że przestrzeń l^p dla $p > 2$ zawiera podprzestrzeń bez własności aproksymacyjnej. To wzmocnienie twierdzenia Enflo (za które jego autor otrzymał w nagrodę żywą gęś, wartą w tym wypadku tyle, co medal Fieldsa) stanowi zaskakujące zastosowanie analizy harmonicznej do zagadnień pochodzących z innej sfery matematyki.

Ostatni paragraf rozdziału 1 poświęcony jest pewnym warunkom dostatecznym na to, żeby funkcja mierzalna na danym zbiorze mierzalnym $E \subset \Gamma$ była prawie wszędzie równa transformacie jakiejś miary. Autorzy podają taki warunek: jeśli dla każdej miary μ o nośniku skończonym zawartym w E jest $\left|\int f d\mu\right| \leqslant C\|\hat{\mu}\|_\infty$, to istnieje taka miara ν na G, że $f = \hat{\nu}|E$ p.w. i $\|\nu\| \leqslant C$. W przypadku, gdy $E = \Gamma = \boldsymbol{R}$ i f jest ciągła, dostateczność tego warunku udowodnił już Bochner. Dodajmy, że badanie zwężeń transformat Fouriera funkcji całkowalnych lub miar do danego zbioru, zwykle do zbioru zamkniętego, stało się źródłem wielu głębokich problemów i twierdzeń. Zwężenia te tworzą algebrę Banacha z punktowym mnożeniem oznaczaną przez $A(E)$ (dla funkcji) lub $B(E)$ (dla miar). Dla zbiorów zwartych mamy $A(E) = B(E)$, gdyż algebra grupowa $L^1 = L^1(G)$ jest regularna i stanowi ideał w algebrze wszystkich miar $M = M(G)$ (z mnożeniem splotowym). Algebry $A(E)$ i $B(E)$ są obrazami homomorficznymi algebr $A(\Gamma) \simeq \hat{L}^1(G)$ i $B(\Gamma) \simeq \hat{M}(G)$. (Za normy w $A(E)$ i $B(E)$ przyjmuje się normy indukowane przez L^1 i M.)

Właśnie pewnym aspektom przestrzeni $A(E)$ poświęcony jest rozdział 2. Zbiór E nazywa się *zbiorem Helsona*, gdy $A(E) = C_0(E)$ (C_0 – przestrzeń funkcji ciągłych dążących do zera w nieskończoności). Gdy E jest zbiorem zwartym, można równie dobrze napisać $A(E) = C(E)$. Gdy grupa G jest zwarta, a więc Γ jest dyskretna, definicja zbioru Helsona przybiera postać $A(E) = c_0(E)$, a od czasów Banacha wiadomo, że to jest równoważne z warunkiem $B(E) = l^\infty(E)$; z kolei zbiór spełniający ten warunek w jakiejkolwiek grupie lca nazywa się *zbiorem Sidona*.

Pytanie, czy suma mnogościowa dwóch zbiorów Sidona jest zbiorem Sidona, długo pozostawało otwarte. Odpowiedział na nie twierdząco S. Drury w 1970 r. używając metod probabilistycznych. Zaraz potem Varopoulos przeniósł tę metodę na zbiory Helsona w grupach metrycznych, a pani F. Lust na dowolne grupy. Autorzy podają w rozdziale 2 inny dowód, pochodzący od Herza. Uzyskuje się przy tym pewną formę kwantytatywną twierdzenia o sumie dwóch zbiorów Helsona, mianowicie można oszacować dla niej tzw. stałą Helsona, tj. $\sup(\| \|_{A(E)}/\| \|_{C_0(E)})$, w zależności od stałych Helsona składników.

Przedmiotem rozdziału 3 jest synteza spektralna, jedno z kluczowych

zagadnień analizy harmonicznej. W przemiennej algebrze Banacha można wyróżnić takie ideały (zamknięte), które są przekrojami wszystkich zawierających je ideałów maksymalnych regularnych. Zdarza się, że innych nie ma. Wtedy mówi się, że *algebra ma syntezę*. Łatwo dowieść, że taka jest np. algebra $C(X)$ dla zwartej przestrzeni X i algebra grupowa $L^1(G)$ grupy przemiennej zwartej. A jeśli grupa jest lokalnie zwarta, ale niezwarta? Tu odpowiedź jest przecząca. Pierwszy przykład ideału w $L^1(G)$, który jest mniejszy od przekroju zawierających go ideałów maksymalnych regularnych, znalazł L. Schwartz w przypadku $G = \boldsymbol{R}^3$. Jest to ideał utworzony przez funkcje całkowalne, których transformata Fouriera znika na sferze x^2+ $+y^2+z^2 = 1$ wraz z pierwszą pochodną w kierunku normalnej. Trudniejsza do zbadania pod tym względem okazała się algebra $L^1(\boldsymbol{R})$. Pierwszy Malliavin udowodnił, że $L^1(G)$ nie ma syntezy dla żadnego niezwartego G. Potem pojawiły się inne dowody i różne wyniki szczegółowe. Dokładniejszą historię tych odkryć napisali autorzy we wstępie do rozdziału 3.

Funkcjonały na algebrze $A(\Gamma)$ nazywają się *pseudomiarami*. Są to dystrybucje, których transformaty Fouriera leżą w przestrzeni $L^\infty(G)$. Wiadomo dobrze, że grupa Γ jest przestrzenią Gelfanda algebry $L^1(G)$, a transformaty Gelfanda jej elementów są transformatami Fouriera. Regularność tej algebry oznacza, że każdy zbiór zamknięty $E \subset \Gamma$ jest zbiorem wspólnych zer transformat Fouriera funkcji tworzących pewien ideał zamknięty. Zbiór E nazywa się *kospektrum* tego ideału.

Jeśli E jest kospektrum jednego tylko ideału, to mówi się, że E *spełnia* (*obeys*) *syntezę*. Każdy zbiór zwarty o rozproszonym brzegu ma tę własność. Dowodzi się, że najmniejszy ideał o kospektrum E, oznaczany przez $J(E)$, powstaje przez domknięcie w normie $A(\Gamma)$ zbioru funkcji z $A(\Gamma)$ znikających w pewnym otoczeniu E. O funkcji $f \in A(\Gamma)$ mówi się, że spełnia syntezę, jeśli należy do $J(E)$, gdzie $E = f^{-1}(\{0\})$. Największy ideał o kospektrum E, $I(E)$, składa się ze wszystkich funkcji z $A(\Gamma)$ znikających na E, czyli jest przekrojem zawierających go ideałów maksymalnych regularnych.

Mówi się, że pseudomiara S *dopuszcza* (*admits*) *syntezę*, jeśli leży w anihilatorze ideału $I(E)$, gdzie $E = \operatorname{supp} S$. Znaczy to, że funkcja $\hat{S} \in L^\infty(G)$ leży w $*$-słabym domknięciu kombinacji liniowych tych charakterów grupy G (czyli elementów grupy Γ), które należą do nośnika S, innymi słowy, w $*$-słabym domknięciu wielomianów trygonometrycznych o widmie w $\operatorname{supp} S$. Inaczej jeszcze można to tak wyrazić: S leży w $*$-słabym domknięciu w przestrzeni pseudomiar $\mathrm{PM}(\Gamma)$ zbioru miar o nośniku skończonym zawartym w $\operatorname{supp} S$. Nie znaczy to, że S jest wtedy granicą $*$-słabo zbieżnego ciągu takich miar. Ten mocniejszy warunek jest przy założeniu ośrodkowości grupy G dokładnie wtedy spełniony, gdy S można aproksymować $*$-słabo przez ograniczone co do normy wielomiany trygonometryczne o widmie w $\operatorname{supp} S$. Zachodzi to w szczególności, gdy S jest miarą.

