ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXV (1983)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

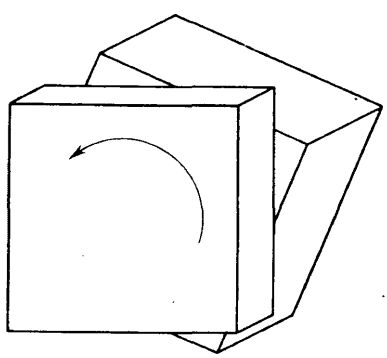
PAWEŁ TRACZYK (Warszawa)

Węgierska kostka magiczna i jej związek z teorią grup

Wstęp

Ponad sto lat temu, w roku 1873, została skonstruowana i wkrótce zrobiła ogromną karierę prosta zabawka znana pod nazwą „gry w piętnastkę". Dzisiaj podobne powodzenie zdobywa tzw. sześcian magiczny, czy też kostka Rubika (od nazwiska wynalazcy, architekta węgierskiego, Ernö Rubika). Można przy tym zrobić uwagę, że idea zabawy jest w obu przypadkach nieco podobna: chodzi o doprowadzenie zabawki do umownego stanu wyjściowego za pomocą operacji elementarnych dopuszczanych przez jej mechanizm. Kostka Rubika przewyższa jednak piętnastkę zarówno trudnością problemu, jak i elegancją mechanizmu oraz prostotą określenia owego stanu wyjściowego.

Na pierwszy rzut oka stwierdzamy, że jest to sześcian podzielony na 27 małych sześcianików ($3 \times 3 \times 3$), ze ścianami pomalowanymi na sześć kolorów, np. na biało, żółto, zielono, niebiesko, czerwono i brązowo (same kolory i ich układ mogą być różne na różnych egzemplarzach). Na zewnątrz widać oczywiście tylko 26 sześcianików, a w środku nie ma faktycznie dwudziestego siódmego, lecz genialnie prosty mechanizm (opatentowany w 1975 r.), który pozwala dowolną warstwę $3 \times 3 \times 1$ obracać względem pozostałych, tak jak to pokazuje rys. 1.



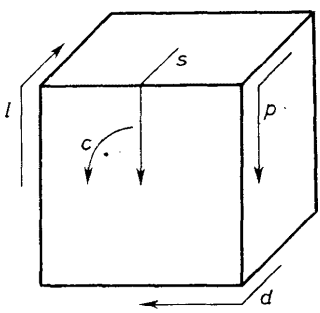
Rys. 1

Stan wyjściowy to taki, w którym każda ściana jest jednobarwna. W takim właśnie ułożeniu otrzymuje sześcian nabywca. Zabawka wygląda wówczas niewinnie i łatwo jest nieopatrznie zrobić tych kilka obrotów, po których powrót do pierwotnego położenia jest już bardzo trudny. W każdym razie nie ma co liczyć na to, że uda się to osiągnąć przypadkiem, możliwych ułożeń jest bowiem około $4{,}3 \cdot 10^{19}$.

Na temat sześcianu napisano już kilkadziesiąt artykułów prasowych, a także poważniejszych prac, powielanych i rozsyłanych zainteresowanym. Przy pisaniu tego artykułu szczególnie pomocna była broszura D. Singmastera *Notes on Rubik's magic cube* (Mathematical Sciences and Computing, Polytechnic of the South Bank, London 1980, wydanie 5) oraz praca P. M. Neumanna *The group theory of the Hungarian magic cube* (stanowiąca rozdział 19 skryptu: P. M. Neumann, G. A. Stoy, and E. C. Thomson, *Groups and Geometry*, Lecture Notes, University of Oxford, 1980).

Matematyczny opis kostki

Dla matematyka najciekawszym aspektem sześcianu magicznego jest jego naturalny, narzucający się wręcz związek z teorią grup. Każdy, kto osiągnie pewien stopień zaawansowania w układaniu kostki, staje przed problemem, jak zapisywać pewne już opracowane operacje. Chyba wszystkim, bez względu na wiek i wykształcenie, musi się narzucić pomysł, żeby oznaczyć jakoś elementarne obroty poszczególnych warstw sześcianu, i operacje złożone z pewnej liczby takich obrotów zapisywać po prostu jako ciągi liter.



Rys. 2

Oznaczmy zatem literami g, d, l, p, c, t obroty odpowiednio górnej, dolnej, lewej, prawej, czołowej oraz tylnej warstwy sześcianu o $\frac{1}{2}\pi$ (tzn. oczywiście w lewo). Obroty warstwami środkowymi można pominąć – np. obrót oznaczony na rys. 2 literą s jest tym samym, co złożenie $p^{-1}l$, jeżeli jako układ odniesienia przyjąć klocki środkowe, tzn. te, które mają jedną zewnętrzną ściankę. Łatwo zauważyć, że jest to rzeczywiście dobry układ

odniesienia – cokolwiek by robić, tych sześć klocków pozostaje tak samo położonych względem siebie([1]).

