ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXV (1983)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

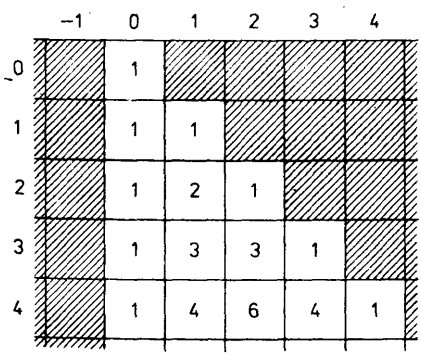
PRZEMYSŁAW NOWICKI (Warszawa)

Trójkątne liczydło Pascala

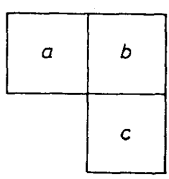
1. Opis liczydła. Na ograniczonej od góry, nieskończonej szachownicy, której wiersze są ponumerowane od góry liczbami $0, 1, 2, \ldots$, a kolumny od lewej do prawej liczbami $\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$, rozmieśćmy liczby trójkąta Pascala w ten sposób, żeby liczba $\binom{n}{k}$ znalazła się w n-tym wierszu i k-tej kolumnie (rys. 1). Liczby te nazwiemy *wartościami* odpowiednich pól. Pola pozostałe, zakreskowane na rysunku, mają wartość 0. Sposób przyporządkowania polom ich wartości określa następująca reguła rekurencyjna.

(a) Jedno wyróżnione pole P_0 najwyższego wiersza szachownicy ma wartość 1. Pozostałe pola tego wiersza mają wartość 0.

(b) Wartości a, b, c dowolnych trzech pól, które położone są względem siebie tak, jak na rys. 2, wiąże zależność: $c = a+b$.



Rys. 1



Rys. 2

Prostymi metodami, zrozumiałymi dla uczniów starszych klas szkoły podstawowej, można pokazać kombinatoryczny sens trójkąta Pascala. Zajmuje się tym m. in. Papy w książce *Mathématiques modernes* (tom V, poświęcony arytmetyce). Od Papy'ego pochodzi także pomysł, żeby na planszy z rys. 1 stawiać pionki, przekształcając ją tym prostym sposobem

w liczydło kombinatoryczne. Pokażemy, że dydaktyczne zastosowania takiego liczydła są znacznie bogatsze i efektowniejsze od tych, jakie pokazał Papy.

Rozwiniemy pomysł Papy'ego i wprowadzimy dwa rodzaje pionków, np. pionki białe i pionki czarne, w tym celu, żeby przedstawiać na planszy zarówno liczby dodatnie, jak i ujemne. Umówmy się zatem, że każdy pionek czarny na polu o wartości s przedstawia liczbę s (albo prościej, ma wartość s), natomiast pionek biały na tym polu ma wartość $-s$. Układ większej ilości pionków przedstawia sumę wartości wszystkich pionków (słowa „układ" używamy zgodnie z tym, co proponował A. Mąkowski w Wiadom. Mat. 21 (1978), str. 13–14).

Niech $P(k, n)$ będzie polem leżącym na przecięciu k-tej kolumny i n-tego wiersza ($k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$). Jego wartością jest liczba $\binom{n}{k}$. Umawiamy się, że $\binom{n}{k} = 0$, gdy $k < 0$ lub $k > n$. Układ złożony z p czarnych pionków stojących (po jednym) na polach $P(k_1, n_1), P(k_2, n_2), \ldots, P(k_p, n_p)$ oraz z q białych pionków stojących (po jednym) na polach $P(k_{p+1}, n_{p+1}), P(k_{p+2}, n_{p+2}), \ldots, P(k_{p+q}, n_{p+q})$ oznaczać będziemy za pomocą formalnej sumy

$$S = \binom{n_1}{k_1} + \binom{n_2}{k_2} + \ldots + \binom{n_p}{k_p} - \binom{n_{p+1}}{k_{p+1}} - \ldots - \binom{n_{p+q}}{k_{p+q}}$$

lub $S = \sum_{i=1}^{p} \binom{n_i}{k_i} - \sum_{j=p+1}^{p+q} \binom{n_j}{k_j}$ (pola $P(k_i, n_i)$ nie muszą tu być wszystkie różne; mogą to być również pola o wartości 0).