Zbiór E spełnia syntezę wtedy i tylko wtedy, gdy każda pseudomiara

w PM(E) (tj. o nośniku w E) leży w $*$-słabym domknięciu miar o nośnikach skończonych lub (co na jedno wychodzi) miar dyskretnych należących do $M(E)$, tj. do przestrzeni miar o nośniku w E. Mówi się, że E spełnia ograniczoną syntezę przez miary dyskretne, jeśli miary dyskretne na E leżą $*$-słabo ciągowo gęsto w PM(E).

Autorzy podają bez dowodu następujące twierdzenie Katznelsona i MacGehee: *dla każdej liczby porządkowej* $\alpha < \omega_1$ *istnieje taki zbiór* $E \subset \boldsymbol{T}$ *spełniający syntezę, że dla otrzymania całej przestrzeni* PM(E) *przez iterowany proces dołączania granic* $*$*-słabo zbieżnych ciągów, poczynając od miar w* E, *trzeba ten proces prowadzić aż do* α*-go rzędu.*

Autorzy przytaczają także wraz z dowodem znany warunek Herza dostateczny na to, żeby zbiór zamknięty w $\boldsymbol{T}$ spełniał ograniczoną syntezę przez miary dyskretne. Jest to pewien warunek o charakterze metrycznym, z którego w szczególności wynika, że triadyczny zbiór Cantora spełnia taką syntezę, a również, że do każdego zbioru zamkniętego na kole można dołączyć taki zbiór przeliczalny, żeby powstał zbiór z ograniczoną syntezą przez miary dyskretne. Omówiony jest też pewien wariant kryterium Herza pozwalający wskazać inne jeszcze zbiory o tej własności. W tymże rozdziale znajdują się dowody kilku twierdzeń o związku między regularnością funkcji z $A(T)$ a spełnianiem przez nie syntezy. Syntezę spełniają np. wszystkie funkcje klasy $\mathrm{Lip}\frac{1}{2} \cap A(\Gamma)$ i klasy $\mathrm{Lip}\alpha$ z $\alpha > \frac{1}{2}$ (te już zawsze należą do $A(\Gamma)$), a także wszystkie funkcje o wahaniu skończonym w $A(\Gamma)$.

W końcu znajdujemy dwa twierdzenia o niesyntetyczności algebry $A(\boldsymbol{T})$: Malliavina oraz Katznelsona i Salema. To drugie orzeka, że każdy zbiór postaci

$$\{\sum \varepsilon_j t_j\colon \varepsilon_j = 0 \text{ lub } 1\}, \quad \text{gdzie } t_j > 0, \quad \sum_{j+1}^{\infty} t_k < t_j \quad \text{oraz} \quad \sum t_j < 2\pi$$

zawiera podzbiór nie spełniający syntezy. Autorzy zapowiadają inne jeszcze metody dowodów dalej w książce. Dotyczy to w szczególności dowodu Varopoulosa w rozdziale 11.

Rozdział 4 nazywa się *Sets of uniqueness, Sets of multiplicity*. Są to pojęcia dopełnicze dające pewną klasyfikację zbiorów zamkniętych w $\boldsymbol{T}$. Nie bardzo umiem przetłumaczyć słowo *multiplicity* („zbiory wieloznaczności" brzmi zbyt intrygująco). Zbiory jednoznaczności nazywają się U, a pozostałe M. Zbiór jest U, jeżeli nie niesie żadnej niezerowej pseudofunkcji, a *pseudofunkcją* nazywa się pseudomiara, której transformata Fouriera dąży do zera w nieskończoności. W symbolach: E jest typu U, jeśli $\mathrm{PF}(E) = \{0\}$. Ta definicja jest tylko przekładem na język „dystrybucyjny" klasycznej definicji, która brzmi: zbiór E jest typu U, jeśli każdy szereg trygonometryczny o współczynnikach dążących do 0, zbieżny do 0 w każdym punkcie poza E, ma wszystkie współczynniki równe 0. Wiadomo od dawna, że nie każdy

zbiór miary 0 jest typu U, ale np. zbiór triadyczny Cantora jest zbiorem U. Piękne twierdzenie Salema głosi, że zbiór

$$\{\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j r^{-j}: \varepsilon_j = 0 \text{ lub } 1\} \quad (r > 2)$$

jest U wtedy i tylko wtedy, gdy r jest *liczbą Pisota*, to znaczy taką liczbą algebraiczną całkowitą, że wszystkie liczby z nią sprzężone leżą wewnątrz koła jednostkowego (a więc w szczególności, gdy r jest całkowite wymierne — warunek Pisota jest wtedy spełniony w próżnię).

Najciekawszym może punktem w rozdziale 4 jest twierdzenie o istnieniu zbiorów Helsona bez syntezy spektralnej. Zbudował taki zbiór T. Körner we wczesnych latach siedemdziesiątych. Problem był znany na długo przedtem. Przypomnijmy, że zbiór zwarty E w grupie nazywa się *zbiorem Helsona*, jeśli $A(E) = C(E)$. Inaczej można to wyrazić równością dualną $N(E) := A(E)^* = M(E)$. Zbiór zamknięty spełnia syntezę dokładnie wtedy, gdy $\mathrm{PM}(E) = N(E)$. Dla zbioru Helsona warunek ten pisze się $\mathrm{PM}(E) = M(E)$; na odwrót, wobec inkluzji $M(E) \subset N(E) \subset \mathrm{PM}(E)$ (dla każdego zbioru zamkniętego), ostatnia równość implikuje, że E jest zbiorem Helsona z syntezą.

Wiadomo było od dawna, że żaden zbiór Helsona nie jest typu M_0, to znaczy nie niesie niezerowej miary, której transformata znika w nieskończoności; inaczej: nie niesie miary, która jest pseudofunkcją. Jeśli zatem pewien zbiór Helsona niesie jakąś niezerową pseudofunkcję, to ona nie jest miarą, a stąd wynika, że $\mathrm{PM}(E) \neq M(E)$, więc że E nie spełnia syntezy. Zbiór Helsona zbudowany przez Körnera jest właśnie zbiorem niosącym niezerową pseudofunkcję. W dodatku jest to zbiór niezależny. Dowód Körnera był bardzo długi. Potem powstały krótsze dowody (Kaufman, Körner, Saeki). Jeden z wariantów przedstawiają autorzy.

W tymże rozdziale dowiedzione jest twierdzenie, że każdy zbiór Kroneckera spełnia syntezę. *Zbiorem Kroneckera* nazywa się taki zbiór zamknięty E, że każda funkcja z $C(E)$ o module równym 1 może być aproksymowana jednostajnie na E przez charakter grupy. Każdy zbiór Kroneckera jest niezależny i jest zbiorem Helsona. W każdej grupie, w której elementy rzędu nieskończonego leżą gęsto, istnieje zbiór Kroneckera.