Każda operacja przyporządkowuje dowolnemu stanowi sześcianu jakiś inny. Będę więc traktować składanie tych operacji tak jak składanie przekształceń, w związku z tym stosowany w tym artykule zapis należy czytać od prawej do lewej. Na przykład c^2p^2 oznacza najpierw dwa razy p, potem dwa razy c. Rys. 3 pokazuje jak zmienia się wygląd sześcianu podczas wykonywania jednej z takich operacji, $s^{-1}csc^2s^{-1}cs$.

Oczywiście pewne operacje działają trywialnie, np. $(c^2p^2)^6$ przeprowadza sześcian z dowolnego stanu z powrotem w ten sam stan. I tak w naturalny sposób pojawia się tu teoria grup. Jeżeli w zbiorze ciągów liter będziemy utożsamiać te, które zadają takie same operacje i wprowadzimy mnożenie, polegające po prostu na napisaniu jednego ciągu za drugim, to oczywiście otrzymamy pewną grupę M. Możemy to ująć precyzyjniej w następujący sposób: niech W będzie grupą wolną nieabelową o generatorach g, d, l, p, c, t. Przyporządkowanie tym generatorom odpowiednich obrotów zadaje pewne działanie grupy W na zbiorze dopuszczalnych mechanicznie stanów sześcianu. Grupa M jest ilorazem grupy W przez jądro tego działania.

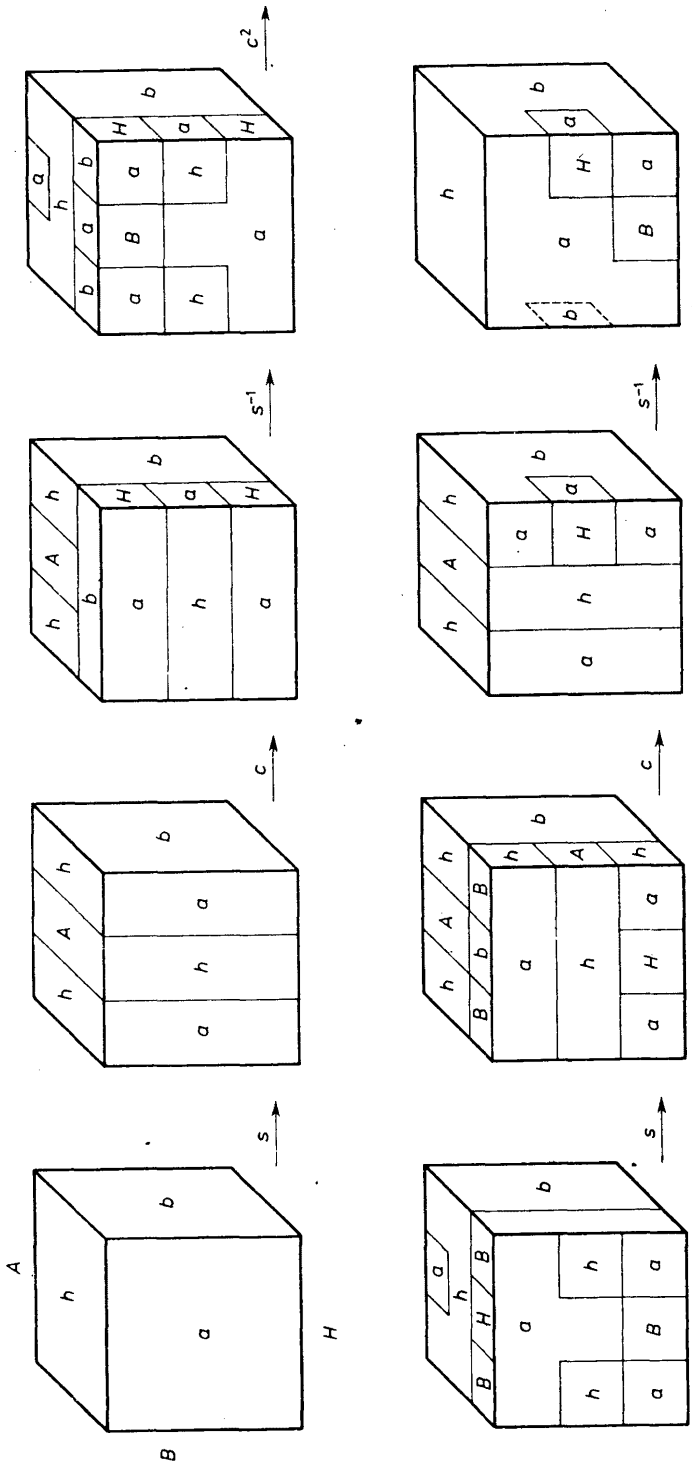
Przez *dopuszczalne mechanicznie stany* sześcianu rozumiem oczywiście te, do których można dojść z pozycji zerowej wykonując pewną liczbę obrotów. Można również rozpatrywać zbiór *stanów dopuszczalnych konstrukcyjnie.* Sześcian daje się dość łatwo rozkładać na osiem osobnych klocków narożnych (mających po trzy widoczne ściany), dwanaście klocków krawędziowych (mających po dwie widoczne ściany) i połączonych na stałe sześć klocków środkowych (patrz zdjęcia na str. 27). Można go potem złożyć w dowolny sposób z tym, że klocki krawędziowe muszą pozostać krawędziowymi, a narożne narożnymi – inna jest po prostu ich konstrukcja.