Wyrażenie S można interpretować dwojako: albo jako układ pionków, albo jako wartość liczbową tego układu. W formalnej sumie S można dowolnie przestawiać ze sobą wszystkie składniki. Można także przed symbolami $\binom{n_i}{k_i}$ dopisać współczynniki $a_i \in \mathbf{Z}$ przyjmując, że jeśli a_i jest dodatnie, to $a_i \cdot \binom{n_i}{k_i}$ oznacza układ a_i czarnych pionków na polu $P(k_i, n_i)$, jeśli natomiast a_i jest ujemne, to chodzi o $|a_i|$ pionków białych na tym polu. Układ pusty oznaczymy po prostu jako 0.

Układy pionków U, U_1, U_2 można do siebie dodawać i odejmować oraz mnożyć je przez liczby całkowite – otrzymujemy w ten sposób moduł wolny nad pierścieniem $\mathbf{Z}$. Czynnościowe odpowiedniki działań modułowych, które oznaczymy $U_1 + U_2$, $U_1 - U_2$ oraz $a \cdot U$, są bardzo proste i łatwe do zademonstrowania na planszy.

Niech będzie dany układ U pionków. Można oczywiście na wiele sposobów zmienić ten układ tak, by otrzymać układ V o tej samej wartości co U. Wśród wszystkich operacji $U \mapsto V$ o powyższej własności, w naturalny sposób

wyróżniają się następujące, bardzo proste manipulacje pionkami, które będziemy nazywać *operacjami elementarnymi*[1]:

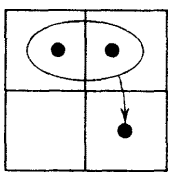
1° Zastąpienie pary pionków czarnych, z których jeden stoi na polu $P(k, n)$, a drugi na polu $P(k+1, n)$ jednym pionkiem czarnym postawionym na polu $P(k+1, n+1)$ (rys. 3). Otrzymujemy w ten sposób operację

$$f_A\colon \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \mapsto \binom{n+1}{k+1}, \quad \text{gdzie } A = P(k+1, n+1).$$

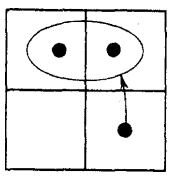
2° Manipulacja f_A^{-1} odwrotna do f_A (rys. 4).

3° Postawienie na dowolnym polu A pary przeciwnej: jednego pionka białego i jednego pionka czarnego; jest to operacja

$$g_A\colon 0 \mapsto \binom{n}{k} - \binom{n}{k}, \quad \text{gdzie } A = P(k, n).$$



Rys. 3



Rys. 4

4° Zdjęcie z pola A pary przeciwnej, czyli operacja g_A^{-1} odwrotna do g_A.

5° Postawienie pionka czarnego na dowolnym polu A o wartości 0, czyli operacja

$$h_A\colon 0 \mapsto \binom{n}{k}, \quad \text{gdzie } A = P(k, n) \text{ oraz } \binom{n}{k} = 0.$$

6° Zdjęcie pionka czarnego z pola A o wartości 0, czyli operacja h_A^{-1} odwrotna do h_A.

Operacje analogiczne do 1°, 2°, 5° i 6° definiujemy także dla pionków białych. Chcąc uczynić zadość ścisłości, należałoby przyjąć dla nich osobne oznaczenia; nie zrobimy tego, by nadmiernie nie mnożyć symboliki.

2. Czynnościowe dowody znanych tożsamości kombinatorycznych. Korzystając z trójkątnego liczydła Pascala można udowodnić wiele znanych tożsamości kombinatorycznych. Dowody będą polegały na przekształceniu odpowiednich układów pionków za pomocą operacji elementarnych. Takie czyn-

---

[1] Dostajemy w ten sposób ugrupowanie Piageta, por. E. Puchalska, *Liczydła planszowe – analiza struktury matematycznej i propozycje dydaktyczne*, Dydaktyka Mat. 2 (1982), str. 143–202.