Rozdziały 5–8 poświęcone są algebrze miar (skończonych borelowskich) na grupie lca z mnożeniem splotowym. Ta algebra Banacha $M(G)$ jest przedmiotem wnikliwych badań już od kilkudziesięciu lat. Jest to bardzo kapryśna algebra. Na jej dobro powiedzieć można, że jest półprosta (gdyż już transformata Fouriera wyznacza miarę w zupełności, a transformata Gelfanda jest przedłużeniem fourierowskiej), ale niewiele ponadto. Funkcjonały liniowo-multyplikatywne na $M(G)$ trudno opisać. Regularności nie ma, gdyż np. domknięcie grupy Γ jako zbioru w przestrzeni Gelfanda $\Delta(M(G))$ nie jest kospektrum żadnego ideału. Symetrii także brak, gdyż warunek $(\mu^*)^\wedge = \bar{\hat{\mu}}$,

gdzie $\mu^*(E) = \mu(-E)$, zachodzi wprawdzie dla transformaty Fouriera, ale nie dla transformaty Gelfanda. Brzeg Szyłowa algebry $M(G)$ trudno wyznaczyć itd.

Pierwszym, który scharakteryzował w pewien sposób funkcjonały liniowo-multyplikatywne (ideały maksymalne) w $M(G)$ był J. Šrejder (1950). Opisał je mianowicie jako tzw. *charaktery uogólnione*, tj. funkcje na G zależne od parametru σ przebiegającego $M(G)$ i spełniające takie warunki:

1° dla każdego $\sigma \in M(G)$ funkcja χ_σ jest mierzalna względem uzupełnionej miary σ,

2° $\chi_\sigma(t_1+t_2) = \chi_\sigma(t_1)\cdot\chi_\sigma(t_2)$ dla prawie każdego punktu przestrzeni $G\times G$ z miarą $\sigma\times\sigma$,

3° jeśli $\sigma_2 \prec \sigma_1$ (tzn. jeśli miara σ_2 jest absolutnie ciągła względem σ_1), to $\chi_{\sigma_2}(t) = \chi_{\sigma_1}(t)$ σ_2-prawie wszędzie,

4° $\sup\limits_{\sigma\in M(G)} \operatorname{ess\,sup}\limits_{t\in G} |\chi_\sigma(t)| = 1$.

Wartością funkcjonału χ na mierze μ jest

$$\int \overline{\chi_\mu(t)}\, d\mu(t) = \hat{\mu}(\chi),$$

gdzie $\hat{\mu}$ oznacza transformatę Gelfanda. Każdy charakter jest charakterem uogólnionym, więc $G \subset \Delta(M(G))$, a $\mu|G$ jest transformatą Fouriera miary μ.

Inaczej interpretował przestrzeń Gelfanda dla $M(G)$ J. L. Taylor (1965). Jego interpretacja dotyczy szerszej klasy algebr splotowych, których elementami są miary. Mianowicie zamiast miar na grupie lca mogą to być miary na dowolnej przemiennej półgrupie półtopologicznej H, a algebrę $M(H)$ wszystkich miar na H zastąpić można dowolną jej tzw. L-podalgebrą, to jest taką zamkniętą podalgebrą B, że jeśli $\mu\in B$ i $\nu \prec \mu$, to $\nu\in B$. Wtedy istnieje zwarta przemienna półgrupa S, której półcharaktery rozdzielają punkty, i taki homomorfizm $\check{\varphi}$ algebry B na $*$-słabo gęstą podalgebrę algebry $M(S)$, że

1° jeśli $\mu \geqslant 0$, to $\check{\varphi}(\mu) \geqslant 0$,

2° jeśli $\mu \geqslant 0$, $0 \leqslant \nu \leqslant \check{\varphi}(\mu)$, to $\nu\in\check{\varphi}(B)$ oraz

3° dla każdego $\psi\in\Delta(B)$ istnieje dokładnie jeden taki półcharakter $f\in\hat{S}$, że $\hat{\mu}(\psi) = \int \bar{f}\, d(\check{\varphi}(\mu))$.

Jeśli algebra B jest półprosta, to $\check{\varphi}$ jest izomorfizmem. W ten sposób przestrzeń Gelfanda $\Delta(B)$ zostaje zastąpiona przez S. W przypadku $B = M(G)$ znaczy to, że przestrzeń charakterów uogólnionych grupy G została zastąpiona przez półgrupę półcharakterów pewnej półgrupy zwartej S (zwanej *półgrupą strukturalną* algebry $M(G)$).

W rozdziale 5 wprowadza się też inne pojęcia dotyczące algebry $M(G)$ oraz dowodzi się lub przytacza pewne twierdzenia oparte na konstrukcjach Taylora. Na podstawie jednego z nich autorzy podają inny niż poprzednio dowód twierdzenia Cohena o idempotentach, niezbyt jasno i raczej szkicowo przedstawiony.

Długi (57-stronicowy) rozdział 6 traktuje o miarach, których potęgi splotowe są wzajemnie ortogonalne. Miary probabilistyczne hermitowskie o tej własności istnieją w $\boldsymbol{T}$, w $\boldsymbol{R}$ i w różnych innych grupach lca, w szczególności w takich, które zawierają doskonałe zbiory niezależne. Jeśli μ jest taką miarą, to promień spektralny miary $\nu = \delta_0 - \mu^2$ jest równy 2, a stąd wynika, że widmo miary μ, oznaczone przez $\operatorname{spec}\mu$, zawiera liczbę i. Dzięki symetryczności miary μ mamy $\mu = \mu^*$, więc transformata Fouriera miary μ jest rzeczywista. Wynika stąd od razu niesymetryczność algebry $M(G)$, a również tzw. zjawisko Wienera–Pitta, polegające na tym, że istnieje miara μ, której transformata Fouriera nie przyjmuje wartości z pewnego otoczenia zera, chociaż jej widmo zawiera 0. Nie istnieje zatem miara ν, dla której $\mu * \nu = \delta_0$. Zarówno niesymetryczność algebry $M(G)$ jak i zjawisko Wienera–Pitta dowodzą, że $\hat{G}$ nie jest zbiorem gęstym w przestrzeni $\Delta(M(G))$.

Łatwo dowieść, że jeżeli miara probabilistyczna ma niezależne potęgi, to jej widmem jest tarcza koła jednostkowego. Z tego też można wywnioskować, że $\hat{G}$ nie jest gęste w $\Delta(M(G))$, a stąd znów wynika zjawisko Wienera–Pitta.

Zbiór $E \subset G$ nazywa się *algebraicznie rozproszony*, jeśli dla każdego $x \in Gp(E)$, $x \neq 0$, istnieje taki zbiór przeliczalny $Y \subset G$, że $x \notin Gp(E \setminus Y)$. Miary ciągłe skoncentrowane na σ-zwartym zbiorze E algebraicznie rozproszonym, spełniają warunek

$$\delta_x * \mu^m \perp \delta_y * \mu^n, \quad \text{jeśli } x \neq y \text{ lub } m \neq n. \tag{2}$$

Można to uogólnić na sploty n potęg miar ciągłych $\mu_1, \ldots, \mu_n$ o dowolnych wykładnikach, a stąd wywnioskować, że $\|\mu_1 * \ldots * \mu_n\| = \prod_{i=1}^{n} \|\mu_i\|$. I dalej: jeśli f jest ciągłym funkcjonałem liniowym w przestrzeni miar ciągłych skoncentrowanych na E, o normie $\leqslant 1$, to f da się rozszerzyć do elementu przestrzeni $\Delta(M(G))$. Podobne własności mają miary ciągłe skoncentrowane na zbiorze zdysocjowanym. To pojęcie gra znaczną rolę w analizie harmonicznej, zwłaszcza w teorii iloczynów Riesza i zbiorów szczupłych (*thin sets*). Zbiór E nazywa się *zdysocjowany*, jeśli z warunków

$$n_1 x_1 + \ldots + n_k x_k = 0, \quad x_i \in E \ (n_i = 0, \pm 1, \pm 2;\ 1 \leqslant i \leqslant k)$$

wynika $n_1 = \ldots = n_k = 0$. Zdysocjowany jest np. ciąg liczb naturalnych, dla którego $\inf n_{k+1}/n_k \geqslant 3$. Pojęcia „algebraicznie rozproszony" i „zdysocjowany" krzyżują się.