Oczywiście grupa M działa także na zbiorze stanów dopuszczalnych konstrukcyjnie, pojawia się więc naturalnie pytanie, czy te dwa zbiory są równe, tzn. czy działanie M na zbiorze stanów dopuszczalnych konstrukcyj-

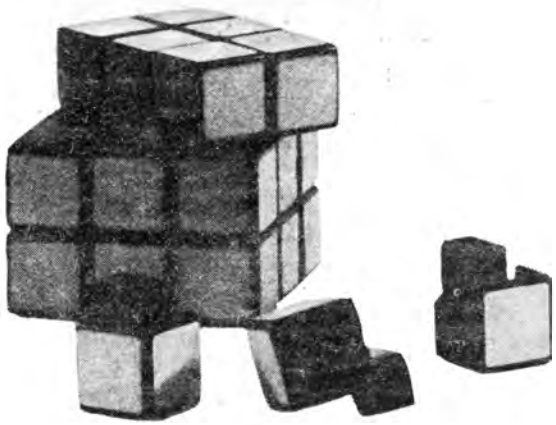
---

([1]) Istnieją różne sposoby notacji. Można za punkt wyjścia przyjąć kolory środkowych kostek poszczególnych ścian, np. z_+ może oznaczać obrót o 90° w prawo ściany z zieloną kostką w środku, z_- – obrót tej samej ściany o 90° w lewo (zatem $z_- = z_+^{-1} = z_+^3$). Zaletą tego systemu jest niezależność interpretacji zapisu od sposobu trzymania kostki, co może mieć istotne znaczenie w przypadku stosowania kostki do celów dydaktycznych (wprowadzenie w niektóre pojęcia teorii grup, zapewne możliwe już na poziomie szkolnym). Wadą tego systemu jest to, że wypisanych w takiej symbolice algorytmów nie można odczytać na kostce o innym układzie kolorów. Możliwe jest wprawdzie mechaniczne przekodowanie, jednakże przyzwyczajenie do myślenia o obrotach kostki w terminach kolorów utrudniałoby zapewne szybkie przechodzenie na inne kostki. Inną wadą jest uzależnienie notacji od orientacji przestrzeni.

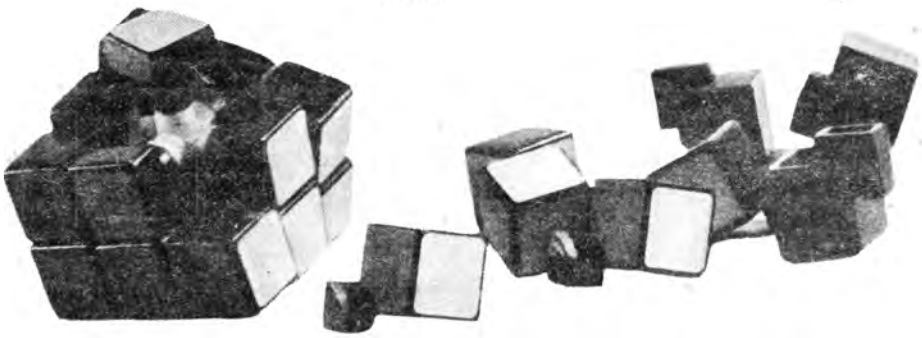
Najbardziej rozpowszechnione systemy notacji opierają się na układzie odniesienia typu lewa–prawa, góra–dół itd., co wymaga odpowiedniego ustawienia kostki. Na ogół każdy matematyk stykający się pierwszy raz z kostką wymyśla swoją notację i przyzwyczaja się do niej (*przyp. red.*).



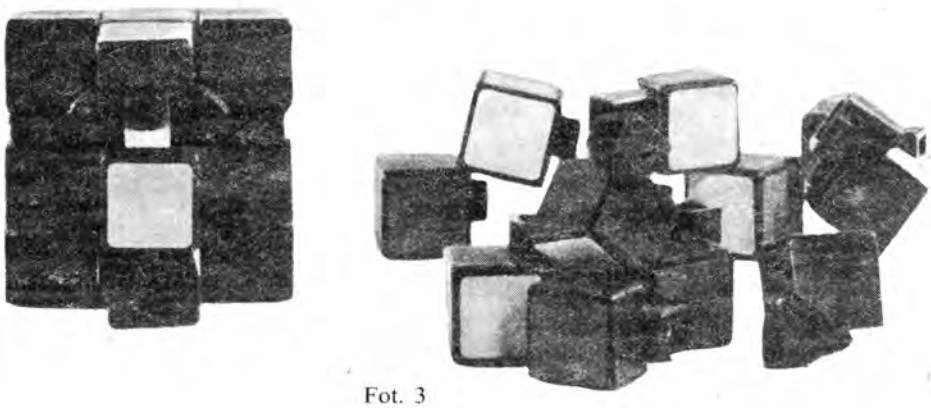
Rys. 3



Fot. 1



Fot. 2



Fot. 3



Fot. 4

nie jest tranzytywne. Pytanie to jest o tyle istotne, że kiedy po serii mniej lub bardziej przypadkowych prób poradzenia sobie z zabawką próbuje się bardziej racjonalnego podejścia, to narzuca się pomysł, aby opracować kilka operacji, które pozwoliłyby uzyskać dowolny wzór. Wystarczyłoby na przykład mieć operacje działające w następujący sposób:

1. zamiana miejscami dwóch klocków narożnych leżących na jednej krawędzi,
2. zamiana miejscami dwóch klocków krawędziowych stykających się,
3. obrót jednego klocka narożnego o $\frac{2}{3}\pi$,
4. obrót jednego klocka krawędziowego o π,

przy czym we wszystkich czterech przypadkach należy to rozumieć w ten sposób, że ułożenie pozostałych sześcianików nie zmienia się.

Okazuje się jednak, że żadna z czterech wymienionych operacji nie jest możliwa. Ograniczenia narzucane przez mechanizm kostki są w rzeczywistości następujące:

(I) grupa M realizuje jedynie parzyste permutacje zbioru kostek krawędziowych i narożnych łącznie,

(II) sposób ustawienia kostki narożnej jest dokładnie wyznaczony przez ustawienie pozostałych siedmiu kostek narożnych,

(III) sposób ustawienia kostki krawędziowej jest dokładnie wyznaczony przez ustawienie pozostałych jedenastu kostek krawędziowych.

Na podstawie tych informacji można łatwo wyliczyć liczbę układów dopuszczalnych konstrukcyjnie: jest ich $(12!\,8!/2)3^7 2^{11} = 12!\,8!\,3^7 2^{10}$, dwanaście razy więcej niż układów dopuszczalnych mechanicznie.

Ograniczenie (I) jest właściwie oczywiste – widać od razu, że każdy generator grupy M działa jako permutacja parzysta.

Przypuśćmy teraz, że na zewnętrznych ściankach każdej kostki narożnej wypisane są zgodnie z ruchem wskazówek zegara cyfry 0, 1, 2, które będziemy traktować jako elementy grupy $\boldsymbol{Z}_3$. Oznaczmy te kostki przez $K_1, \ldots, K_8$. Niech $w(K_i)$ oznacza kostkę, na którą przechodzi K_i przy działaniu elementu $w \in M$ z położenia wyjściowego. Przy działaniu elementu w ścianka zerowa kostki K_i przechodzi na miejsce, w którym w położeniu zerowym znajdowała się j-ta ścianka pewnej kostki. Przyjmijmy $f_{K_i}(w) = j$. Łatwo sprawdzić, że zachodzi następujący wzór (w $\boldsymbol{Z}_3$):

$$f_{K_i}(wv) = f_{v(K_i)}(w) + f_{K_i}(v).$$

Rozpatrzmy teraz funkcję $F\colon M \to \boldsymbol{Z}_3$ określoną wzorem:

$$F(w) = f_{K_1}(w) + \ldots + f_{K_8}(w).$$

Mamy $F(wv) = f_{K_1}(v) + \ldots + f_{K_8}(v) + f_{v(K)_1}(w) + \ldots + f_{v(K_8)}(w) = f_{K_1}(v) + \ldots + f_{K_8}(v) + f_{K_1}(w) + \ldots + f_{K_8}(w) = F(w) + F(v)$. Funkcja F jest więc homomorfizmem. Bezpośrednie sprawdzenie pozwala stwierdzić, że F przyjmuje

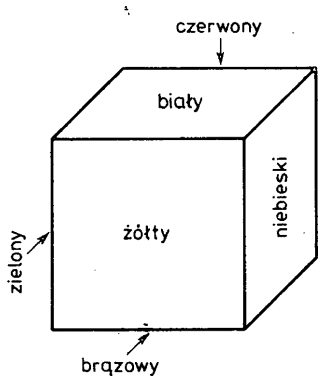
wartość 0 na generatorach grupy M, zatem jest homomorfizmem zerowym. Stąd w oczywisty sposób wynika (II). Otrzymaliśmy ponadto sposób wyznaczania położenia kostki narożnej przy znajomości położeń pozostałych siedmiu.

W analogiczny sposób możemy podać metodę wyznaczania położenia kostki krawędziowej przy znajomości położeń pozostałych jedenastu i tym samym udowodnić (III).

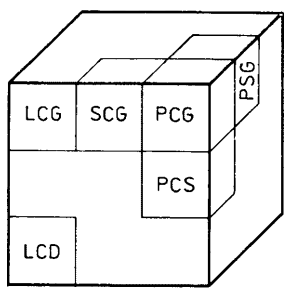
Algorytm układania kostki

Poniższy algorytm został napisany z myślą o kostce mającej taki układ kolorów jak na rys. 4. Ma to jednak minimalne znaczenie i przekodowanie na inny układ jest bardzo łatwe.