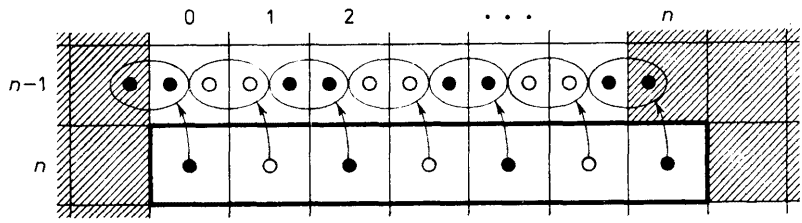
nościowe dowody, ze względu na ich prostotę i sugestywność, mają, jak sądzę, duże wartości dydaktyczne, a ponadto są same w sobie bardzo interesujące.

Umówmy się, że na rysunkach ilustrujących omawiane przykłady obowiązuje zasada: układ pionków otoczonych pogrubioną ramką (jeśli na rysunku jest taka ramka) ma tę samą wartość co układ pionków poza ramką. Jeśli na rysunku jest kilka ramek, a więc i kilka układów, wszystkie one mają tę samą wartość.

PRZYKŁAD 1. Jeśli $n > 0$, to

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} = 0. \tag{1}$$

Istotnie, za pomocą operacji typu f_A^{-1} zamieńmy każdy z pionków układu, który odpowiada lewej stronie tożsamości, na dwa pionki w wierszu $n-1$ (rys. 5), a następnie zdejmijmy z planszy wszystkie pary przeciwne (jest ich n) oraz oba pionki stojące na polach zerowych $P(-1, n-1)$ i $P(n, n-1)$. Otrzymamy układ pusty, którego wartością jest oczywiście 0.



Rys. 5

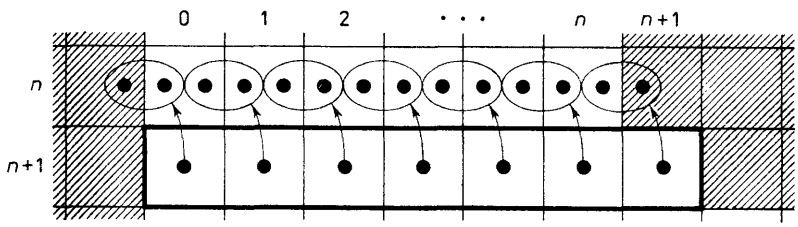
PRZYKŁAD 2.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Istotnie, układ pionków reprezentujących lewą stronę tożsamości oznaczmy symbolem U_n, a jego wartość symbolem u_n. Za pomocą operacji typu f_A^{-1} przesuńmy układ U_{n+1} do wiersza n (rys. 6) i zdejmijmy z planszy oba pionki z pól zerowych. Otrzymamy układ $2 \cdot U_n$. Stąd związek $u_{n+1} = 2 \cdot u_n$. Obliczamy teraz kolejno: $u_0 = 1$, $u_1 = 2, \ldots, u_n = 2^n, \ldots$

PRZYKŁAD 3. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną, k_n niech będzie częścią całkowitą $\frac{1}{2}n$ ($k_n = E(\frac{1}{2}n)$) i niech w_n będzie wartością układu

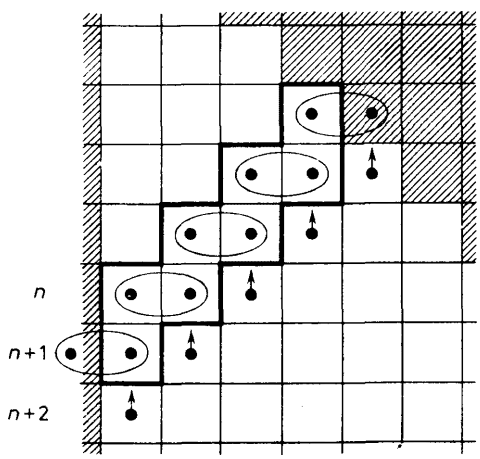
$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n-k_n}{k_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$



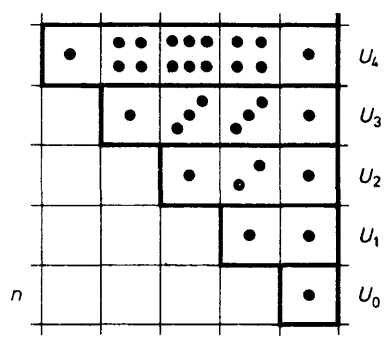
Rys. 6

Okazuje się, że ciąg $w_0, w_1, w_2, \ldots$ jest ciągiem Fibonacciego. Istotnie, $w_0 = 1$, $w_1 = 1$, a odpowiednie manipulacje dowodzą, że $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$ (rys. 7).