Częścią algebry miar ciągłych jest algebra miar, których transformaty dążą w nieskończoności do 0. Oznacza się ją przez M_0. Takie są w szczególności miary absolutnie ciągłe. Nośnik niezerowej miary absolutnie ciągłej oczywiście nie może być miary Haara 0, natomiast jest to możliwe dla miary z M_0: istnieją nawet zbiory niezależne niosące niezerową miarę z M_0 (Körner). Graham i McGehee przytaczają ostrzejszy jeszcze wynik Saekiego.

Inny godny zanotowania wynik przytoczony w tym paragrafie brzmi: istnieje taka miara dodatnia $\mu \in M(R)$, że $\mu^2 \perp L^1(R)$ (tj. μ^2 jest miarą osobliwą), chociaż $\mu * \mu^* \in L^1(R)$.

Produkty nieskończone miar probabilistycznych na grupach zwartych od dawna były badane w teorii miary i w teorii prawdopodobieństwa. Autorzy koncentrują się na zależnościach między własnościami miary produktowej (takimi, jak ciągłość lub należenie do M_0) a własnościami miar zadanych na osiach. Dowodzą np., że jeśli $\omega_j = \alpha_j \delta(0) + (1-\alpha_j) m_j$, gdzie $0 < \alpha_j < 1$, a m_j jest miarą Haara na G_j, to miara $\omega = \prod \omega_j$ na $\prod G_j$ należy do M_0 dokładnie wtedy, gdy grupy G_j są skończone i $\lim \alpha_j = 0$. Miara μ nazywa się *łagodna* (*tame*), jeśli dla każdego $\psi \in \Delta(M(G))$ istnieje taka liczba $a \in [0, 1]$ i taki charakter $\gamma \in \hat{G}$, że $\psi_\mu = a\gamma$ μ-prawie wszędzie. Pojęcie to często występuje we współczesnych badaniach algebry $M(G)$. Okazuje się, że przy założeniu skończoności grupy G_j miara ω jest łagodna wtedy i tylko wtedy, gdy $\limsup \alpha_j = 1$.

Nieskończone sploty miar czyli $\lim_N (\mu_1 * \ldots * \mu_N)$ w topologii $*$-słabej (inaczej: rozkłady graniczne sum niezależnych zmiennych losowych) omówione są głównie w przypadku $G = \boldsymbol{R}$ lub $G = \boldsymbol{T}$. Zaakcentowano najpierw twierdzenie o „czystości" (*purity theorem*) Jessena–Wintnera, którego autorzy dowodzą w następującej wzmocnionej formie: jeśli μ jest splotem miar dyskretnych, to zachodzi jeden (i tylko jeden) z czterech przypadków:

1° miara μ jest dyskretna,

2° miara μ jest absolutnie ciągła,

3° dla pewnego k miary μ^r $(1 \leqslant r \leqslant k)$ są osobliwe, ciągłe i wzajemnie osobliwe, a $\mu^{k+1} \in L^1(G)$,

4° miara μ jest ciągła i spełnia warunek (2).

Antysymetrycznym splotem Bernouilliego na prostej nazywa się splot $*_j [\frac{1}{2}\delta(0) + \frac{1}{2}\delta(r_j)]$ $(r_j > 0)$, dobrze określony, jeśli $\sum r_j < \infty$. Poza zbiorem I kategorii w $l^1(\boldsymbol{R}^+)$ każdy zbieżny szereg $\sum r_j$ określa przez taki splot miarę o następującej własności: dla każdej liczby $z \neq 0$ z koła $|z| < 1$ istnieje w $\bar{\boldsymbol{R}} \setminus \boldsymbol{R}$ (gdzie $\bar{\boldsymbol{R}}$ jest domknięciem $\boldsymbol{R}$ w $\Delta(M(\boldsymbol{R}))$) uogólniony charakter ψ, dla którego $\psi_\mu = z$ μ-prawie wszędzie. Oczywiście żadna potęga takiej miary nie jest absolutnie ciągła, więc na podstawie twierdzenia o czystości jej potęgi są niezależne. Pierwszy przykład miary μ, dla której istnieje uogólniony charakter $\psi \in \bar{\boldsymbol{R}} \setminus \boldsymbol{R}$ sprowadzający się do stałej μ-prawie wszędzie, dał Šrejder.

Sploty $*_j ((1-r_j)\delta(0) + r_j \delta(2^{-j}))$ (rzuty monetą z prawdopodobieństwem reszki kolejno $r_j \in [0, 1]$) i podobne mają rozwiniętą teorię, z której za pomocą twierdzenia o czystości można wywnioskować, że algebry $M_0(\boldsymbol{R})$ i $M_0(\boldsymbol{T})$ zawierają hermitowskie miary probabilistyczne łagodne o niezależnych potęgach. Można to uogólnić na wszystkie niedyskretne grupy lca. Ma to ciekawe konsekwencje dla przestrzeni Gelfanda algebry $M(G)$. Ponieważ

algebra M_0 jest większa niż L^1, przeto powstaje pytanie, czy jeśli $\mu \in M_0$, to $\mu = 0$ wszędzie poza Γ, podobnie jak to jest dla miar absolutnie ciągłych, a inaczej mówiąc, czy $M_0 \subset \operatorname{Rad} L^1$, gdzie $\operatorname{Rad} L^1$ to przekrój wszystkich ideałów maksymalnych zawierających L^1. Ponieważ hermitowskie miary probabilistyczne o niezależnych potęgach są ortogonalne do $\operatorname{Rad} L^1$, czego Graham i McGehee w omawianym rozdziale dowodzą, więc z przytoczonego przed chwilą twierdzenia wynika odpowiedź przecząca na zadane pytanie. Istnieje zatem miara μ, której transformata znika na zbiorze $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$, ale jest różna od 0 w pewnym punkcie zbioru $\Delta(M) \setminus \bar{\Gamma}$. Niech ν będzie miarą absolutnie ciągłą, dla której $0 \leqslant \hat{\nu} \leqslant 1$ i $\hat{\nu} = 1$ w zbiorze (zwartym)

$$\{\gamma \in \Gamma\colon |\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant \eta\},$$

gdzie $\eta = \sup|\hat{\mu}(\psi)|$ na zbiorze $\Delta(M) \setminus \bar{\Gamma}$. Wtedy funkcja $(\mu - \mu * \nu)^{\wedge}$ przyjmuje bezwzględne maksimum poza $\bar{\Gamma}$, a więc brzeg Szyłowa algebry $M(G)$ okazuje się większy niż $\bar{\Gamma}$.