Położenie małej kostki będziemy oznaczać trzema literami oznaczającymi, że znajduje się ona w lewej (L), środkowej (S) lub prawej (P) warstwie pionowej, czołowej (C), środkowej (S) lub tylnej (T) warstwie pionowej i dolnej (D), środkowej (S) lub górnej (G) warstwie poziomej (patrz rys. 5).



Rys. 4



Rys. 5

Istnieje bardzo dużo sposobów doprowadzenia kostki do pozycji wyjściowej. Ten, który chcę tutaj podać, jest wynikiem kompromisu między dążeniem do podania algorytmu gwarantującego dojście do celu w niezbyt dużej liczbie ruchów a chęcią podania prostego opisu. Poszczególne etapy są rozbite na ciąg czynności, które należy wykonać, jeżeli są spełnione odpowiednie warunki. Jeżeli któryś warunek nie jest spełniony, przechodzi się do następnego punktu. Przypomnijmy w tym miejscu, że zapis operacji należy czytać od prawej do lewej.

Pierwszy etap polega na ustawieniu we właściwy sposób klocków krawędziowych na górnej tafli. Przyjmijmy, że na górze ma się znaleźć biała ściana. Ustawiamy więc cały sześcian tak, aby środkowy klocek w górnej warstwie był biały. Oczywiście klocek krawędziowy o jednej ściance białej, a drugiej

np. żółtej musi się znaleźć nie tylko w górnej warstwie, ale także białą ścianką do góry, a pod nim musi być żółty klocek środkowy. Ustawienie wybranego klocka odbywa się w następujący sposób:

1. Warunek. Klocek znajduje się w górnej warstwie, ale w złym miejscu lub w złej pozycji.

Postępowanie. Ustawić cały sześcian tak, aby ten klocek znalazł się w miejscu SCG i wykonać c^2.

2. Warunek. Klocek znajduje się w środkowej warstwie poziomej.

Postępowanie. Ustawić cały sześcian tak, aby ten klocek znalazł się na miejscu PCS i wykonać $p^{-1}dp$.

3. Warunek. Klocek znajduje się w dolnej warstwie i jego pionowa ścianka jest biała.

Postępowanie. Ustawić cały sześcian tak, aby ten klocek znalazł się na miejscu SCD i wykonać $c^{-1}p^{-1}d^2pc$.

4. Warunek. Klocek znajduje się w dolnej warstwie i jego dolna ścianka jest biała.

Postępowanie. Za pomocą d^i (gdzie $i = 0, 1, 2$ lub 3) ustawić klocek pod miejscem, na które chcemy go wprowadzić (tzn. doprowadzić do tego, aby nad tym klockiem znalazł się klocek środkowy o takim kolorze jak pionowa ścianka ustawianego klocka). Następnie ustawić cały sześcian tak, aby ten klocek znalazł się na miejscu SCD i wykonać c^2.

Powtarzając ten ciąg czynności najwyżej cztery razy kończymy pierwszy etap.

W drugim etapie układamy we właściwy sposób klocki narożne górne. To znaczy, że np. klocek biało-zielono-żółty powinien się znaleźć obok klocków biało-zielonego i biało-żółtego, białą ścianką do góry.

Ustawienie wybranego klocka narożnego:

1. Warunek. Klocek znajduje się w górnej warstwie, ale w złym miejscu lub w złej pozycji.

Postępowanie. Ustawić sześcian tak, aby ten klocek znalazł się w miejscu LCG i wykonać $c^{-1}d^2c$.

2. Warunek. Klocek znajduje się w dolnej warstwie.

Postępowanie. Za pomocą d^i umieścić klocek pod miejscem, które ma zająć. Ustawić cały sześcian tak, aby ten klocek znalazł się na miejscu LCD.

3. Warunek. Biała ścianka klocka jest na dole.

Postępowanie. $ld^2l^{-1}c^{-1}d^{-1}c$.

4. Warunek. Biała ścianka jest po lewej stronie.

Postępowanie. $ld^{-1}l^{-1}$.

5. Warunek. Biała ścianka jest z przodu.

Postępowanie. $c^{-1}dc$.

Trzeci etap, to ustawienie we właściwy sposób klocków krawędziowych ze

środkowej warstwy poziomej. Wybrany klocek ustawiamy według podanego niżej schematu.

1. Warunek. Klocek znajduje się w środkowej tafli poziomej, ale w złym miejscu lub w złej pozycji.

Postępowanie. Ustawiamy sześcian tak, aby ten klocek znalazł się na miejscu PCS i wykonujemy $c^{-1}d^{-1}c^{-1}d^{-1}cdcdc$.

2. Warunek. Klocek znajduje się w dolnej warstwie.

Postępowanie. Za pomocą d^i ustawić klocek w takim miejscu, aby nad jego pionową ścianką znalazł się klocek środkowy w kolorze tej ścianki. Ustawić sześcian tak, aby klocek znalazł się na miejscu SCD.

3. Warunek. Klocek ma być wprowadzony na miejsce PCS.

Postępowanie. $c^{-1}d^{-1}c^{-1}d^{-1}cdcdc$.