PRZYKŁAD 4 (Papy). Niech U_0 będzie układem złożonym z jednego pionka na polu $A = P(k, n)$. Wykonajmy operację f_A^{-1} i oznaczmy symbolem U_1 otrzymany układ dwóch pionków w wierszu $n-1$. Z kolei każdy z pionków układu U_1 zamieńmy na równoważną mu parę pionków w wierszu $n-2$; otrzymany układ oznaczmy symbolem U_2 itd. Rysunek 8 pokazuje kilka początkowych wyrazów ciągu układów $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n$ (jeden układ w jednym wierszu).



Rys. 7



Rys. 8

Interpretacją rysunku 8 są wzory:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2},$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-3}{k} + 3\binom{n-3}{k-2} + 3\binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-3}.$$

Ogólnie, porównując wartości układów U_0 i U_i otrzymujemy równość typu

$$\binom{n}{k} = \sum_{j=0}^{k} a_{i,j} \cdot \binom{n-i}{k-j}.$$

Nasuwa się pytanie, jak wyznaczyć współczynniki $a_{i,j}$. Otóż łatwo zauważyć, że $a_{i,j} + a_{i,j+1} = a_{i+1,j+1}$, a zatem liczby pionków na polach układów U_i tworzą odwrócony trójkąt Pascala, tj. $a_{i,j} = \binom{i}{j}$. Wynika stąd, że

$$\binom{n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{i}{j} \cdot \binom{n-i}{k-j}, \quad \text{gdzie } 0 \leqslant i \leqslant n \tag{4}$$

(niektóre składniki powyższej sumy mogą być równe 0).

Równość $a_{i,j} = \binom{i}{j}$ można uzasadnić jeszcze inaczej. Otóż fakt, że wartości układów U_0 i U_i są takie same, nie zależy od wyboru wyjściowego pola $P(k, n)$. Możemy więc w szczególności przyjąć, że układ U_i stoi w wierszu zerowym, a wyróżnionym polem P_0 tego wiersza jest pole $P(k-j, n-i)$. Tym samym $n = i$ oraz $k = j$. Wartością układu U_0 jest wówczas $\binom{i}{j}$, natomiast wartością układu U_i jest $a_{i,j}$, gdyż na polu P_0 stoi $a_{i,j}$ pionków tego układu, a pozostałe pola zajmowane przez układ U_i to pola zerowe. Stąd $a_{i,j} = \binom{i}{j}$.

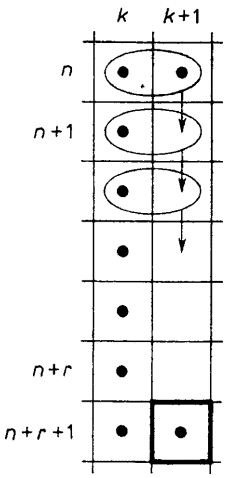
Przykład 5.

$$\binom{n}{k+1} + \sum_{j=0}^{r} \binom{n+j}{k} = \binom{n+r+1}{k+1}, \quad \text{dla } r = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Istotnie, ciąg operacji typu f_A przekształca układ odpowiadający lewej stronie tożsamości w układ złożony z jednego pionka na polu $P(k+1, n+r+1)$ (rys. 9). Zwróćmy uwagę, że w tym przykładzie wszystkie parametry: r, k i n można wybrać dowolnie i niezależnie od siebie. Dowolność wyboru parametrów n i k ma następujący sens czynnościowy: układy odpowiadające obu stronom tożsamości (po ustaleniu w niej „wolnych" parametrów n, r i k) można przesuwać po planszy dowolnie i w każdym położeniu będą one miały równe wartości. Czytelnikowi, jako zadanie, pozostawiamy odpowiednie dobranie r oraz takie umieszczenie obu układów na planszy, żeby odczytać następujące związki:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \ldots + \binom{k-1}{k-1}, \quad \text{gdzie } n \geqslant k \geqslant 1, \tag{6}$$