Rozdział 7 poświęcony jest iloczynom Riesza – jednemu z podstawowych narzędzi analizy harmonicznej. Niech G będzie grupą przemienną zwartą, a $E = (\lambda_j)_1^{\infty} \subset \Gamma = G$ zbiorem zdysocjowanym. Wtedy każdy element grupy Γ wyraża się w co najwyżej jeden sposób w postaci

$$\prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{\varepsilon_j}, \quad \text{gdzie } \lambda_j \in E,\ \varepsilon_j = \pm 1, \text{ a } \varepsilon_j = 1, \text{ jeśli } \lambda_j^2 = 1$$

(działanie grupowe w Γ oznaczamy tu jako mnożenie). Oznaczmy przez a pewną ustaloną funkcję $E \to (-1, 1)$, przy czym $a(\lambda) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, jeśli $\lambda^2 \neq 1$. Piszemy $q_\lambda = 1 + a(\lambda)\lambda + \overline{a(\lambda)}\,\bar{\lambda}$, jeśli $\lambda^2 \neq 1$ lub $1 + a(\lambda)\lambda$, jeśli $\lambda^2 = 1$. Wtedy otrzymamy dobrze określony iloczyn Riesza jako miarę $\mu = \prod_{\lambda \in E} q_\lambda$. Iloczyn w definiensie faktycznie jest zbieżny $*$-słabo, gdyż częściowe iloczyny mają jako funkcje z $L^1(G)$ normę 1, a ich współczynniki Fouriera są zbieżne na elementach postaci $\omega = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{\varepsilon_j}$ do liczb, które od razu obliczyć można z warunku zdysocjowania nałożonego na E, poza tym zaś do 0 lub 1 (dla $\omega = 1$).

Za pomocą iloczynu Riesza łatwo konstruować zbiory osobliwe. Widać od razu, że ciąg zdysocjowany jest zbiorem Sidona. Znane jest następujące twierdzenie Zygmunda: jeśli $G = T$ i $\sum |a(\lambda)|^2 = \infty$, to iloczyn Riesza przedstawia miarę osobliwą (przy tym ciągłą), o ile $\sum [1 - |a(\lambda)|] = \infty$, a jeżeli $\sum |a(\lambda)|^2 < \infty$, to przedstawia miarę absolutnie ciągłą o gęstości całkowalnej z kwadratem. Autorzy dowodzą pewnego ogólniejszego twierdzenia. Podają także warunki dostateczne na to, by miara określona przez iloczyn Riesza miała niezależne potęgi. Dowodzą też, że iloczyn Riesza przedstawia miarę łagodną wtedy i tylko wtedy, gdy $\limsup_{\gamma \to \infty} |\hat{\mu}(\gamma)| < 1$.

Z rozdziału 7 powtórzmy jeszcze wynik Katznelsona dotyczący zbiorów $E \subset Z$, dla których istnieje taka miara ciągła, że $\inf_E |\hat{\mu}(\gamma)| > 0$. Nazwijmy je zbiorami Ka (na cześć Kaufmana). Zbiór Ka ma zawsze w $\boldsymbol{Z}$ gęstość 0 (twierdzenie Wienera). Katznelson dowiódł, że może on być jednak w pewnym sensie duży, mianowicie może być gęsty w grupie $\boldsymbol{Z}$ w topologii indukowanej przez jej uzwarcenie Bohra.

Autor tego referatu ogłosił kiedyś problem (naiwny), czy zbór Ka może nie być zbiorem Sidona. W odpowiedzi przyszło kilka niezależnych pozytywnych rozwiązań. Najdalej szło rozwiązanie Grahama: jeżeli μ nie dąży do 0, to istnieje takie $\varepsilon > 0$, że zbiór $\{n \in Z: |\hat{\mu}(n)| > \varepsilon\}$ nie jest zbiorem Sidona. Wynik ten (faktycznie był on jeszcze nieco ostrzejszy) nie jest w omawianej książce przytoczony. Zapuszczając się trochę w dziedzinę naukowej plotki dodam w końcu, że Katznelson usiłował zbudować zbiór Sidona w $\boldsymbol{Z}$ gęsty w topologii Bohra, ale mu się to nie powiodło; ten problem dalej jest otwarty.

W rozdziale 8 mowa jest o brzegu Szyłowa algebry $M(G)$ oraz o zbiorze $\Sigma(M)$ ideałów symetrycznych w $\Delta(M(G))$ dla niedyskretnej grupy G. *Ideałem symetrycznym* nazywa się tu taki ideał maksymalny ψ, że dla każdej miary μ jest $(\mu^*)\hat{}\,(\psi) = \overline{\hat{\mu}(\psi)}$, gdzie $d\mu^*(x) = \overline{d\mu(-x)}$. Oczywiście $\Sigma(M) \supset \bar{\Gamma}$. Okazuje się, że jest to inkluzja właściwa. (Przypomnijmy, że tak samo właściwa jest inkluzja $\Sigma \subset \Delta$, to znaczy algebra $M(G)$ jest niesymetryczna.) Najpierw uzyskuje się analogiczny wynik dla algebry $M_0(G)$. Ponieważ nie ma ona jedności, więc przestrzeń $\Delta(M_0)$ nie jest zwarta. Ponieważ M_0 jest ideałem w M, więc $\Delta(M_0)$ jest otwartym podzbiorem $\Delta(M)$. Dowodzi się, że zbiór $\Sigma(M_0)$ nie jest zawarty w brzegu Szyłowa algebry M_0, a stąd można wywnioskować, że $\Sigma(M) \neq \bar{\Gamma}$ oraz, że brzeg Szyłowa ∂M algebry $M(G)$ nie jest całą przestrzenią $\Delta(M)$. Okazuje się on identyczny z domknięciem zbioru ∂M_0 w tej przestrzeni.

Odwróceniu twierdzenia Wienera–Lévy'ego poświęcony jest rozdział 9. Twierdzenie to mówi, że funkcje analityczne „operują" na algebrze $A(\boldsymbol{T})$; znaczy to, że jeśli funkcja F jest analityczna w obszarze U, $f \in A(\boldsymbol{T})$, $f(\boldsymbol{T}) \subset U$, to $F \circ f \in A(\boldsymbol{T})$. Wynika to natomiast z podstawowych twierdzeń o algebrach Banacha, wtedy jeszcze nie znanych. Wynik ten można wzmocnić żądając od F tylko, żeby była "*real-analytic*" w U (polskiego terminu nie znam, ani utworzyć nie umiem; „rzeczywiście analityczna" nie do przyjęcia). Znaczy to, że w otoczeniu każdego punktu $(x_0, y_0) \in U$ funkcja F ma być przedstawialna przez absolutnie zbieżny szereg

$$\sum_{m,n>0} a_{mn}(x-x_0)^m(y-y_0)^n \qquad (a_{mn} \in C).$$

Można przy tym zastąpić $\boldsymbol{T}$ przez dowolną grupę $\Gamma \in \mathrm{lca}$, ale jeśli ona nie jest zwarta, to trzeba zażądać, by $0 \in U$ i $F(0) = 0$. Słabsze warunki na F,

które jednak gwarantują, że $F \circ f \in A(T)$ przy pewnych ograniczeniach nałożonych na f, znalazł Marcinkiewicz.

Zagadnienie konieczności założeń w twierdzeniu Wienera–Lévy'ego i w podobnych twierdzeniach wypłynęło już dawno, a jego rozwiązanie kojarzy się przede wszystkim z czterema nazwiskami: Helsona, Kahane'a, Katznelsona i Rudina, którzy w kilku pracach i w różnych konstelacjach udowodnili kilka twierdzeń w tym rodzaju, co następujące: jeśli Γ jest grupą niedyskretną, U obszarem w C, $F: U \to C$, $0 \in U$, gdy Γ niezwarte, to z założenia, że $F \circ f \in A(\Gamma)$ dla każdego $f \in A(\Gamma)$ o wartościach w U wynika, że F jest *real-analytic* w U. Jeżeli U zastąpić odcinkiem osi rzeczywistej, to F rozszerza się do funkcji analitycznej w otoczeniu 0.