4. Warunek. Klocek ma być wprowadzony na miejsce LCS.

Postępowanie. $cdcdc^{-1}d^{-1}c^{-1}d^{-1}c^{-1}$.

W czwartym etapie ustawiamy klocki narożne dolne na właściwych miejscach (ale być może na razie w złych pozycjach).

1. Warunek. Ustawiając odpowiednio sześcian i obracając dolną warstwę można doprowadzić do tego, że klocki LCD i PTD są na swoich miejscach, a LTD i PCD są zamienione miejscami.

Postępowanie. $dp^{-1}d^{-1}pcd^2c^{-1}p^{-1}dp$ (po doprowadzeniu do podanej sytuacji).

Warunek. Postępowaniem jak w punkcie 1 można doprowadzić do tego, że klocki LCD i PCD są na swoich miejscach, a LTD i PTD są zamienione miejscami.

Postępowanie. $d^2p^{-1}d^{-1}pcdc^{-1}p^{-1}dp$ (po doprowadzeniu do podanej sytuacji).

W piątym etapie doprowadzamy do tego, żeby klocki narożne dolne miały również właściwe pozycje.

1. Warunek. Dokładnie dwa klocki narożne dolne (wszystko jedno które) są zwrócone właściwym kolorem do dołu.

Postępowanie. Ustawić cały sześcian tak, aby przednia ścianka klocka LCD była brązowa. Wykonać $d^2p^{-1}d^2pdp^{-1}dp$.

2. Warunek. Żaden z klocków narożnych dolnych nie jest zwrócony brązową ścianką do dołu.

Postępowanie. Ustawić sześcian tak, żeby klocek LCD miał lewą ściankę brązową. Wykonać $d^2p^{-1}d^2pdp^{-1}dp$.

3. Warunek. Dokładnie jeden klocek narożny dolny jest zwrócony brązową ścianką do dołu.

Postępowanie. Ustawić sześcian tak, aby ten klocek znalazł się na miejscu LCD.

4. Warunek. Przednia ścianka klocka PCD jest brązowa.

Postępowanie. $d^2p^{-1}d^2pdp^{-1}dp$.

5. Warunek. Prawa ścianka klocka PCD jest brązowa.

Postępowanie. $p^{-1}d^{-1}pd^{-1}p^{-1}d^2pd^2$.

Szósty etap, to ustawienie wszystkich klocków krawędziowych dolnych brązowymi ściankami do dołu (być może na złych miejscach).

1. Warunek. Dokładnie dwa klocki nie są zwrócone brązową ścianką do dołu i leżą one naprzeciwko siebie.

Postępowanie. Ustawić sześcian tak, aby klocki te znalazły się na miejscach LSD i PSD i wykonać $s^{-1}dsd^{-1}s^{-1}dsds^{-1}d^2s$ (s oznacza ruch jedną ze środkowych warstw, taki jak na rys. 2).

2. Warunek. Dokładnie dwa klocki są zwrócone brązową ścianką do dołu i klocki te stykają się.

Postępowanie. Ustawić sześcian tak, aby klocki te znalazły się na miejscach SCD i PSD i wykonać $s^{-1}dsd^2s^{-1}ds$.

3. Warunek. Żaden klocek nie jest zwrócony brązową ścianką do dołu.

Postępowanie. $d^{-1}s^{-1}dsd^2s^{-1}dsds^{-1}dsd^2s^{-1}ds$.

W ostatnim, siódmym etapie, ustawiamy klocki krawędziowe dolne na właściwych miejscach.

1. Warunek. Żaden z tych klocków nie jest na właściwym miejscu.

Postępowanie. $sd^2s^{-1}dsd^2s^{-1}dsd^2s^{-1}$.

2. Warunek. Dokładnie jeden klocek krawędziowy dolny znajduje się na właściwym miejscu.

Postępowanie. Ustawić sześcian tak, aby klocek ten znalazł się na miejscu SCD i wykonać $sd^2s^{-1}dsd^2s^{-1}dsd^2s^{-1}$. Jeżeli jeszcze nie jest dobrze, powtórzyć tę samą operację.

Analizując użyte w tym algorytmie operacje można bez większego trudu stwierdzić, że za ich pomocą można otrzymać $12!\,8!\,3^7\,2^{10}$ różnych ułożeń sześcianu. Ponieważ poprzednio udowodniliśmy, że stanów dopuszczalnych mechanicznie nie jest więcej, możemy teraz stwierdzić, że jest ich dokładnie tyle.

Dalsze problemy matematyczne związane z kostką

Jeżeli przyjmiemy, że jako jeden ruch liczymy dowolną potęgę generatora (s liczy się wówczas jako dwa ruchy), to opisana metoda gwarantuje dojście do pozycji zerowej w 257 ruchach. Pod tym względem jest ona bardzo daleka od ideału. M. B. Thistlethwaite opracował za pomocą komputera strategię zapewniającą dojście do pozycji wyjściowej w 52 ruchach. Na to jednak, żeby spamiętać występujących w niej kilkaset różnych sytuacji

i warunków, trzeba być komputerem. Nie bardzo zresztą wiadomo, na ile ta strategia jest bliska idealnej.