Główną ideę dowodu Helsona i jego współautorów można przedstawić następującym grubym szkicem w jednym z badanych przypadków:

Szacuje się $\|e^{irf}\|_A$ $(r \in \mathbf{Z}^+)$ dla $f \in A(\Gamma)$, $\|f\|_A \leqslant 1$, $f(\Gamma) \subset [-1, 1]$ otrzymując jako kres górny e^r. O funkcji $F: [-1, 1] \to \boldsymbol{C}$ zakłada się, że $F \circ f \in A(\Gamma)$, ilekroć f spełnia powyższe warunki. Wtedy można tak dobrać α, żeby dla tychże f i $x \in [0, 2\pi]$ zachodziła nierówność

$$\|F_1 \circ (f + x \cdot \mathbf{1})\|_A \leqslant K, \quad \text{gdzie } F_1(t) = F(\alpha \sin t).$$

Chcąc udowodnić, że funkcja F jest analityczna w 0, wystarczy to udowodnić dla funkcji F_1. W tym celu szacuje się jej współczynniki Fouriera korzystając z obu przytoczonych tu oszacowań i ze wzoru

$$\hat{F}_1(k) \exp(ikf(\gamma)) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} F_1(f(\gamma) + x) e^{-ikx} dx.$$

Otrzymuje się $|\hat{F}_1(k)| e^{|k|} \leqslant K$ dla każdego k, a więc szereg $\sum \hat{F}_1(k) e^{ikz}$ jest zbieżny absolutnie w pasie $|\operatorname{Im} z| < 1$, skąd wynika, że F_1 jest istotnie funkcją analityczną w otoczeniu zera.

Oczywiście funkcje całkowite operują także na algebrze $B(\Gamma)$. Wymienieni tu autorzy dowiedli, że i na odwrót: jeśli grupa Γ jest niezwarta, U jest obszarem w $\boldsymbol{C}$ i $F \circ f \in B(\Gamma)$ ilekroć $f \in B(\Gamma)$ i $f(\Gamma) \subset U$, to F daje się rozszerzyć do funkcji, która jest *real-analytic* w całej płaszczyźnie. Jeżeli zastąpić tu obszar U przez odcinek osi rzeczywistej, to F musi być zwężeniem funkcji całkowitej. Varopoulos udowodnił analogiczne twierdzenie dla algebry $B_0 = B \cap C_0$.

Ostatni paragraf rozdziału 9 dotyczy funkcji operujących na funkcjach dodatnio określonych o normie 1.

Rozdział 10 dotyczy mnożników. To jest jeden z tradycyjnych tematów w analizie harmonicznej, któremu poświęcono wiele pracy, prac i co najmniej jedną monografię. Mówiąc ogólnikowo, chodzi o to, żeby mając pewną przestrzeń funkcyjną na grupie lca zbadać, przez jakie funkcje można jej elementy mnożyć nie wychodząc poza obręb tej przestrzeni. Badania koncentrowały się przede wszystkim na przestrzeniach $\hat{L}^p(\Gamma)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Definicję mnożnika odnosi się jednak zwykle do przestrzeni $L^p(G)$, chociaż wtedy nie ma a priori mowy o mnożeniu. Nazywa się operator liniowy (ciągły) $U: L^p \to L^p$ *mnożnikiem* na L^p, jeśli jest przemienny z translacjami: $U\tau_x = \tau_x U$. Wtedy, jeśli $p < \infty$, U przemienne jest również ze splotem oraz istnieje taka funkcja $\hat{U} \in L^\infty(\Gamma)$, że $(Uf)^\wedge = \hat{U}\hat{f}$. Tak więc „prawdziwym" mnożnikiem jest $\hat{U}$. Jeżeli grupa G nie jest zwarta, to transformatę Fouriera dla $p > 2$ należy rozumieć w sensie dystrybucji, a dla $p \in (1, 2)$ w sensie operacji interpolującej (na podstawie twierdzenia Riesza–Torina).

Mnożnikiem na L^p jest każda miara, to znaczy, że jeśli $\mu \in M(G)$, to $f * \mu \in L^p$ dla każdego $f \in L^p$. Dowodzi się łatwo, że w przestrzeni L^1 każdy mnożnik jest miarą. Dla L^2 mnożnikiem jest każda pseudomiara. Wynika to od razu z twierdzenia Plancherela. Dla $p \in (1, 2)$ sprawa jest daleko trudniejsza. Mnożniki na L^p tworzą algebrę Banacha. Jeśli założyć $p < \infty$, to wygodniej jest mówić o transformatach mnożników niż o samych mnożnikach; tworzą one algebrę, $M_p(\Gamma)$, ze zwykłym mnożeniem. Jeśli przyjąć w niej operatorową normę indukowaną z $B(L^p)$ (operatory liniowe na L^p), jest to algebra Banacha. Wiadomo obecnie, że

$$M_{p_1}(Z) \subsetneqq M_{p_2}(Z), \quad \text{jeśli } 1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant 2.$$

Dla $p \in (1, 2)$ przestrzeń M_p okazuje się izometrycznie izomorficzna z przestrzenią A_p^*, dualną do przestrzeni A_p wprowadzonej przez Herza. A_p jest projektywnym iloczynem tensorowym $L^p \hat{\otimes} L^q$ $(1/p + 1/q = 1)$, a dokładniej uzupełnieniem w największej dopuszczalnej normie (*cross-norm*) zbioru funkcji postaci $\sum_{i=1}^{n} f_i * g_i$, gdzie $f_i \in L^p$, $g_i \in L^q$.

Główną częścią rozdziału 10 jest bardzo długi i trudny dowód (z pomocą teorii funkcji analitycznych) twierdzenia Zafrana orzekającego, że algebra $M_{p0}(Z) = M_p(Z) \cap C_0(Z)$ jest całkowita. Znaczy to, że jeśli $F: [-1, 1] \to C$ operuje na funkcjach z M_{p0} o wartościach w $[-1, 1]$ (czyli $F \circ f \in M_{p0}$ dla każdej takiej funkcji), to F w pewnym rzeczywistym otoczeniu zera zgadza się z pewną funkcją całkowitą. Wynika stąd na przykład, że algebra M_{p0} jest niesymetryczna, a tym bardziej, że grupa Γ, zawarta oczywiście w przestrzeni Gelfanda algebry M_{p0}, nie jest w niej gęsta. Autorzy bardzo eksponują twierdzenie Zafrana, lecz moim zdaniem nie wyjaśniają dostatecznie jego konsekwencji.

W rozdziale 11 przedstawiona jest przede wszystkim metoda Varopoulosa dowodu istnienia zbiorów bez syntezy spektralnej w każdej niedyskretnej grupie lca. Varopoulos wymyślił ją około 1970 roku. Aparat, który w tym celu rozwinął, posłużył także do dowodów innych twierdzeń i sam stał się źródłem nowych problemów. Pojęcie algebry $V(G)$ wraz z tym oznaczeniem szybko rozpowszechniło się wśród zainteresowanych matematyków. Jeśli G jest grupą zwartą, to $V(G)$ oznacza projektywny iloczyn tensorowy $C(G) \hat{\otimes} C(G)$. Jest to algebra Banacha gęsta w $C(G \times G)$. Jej przestrzenią

Gelfanda jest $G \times G$. Struktura grupowa w G nie odgrywa przy tym roli. Można podobnie zdefiniować $V(H_1, H_2)$ jako analogiczny iloczyn tensorowy dla dwóch przestrzeni zwartych hausdorffowskich, lecz tu interesuje nas tylko przypadek $H_1 = H_2 = G$.

Wprowadza się odwzorowanie M: $C(G) \to C(G \times G)$ określone przez

$$Mf(x, y) = f(x+y)$$

i odwzorowanie P: $C(G \times G) \to C(G)$ określone przez

$$Pf(x) = \int f(x-t, t)\,dt.$$

Pierwsze z nich odwzorowuje $A(G)$ izometrycznie w $V(G)$, a drugie odwzorowuje $V(G)$ na $C(G)$ i ma normę 1. Nadto $P(g \cdot Mf) = Pg \cdot f$ dla każdego $f \in C(G)$ i $g \in C(G \times G)$.

Jeśli X i Y są rozłącznymi podzbiorami zbioru niezależnego, to oczywiście $X+Y$ odwzorowuje się kanonicznie na $X \times Y$. Załóżmy, że X i Y są homeomorficzne ze zbiorem Cantora D i że $X \cup Y$ jest zbiorem Kroneckera (krótko zbiorem K) lub tzw. zbiorem K_p. Przypomnijmy, że *zbiorem Kroneckera* nazywa się taki zbiór zamknięty E, że dla każdej funkcji z $C(E)$ o module równym 1 i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje charakter χ, dla którego $\|\varphi - \chi | E\|_{C(E)} < \varepsilon$. Zbiór K_p to zbiór zamknięty w grupie $\boldsymbol{Z}_p$ ($\boldsymbol{Z}_p$ oznacza grupę cykliczną rzędu p) o takiej własności, że każda funkcja ciągła $E \to \boldsymbol{Z}_p$ przedłuża się do charakteru. Każda grupa lca zawiera zbiór typu K lub K_p. Otóż, jeśli $X \cup Y$ jest takim zbiorem, to $A(X+Y)$ jest izometrycznie izomorficzne z $V(D)$.

Na tych pojęciach i przesłankach opiera się dowód istnienia zbioru bez syntezy w każdej grupie lca. Najpierw dowodzi się, że jeśli algebra $V(\boldsymbol{T}^\infty)$ jest bez syntezy (tj. jeśli istnieje zbiór zamknięty $E \subset \boldsymbol{T}^\infty \times \boldsymbol{T}^\infty$ i funkcja $f \in V(\boldsymbol{T}^\infty)$ znikająca na E, nieaproksymowalna przez funkcje znikające w otoczeniu E), to także algebra $V(D)$ nie ma syntezy. Używa się w tym celu naturalnego odwzorowania ciągłego D na $\boldsymbol{T}^\infty$. Dalej: skoro $V(D)$ nie ma syntezy, to $A(G)$ nie ma syntezy, gdzie G jest dowolną grupą lca niedyskretną. Tu korzysta się z izomorfizmu przed chwilą opisanego między $A(X+Y)$ a $V(D)$. Następny krok, to dowód (bez trudu), że jeśli $A(G)$ nie ma syntezy dla jakiejś grupy, to jej nie ma w przypadku $G = \boldsymbol{T}^\infty$. Korzystając z odwzorowań M i P wnosi się stąd, że również $V(\boldsymbol{T}^\infty)$ jest bez syntezy. Teraz już wystarczy wiedzieć, że istnieje algebra $A(G)$ bez syntezy, a to wiadomo od dawna dzięki przykładowi Schwartza $G = \boldsymbol{R}^3$.

Naszkicowałem ten dowód dla jego niezwykłości. Metody Varopoulosa (*transfer method* – z A do V i z powrotem) używa się w rozdziale 11 dalej do udowodnienia, że algebra $A(G)$ (G niedyskretne) zawiera ideał o dowolnie przepisanej skończonej liczbie generatorów, a także ideał bez skończonego układu generatorów. Metoda ta może służyć także do udowodnienia omawianych już tu twierdzeń typu odwrotnego względem twierdzenia Wie-

nera–Lévy'ego o funkcjach operujących na algebrze $A(G)$. Inne zastosowanie algebr V_α to dowód następującego twierdzenia o zbiorach *ultracienkich* (*ultrathin*): Załóżmy, że $t_j \downarrow 0$, $\sum (t_{j+1}/t_j)^2 < \infty$ i stale $t_j > \sum_{j+1}^{\infty} t_k$. Tworzymy zbiór

$$E((t_j)) = \{\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_j t_j \colon \varepsilon_j = 0, 1\}.$$

Wszystkie tak otrzymane zbiory mają izomorficzne algebry Fouriera $A(E)$.

W dowodzie używa się tzw. *zasady spodeczków*, która ustala izomorfizm między algebrą Fouriera sumy mnogościowej przystających odcinków na osi x a algebrą Fouriera sumy tych samych odcinków ułożonych na płaszczyźnie jeden nad drugim w tych samych odległościach.

Na pytanie, jakie warunki regularności zapewniają należenie funkcji $f \in C(\boldsymbol{T}^2)$ do $V(\boldsymbol{T})$, częściową odpowiedzią jest np. twierdzenie, że warunek Lipschitza z wykładnikiem $> \frac{1}{2}$ wystarcza. W tym samym rozdziale znajdujemy też pewne twierdzenia o tzw. zbiorach *V-sidonowskich*, które są analogiczne do zbiorów Helsona w grupie zwartej, a także o „klasycznych" zbiorach Helsona, tj. spełniających warunek $A(E) = C(E)$. Mówiąc dokładniej, chodzi tu o stałą Helsona (precyzującą równoważność norm $\| \ \|_{A(E)}$ i $\| \ \|_{C(E)}$), a także o stopień rozproszenia zbioru Helsona. Dowodzi się, że dla grup skończonych mocy k (które same są zbiorami Helsona) stała Helsona wynosi $k^{1/2}$.

Głównym wynikiem dotyczącym drugiego zagadnienia jest tzw. twierdzenie *Kns* udowodnione w omawianej książce metodami probabilistycznymi. Brzmi ono tak: jeśli E jest zbiorem Helsona w $\boldsymbol{T}$, to istnieje taka stała $K \geqslant 1$, że jeśli $y_1, \ldots, y_n \in \boldsymbol{T}$ i $s \geqslant 2$, to E zawiera najwyżej Kns elementów postaci $\sum_1^n t_j y_j$, gdzie $\sum_1^n |t_j| \leqslant 2^s$. Z tego twierdzenia wynika od razu, że dla zbioru Helsona istnieje zawsze taka stała, że dla każdego skończonego postępu arytmetycznego P zachodzi nierówność

$$\operatorname{card}(E \cap P) \leqslant C \log \operatorname{card}(P).$$

Wspomnijmy jeszcze, za autorami, o zbiorach *V-interpolacyjnych*. Są to zbiory w produkcie $X \times Y$ o tej własności, że każda funkcja z $l^\infty(E)$ jest zwężeniem funkcji z $l^\infty(X) \hat{\otimes} l^\infty(Y)$ (X i Y – przestrzenie zwarte). Jeżeli zamiast l^∞ napisać tu C, to otrzyma się zbiory *V-sidonowskie*. Autorzy podają rozmaite charakteryzacje jednych i drugich.