Można w każdym razie łatwo wyliczyć, że istnieją ułożenia odległe od pozycji zerowej o co najmniej 17 ruchów. Oto rozumowanie:

Pierwszy ruch można wykonać na 18 sposobów – jest sześć generatorów, każdy może wystąpić w potędze 1, 2 lub 3. W każdym następnym ruchu trzeba użyć innej tafli niż w bezpośrednio poprzedzającym, inaczej dwa kolejne ruchy można zastąpić jednym. Zatem po n ruchach możemy otrzymać najwyżej

$$1+18+18\cdot 15+\ldots+18\cdot 15^{n-1}$$

ułożeń sześcianu. Obliczenie wykazuje, że liczba ta przewyższa ilość dopuszczalnych mechanicznie ułożeń dopiero dla $n \geqslant 17$. Nieco bardziej precyzyjne rozważania tego typu pozwalają stwierdzić, że istnieją ułożenia odległe od wyjściowego o 18 ruchów.

Interesujące są problemy dotyczące struktury grupy M. Jest to grupa o sześciu generatorach, z pewnymi relacjami. Powstaje pytanie, jakie (obok relacji oczywistych typu $d^4 = e = dgd^{-1}g^{-1}$) są nietrywialne i w miarę krótkie relacje w M. Okazuje się, że najkrótsze z nich są ośmioelementowe. Przykładem takiej relacji jest $(p^2 l^2 d^2 g^2)^2 = e$.

Warto zwrócić uwagę, że w przedstawionym algorytmie nie był używany generator g, zatem M jest w rzeczywistości generowana przez dowolnych pięć spośród generatorów g, d, l, c, p, t.

Ciekawy jest problem, jakie są rzędy elementów w M. Zagadnienie to pozwala traktować sześcian jako wygodną ilustrację elementarnych pojęć teorii grup. Spróbujmy omówić je nieco dokładniej. Przypuśćmy, że element $m \in M$ działa trywialnie poza kostkami krawędziowymi $K_1, \ldots, K_n$, a te kostki przestawia cyklicznie. Otóż nie znaczy to jeszcze wcale, że $m^n = e$. Możemy mieć do czynienia z cyklem skręconym, tzn. może być tak, że m^n wprawdzie nie rusza kostek $K_1, \ldots, K_n$ z miejsca, ale zmienia pozycję przynajmniej jednej z nich. Wówczas dopiero $m^{2n} = e$. Podobnie, jeżeli element m przedstawia cyklicznie n kostek narożnych, to może być tak, że dopiero $m^{3n} = e$.

Ogólnie rzecz biorąc, rząd elementu m można obliczyć w następujący sposób:

m działa na kostkach krawędziowych jako pewna permutacja. Permutacja ta rozkłada się na cykle długości $n_1, \ldots, n_i$. Podobnie zbiór kostek narożnych rozpada się na orbity długości $n_{i+1}, \ldots, n_j$. Na s-tej orbicie działa trywialnie $m^{\varepsilon_s n_s}$, gdzie $\varepsilon_s = 1$, 2 lub 3, zależnie od tego, czy jest to prosty czy skręcony cykl krawędziowy, bądź narożny. Łatwo stwierdzić, że rząd $m = \mathrm{NWW}(\varepsilon_s n_s)_{s=1,\ldots,j}$.

Rząd grupy M jest równy liczbie układów dopuszczalnych mechanicznie, czyli $2^{27}3^{14}5^3 7^2 11$, zatem stosując jedynie twierdzenie Lagrange'a nie mo-

żna wykluczyć, że $88^{\cdot}$ jest rzędem elementu w M. Taki element musiałby jednak odpowiadać rozkładowi na cykl prosty ośmioelementowy narożny (zresztą ośmioelementowy cykl narożny musi być prosty), cykl jedenastoelementowy krawędziowy i cykl jednoelementowy krawędziowy. Jest to jednak nieparzysta permutacja na klockach krawędziowych i narożnych łącznie, a taka operacja – jak wiemy – nie istnieje.

Można sformułować wiele prostych zadań tego typu, np.: pokazać, że nie istnieją elementy rzędów 25, 49, 385, istnieją elementy rzędów mniejszych od 13 itd. Największym rzędem elementu w M jest 1260. Wśród elementów o prostym zapisie dość duży rząd, bo 315, ma *gpdl*.

Nieco mniej trywialne zagadnienia pojawiają się przy badaniu różnych podgrup grupy M. Można tu rozpatrywać trzy typy problemów:

1° charakteryzacja układów osiągalnych przy działaniu danej podgrupy,

2° obliczenie rzędu podgrupy,

3° opracowanie algorytmu pozwalającego odtworzyć pozycję wyjściową przez działanie elementami tej podgrupy (oczywiście, po uprzednim rozregulowaniu sześcianu w ramach tejże podgrupy).