Rozdział 12 ma tytuł *Tilda algebras*. To jeden z terminów od znaku graficznego, jak „gwiazdka-słabo" (i co jeszcze?). Jeżeli grupa Γ jest zwarta, $f_n \in A(\Gamma)$, $\|f_n\|_A \leqslant 1$ i $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, to $f \in A(\Gamma)$. Dowód jest bardzo łatwy. Jeżeli jednak zamiast $A(\Gamma)$ napisać tu $A(E)$, gdzie zbiór $E \subset \Gamma$ jest zamknięty, to twierdzenie nie będzie już w ogólności prawdziwe. Dla dowolnej

grupy lca i dowolnego zamkniętego E przez $\tilde{A}(E)$ oznacza się podalgebrę liniową algebry $C_0(E)$ złożoną z funkcji, które są granicami jednostajnymi funkcji z $A(E)$ wspólnie ograniczonych w normie $\| \|_{A(E)}$. Algebrą Banacha stanie się ona, jeśli przyjąć

$$\|f\|_{\tilde{A}(E)} = \sup\{|\langle f, \mu\rangle|: \mu \in M(E), \|\hat{\mu}\|_\infty \leqslant 1\}.$$

Dla grupy dyskretnej różnica między A a $\tilde{A}$ jest wyraźniejsza niż dla zwartej, mianowicie $\tilde{A}(\Gamma) \neq A(\Gamma)$, jeżeli tylko grupa Γ jest nieskończona. Autorzy zaczynają właśnie od przypadku grupy dyskretnej. Wtedy $\tilde{A}(E) = C_0(E) \cap B(E)$, a więc $\tilde{A}(E)$ składa się z funkcji dążących na E do zera i przedłużalnych do transformaty Fouriera–Stieltjesa. Nie jest jednak prawdą, że zawsze $\tilde{A}(E) = B_0(E)$ (gdzie $B_0(E) = \{\hat{\mu} | E: \lim_{\gamma \to \infty} \hat{\mu}(\gamma) = 0\}$). Nie wiadomo, czy równość $\tilde{A}(E) = A(E)$ zachodzi tylko dla zbiorów Sidona. Dowodzi się, że jeśli zbiór E w grupie dyskretnej nie jest zbiorem Sidona, to istnieje taki zbiór $F \subset E$, że $\tilde{A}(F) \neq A(F)$. Dowód tego twierdzenia jest długi i trudny.

Dzięki wprowadzeniu pewnej modyfikacji algebry $\tilde{A}$ w przypadku grupy dyskretnej można opisać pewne zbiory w $\boldsymbol{R}$ pozbawione syntezy jako podzbiory kompaktyfikacji Bohra prostej.

W grupach niedyskretnych istnieją zbiory doskonałe, dla których $\tilde{A}(E) \neq A(E)$. W pierwszych znanych przykładach (McGehee) $A(E)$ było zamkniętą podprzestrzenią $\tilde{A}(E)$ (odpowiada to przypadkowi, gdy $\|f\|_{\tilde{A}(E)} \geqslant \beta \|f\|_{A(E)}, \beta > 0$). Później Katznelson i Körner zbudowali zbiór doskonały $E \subset \boldsymbol{T}$, dla którego $A(E)$ jest gęste w $\tilde{A}(E)$. Pewną modyfikację ich delikatnej konstrukcji znajdujemy w omawianej książce.

Jeden z paragrafów dotyczy tzw. zbiorów sigtuńskich (od nazwy szwedzkiego miasta). Jest to pewien słabszy wariant pojęcia zbioru Helsona. Łatwo dowodzi się, że zbiory Helsona można zdefiniować żądając, by dla pewnego $\alpha > 0$ było $\|\hat{\mu}\|_\infty \geqslant \alpha \|\mu\|$ dla każdej miary $\mu \in M(E)$, czyli żeby te dwie normy w przestrzeni $M(E)$ były równoważne. *Zbiór sigtuński* to taki zbiór, dla którego ta równoważność zachodzi tylko dla miar ciągłych o nośniku w E, a nie dla całego $M(E)$. Autorzy przedstawiają konstrukcję zbioru, dla którego $\|\hat{\mu}\|_\infty \simeq \|\mu\|$ dla $\mu \in M_c(E)$, ale $A(E) \neq \tilde{A}(E)$, więc $A(E) \neq C(E)$. Znaczy to, że E nie jest zbiorem Helsona.

Rozdział 13 zawiera około 20 otwartych problemów różnego rodzaju. Niektóre opatrzone są dość długimi komentarzami, np. znany problem dychotomii. Chodzi o to, jakie funkcje operują na $A(E)$ zależnie od E. Jeżeli E jest zbiorem Helsona, to każda funkcja ciągła F operuje na $A(E)$ $(= C_0(E))$, z zastrzeżeniem, że $F(0) = 0$, jeśli zbiór E nie jest zwarty. Jeśli $E = \Gamma$, to mamy przytoczony tu już wcześniej wynik, który z grubsza znaczy, że tylko funkcje analityczne operują na $A(\Gamma)$. Czy są możliwe przypadki pośrednie?

Przytoczę jeszcze dwa ściśle ze sobą powiązane i również znane problemy dotyczące zbiorów Sidona w $\boldsymbol{Z}$. Pierwszy: czy domknięcie zbioru Sidona w kompaktyfikacji Bohra grupy $\boldsymbol{Z}$ ma zawsze miarę Haara zero? Drugi: czy musi ono (nawet) być zbiorem Helsona w tej kompaktyfikacji?

Pozwolę sobie podać jeszcze jeden, także nienowy problem dotyczący zbiorów Sidona, którego nie znalazłem w książce;

Załóżmy, że jeśli $f \in B(E)$ i $\inf_{x \in E} |f(x)| > 0$, to $1/f \in B(E)$. Czy E jest zbiorem Sidona?

W przemiennej analizie harmonicznej napotyka się wiele klas zbiorów o specjalnych własnościach „harmonicznych", przeważnie zbiorów małych (szczupłych), jak zbiory Sidona, Helsona, Λ_p, itd. Największą karierę zrobiły zbiory Sidona, które mają bogatą teorię, z uogólnieniami wykraczającymi poza analizę harmoniczną i wciąż nastręczają nowe problemy. Zbiorów Sidona właśnie w znacznym stopniu dotyczy teoria Pisiera funkcji losowo ciągłych. Pisier potrafił dać odpowiedź (pozytywną) na pewne pytanie A. Pełczyńskiego. Otóż w jednej z możliwych definicji pojęcia zbioru Sidona w grupie dyskretnej żąda się, żeby dla każdego wielomianu trygonometrycznego P o widmie w E zachodziła nierówność $\|P\|_{A(E)} \leqslant C\|P\|_\infty$, gdzie stała C zależy tylko od E. Czy wystarcza się w tej definicji ograniczyć do wielomianów trygonometrycznych o współczynnikach równych 1?

O tym w książce Grahama i McGehee mowy nie ma. Autorzy nie zdążyli (cytują tylko wcześniejsze wyniki Pisiera). A więc to jeszcze jeden przykład „przestarzałości", o którą można oskarżyć tę i każdą inną ukazującą się książkę. Pierwszy przykład, dotyczący hipotezy Littlewooda, podałem na początku.

Eseje Grahama i McGehee o analizie harmonicznej stawiają przed oczami nie tylko rozmaitość tematów, ale i różnorodność metod, którymi posługuje się ta dziedzina matematyki i które sama stwarza, nie tylko na swój wewnętrzny użytek.

Na zakończenie dodam, że wadą książki jest nie dość staranna korekta. Błędów graficznych jest sporo; niektóre są typu złośliwego: zniekształcają wzory i dezorientują czytelnika.