Na ogół jest stosunkowo łatwo opracować algorytm, trudniej natomiast pokazać, że jest on naprawdę dobry. Przypuśćmy, że ograniczymy się do wykonywania obrotów warstwami czołową i prawą, czyli działamy elementami podgrupy (c, p). Wówczas jest rzeczą banalną opracować metodę pozwalającą ustawić trzy klocki narożne na swoich miejscach (być może w złych pozycjach) i kiedy się to zrobi, okazuje się nieodmiennie, że trzy pozostałe też są już na swoich miejscach. Udowodnić jednak, że tak musi być, nie jest już wcale łatwo.

Na koniec chciałbym zwrócić uwagę na jeszcze jedną możliwość skomplikowania zabawy. Otóż nie jest całkiem prawdą, że klocki środkowe są zawsze tak samo położone względem siebie. Wprawdzie dwa klocki, które są naprzeciwko siebie, muszą pozostać naprzeciwko siebie, ale mogą się obracać. Można się więc domagać nie tylko powrotu do sytuacji, w której każda ściana jest jednobarwna, ale żądać również, aby klocki środkowe były w zadanych pozycjach. W rzeczywistości problem nie staje się przez to wiele trudniejszy. Okazuje się, że każda relacja w grupie M musi mieć parzystą sumę wykładników potęg przy generatorach (to znów zadanie z teorii grup, tym razem trywialne). Znaczy to, że jeżeli ułożymy sześcian tak, aby kolory się zgadzały, to klocki środkowe mogą być jedynie obrócone w stosuku do swoich właściwych pozycji o kąty, których suma jest wielokrotnością π. Niewielka modyfikacja podanego poprzednio algorytmu pozwala ułożyć sześcian tak, aby kolory się zgadzały, a dowolny klocek środkowy był obrócony o wielokrotność π. Tymczasem operacja $(d^2 p^{-1} d^2 pdp^{-1} dp)^3$ obraca dolny klocek środkowy o π, nie ruszając pozostałych, może więc posłużyć do poprawienia tych klocków środkowych, które mają jeszcze złe ustawienie.

Przy pewnej wprawie podany w artykule algorytm pozwala ułożyć sześcian w trzy minuty. Jednak rekordziści na Węgrzech i w Anglii mieszczą się z powodzeniem w jednej minucie.

DAVID SINGMASTER (Londyn)

Dydaktyczne zalety kostki węgierskiej([1])

Jestem tutaj, by kramarzyć podstępnym matematycznym nałogiem, który już zmarnował twórczą energię dziesiątków tysięcy matematyków, informatyków, fizyków, inżynierów itd., a także milionów uczniów i studentów. Swoje usprawiedliwienie w rozpowszechnianiu tego nałogu upatruję w tym, że jest to prawdopodobnie „najbardziej dydaktyczna" zabawka, jaką kiedykolwiek wynaleziono.

Mam na myśli Magiczną Kostkę, wymyśloną jakieś 6 lat temu przez prof. Ernö Rubika z Budapesztu. Produkcja ruszyła 3 lata temu i nałóg rozprzestrzenił się z Węgier na Europę, a teraz na cały świat! (...)

Kostka pomaga rozwijać rozumienie matematyki, co jest widoczne zwłaszcza na przykładzie takich dziedzin, jak: geometria przestrzenna, ogólne myślenie matematyczne, teoria grup, kombinatoryka.

(...) Podobno Rubik wynalazł swą kostkę, gdyż chciał zrobić coś dla rozwinięcia wyobraźni przestrzennej studentów (...) Wraz z upadkiem geometrii brył w szkołach, studenci wyższych uczelni często wykazują braki w umiejętnościach przestrzennych. (...)

Większość specjalnych idei, które rozwija kostka, należy do teorii grup; znaczna tego część jest elementarna i wiąże się z kombinatoryką. (...) Zacznę od sprawy rozumienia permutacji i ich reprezentacji. Należy tu dokonać wyraźnego rozróżnienia między permutacjami działającymi na symbolach (tj. permutacjami rozumianymi jako funkcje) a permutacjami działającymi na stanach (tj. permutacjami rozumianymi jako ruchy przedmiotu), czego elementarne kursy na ogół nie czynią. (...)

Z chwilą posiadania notacji do zapisywania przebiegu procesu, można badać grupę kostki, a raczej jej pewne prostsze podgrupy. Pojawiają się główne pojęcia teorii grup: $(pc)^{-1} = c^{-1}p^{-1}$, rząd elementu, grupy permutacji, podgrupy, rząd grupy, podgrupa generowana przez zbiór, podgrupa zachowująca pewne elementy niezmienione itd. (jednakże, jeżeli P jest długim ciągiem ruchów, wówczas teoretycznie mamy $PP^{-1} = I$, ale w praktyce równość ta sprawdza się tylko w $90^0/_0$ przypadków!).

([1]) Są to drobne fragmenty referatu wygłoszonego 11 sierpnia 1980 podczas IV Kongresu Nauczania Matematyki w Berkeley. Wyboru i tłumaczenia dokonał Z. Semadeni (*przyp. red.*).