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \text{gdzie } n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7}$$



Rys. 9

$$\binom{n}{1} = n, \quad \text{gdzie } n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{8}$$

$$\binom{n}{2} = 1+2+3+\ldots+(n-1), \quad \text{gdzie } n = 2, 3, 4, \ldots \tag{9}$$

PRZYKŁAD 6. Za pomocą odpowiednich manipulacji pionkami czytelnik zechce udowodnić tożsamość

$$\binom{n}{k-1} + \sum_{i=0}^{r} \binom{n+i}{k+i} = \binom{n+r+1}{k+r}, \tag{10}$$

gdzie k dowolne, n i r nieujemne, a następnie odczytać za jej pomocą związki:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-2} + \ldots + \binom{n-k-1}{0}, \quad \text{gdzie } n > k \geqslant 0, \tag{11}$$

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \text{gdzie } n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

$$\binom{n}{n-1} = n, \quad \text{gdzie } n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{13}$$

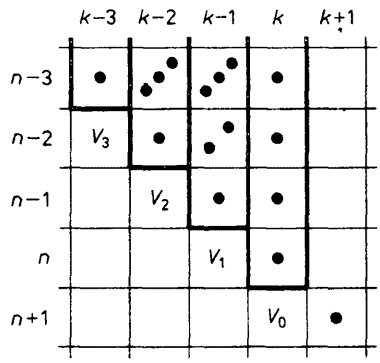
$$\binom{n}{n-2} = 1+2+3+\ldots+(n-1), \quad \text{gdzie } n = 2, 3, 4, \ldots \tag{14}$$

PRZYKŁAD 7. Niech V będzie układem złożonym z jednego pionka na polu $P(k+1, n+1)$. Korzystając ze związku (6) utwórzmy nowy układ V_0 o tej samej wartości co V i składający się z pionków rozmieszczonych w kolumnie k. Z kolei do każdego z pionków układu V_0 zastosujmy związek (6)

i utwórzmy układ V_1 składający się z pionków rozmieszczonych w kolumnie $k-1$ itd. Postępując tak dalej otrzymamy układy $V_0, V_1, \ldots, V_k$, gdzie V_i składa się z pionków rozmieszczonych w kolumnie $k-i$ (rys. 10). Interpretacją rysunku 10 są wzory:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \ldots + \binom{k}{k},$$

$$\binom{n+1}{k+1} = 1\binom{n-1}{k-1} + 2\binom{n-2}{k-1} + 3\binom{n-3}{k-1} + \ldots + (n-k+1)\binom{k-1}{k-1}.$$



Rys. 10

Tożsamość otrzymaną z porównania wartości układów V i V_i wygodnie będzie zapisać w postaci:

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=0}^{n-k} h_{i,i+j} \cdot \binom{n-i-j}{k-i}.$$

Czytelnik zechce sprawdzić, że $h_{i,j} = \binom{i}{j}$. Wobec tego prawdziwa jest tożsamość:

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{i+j}{i}\binom{n-i-j}{k-i}. \tag{15}$$

Podstawiając $k = 3$, $i = 2$, $n+1 = m$ otrzymamy w szczególności:

$$\binom{m}{3} = 1(m-2) + 2(m-3) + 3(m-4) + \ldots + (m-2)1. \tag{16}$$

Z kolei wychodząc od związku (11) i stosując metody analogiczne do użytych w powyższym przykładzie, możemy wykazać tożsamość:

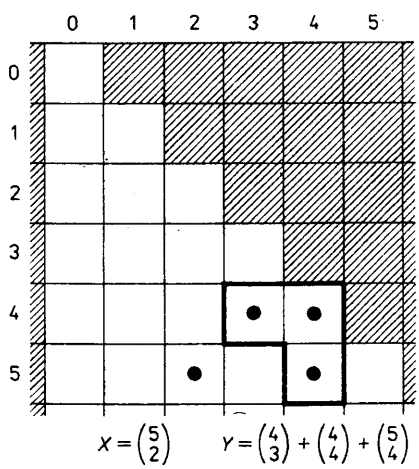
$$\binom{n+1}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{i+j}{j}\binom{n-i-j}{k-j}. \tag{17}$$

Podstawiając $i = 1$, $k = n-2$, $n+1 = m$ otrzymamy w szczególności:

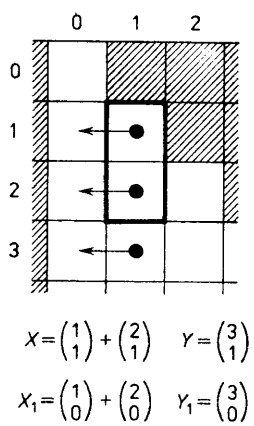
$$\binom{m}{m-3} = \sum_{j=0}^{m-3} (1+j)(m-2-j). \tag{18}$$

3. Równoważność elementarna. Układy U_1 i U_2 nazwiemy *równoważnymi elementarnie*, jeśli układ U_1 można przeprowadzić w układ U_2 za pomocą ciągu operacji elementarnych. Zauważmy, że określona tak relacja jest relacją równoważności.

Jeśli układy U_1 i U_2 są elementarnie równoważne, to oczywiście mają jednakowe wartości. Okazuje się, że i na odwrót: *jeśli układy U_1 i U_2 mają takie same wartości, to są elementarnie równoważne.* Wykażemy to odwołując się do konkretnego przykładu: spróbujmy wykazać elementarną równoważność układów X i Y z rys. 11. Można postąpić następująco: stosując wielokrotnie operacje typu f_A^{-1} (jak w przykładzie 4) przeprowadźmy układ X w układ X_0 złożony wyłącznie z pionków w wierszu zerowym. Po zdjęciu pionków z pól zerowych zostanie 10 pionków na polu P_0, czyli układ $10\cdot\binom{0}{0}$; wynika to stąd, że wartością X jest 10 i wartość nie zmienia się przy wykonywaniu operacji elementarnych. Ponieważ wartością Y jest również 10, więc wynik przeprowadzenia układu Y do wiersza zerowego za pomocą ciągu operacji typu f_A^{-1} będzie taki sam, co poprzednio, z dokładnością do pionków na polach zerowych. Układy X i Y są więc elementarnie równoważne.



Rys. 11



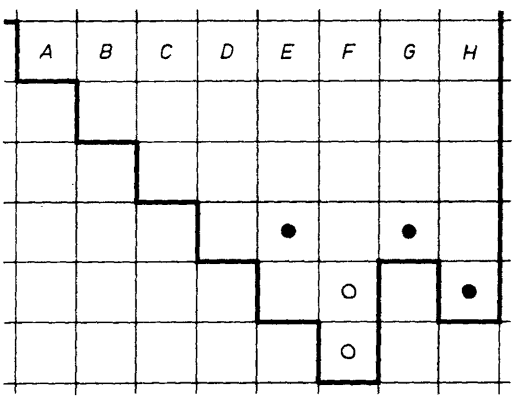
Rys. 12

W analogiczny sposób wykażemy, że każdy układ U o wartości u jest równoważny elementarnie układowi składającemu się z $|u|$ pionków na polu P_0 (czarnych, jeśli $u > 0$, lub białych, jeśli $u < 0$). Wobec tego *dwa układy są elementarnie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same wartości.*

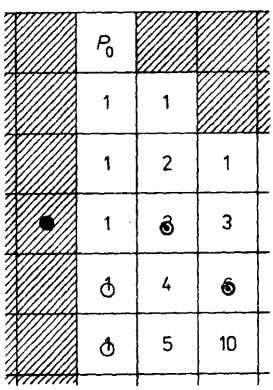
4. Mocna równoważność. Rozważmy dwa układy X i Y o tej samej wartości. Jeśli przesuniemy je równolegle do planszy (lub jeśli, co wychodzi na to samo, przesuniemy po planszy trójkąt Pascala), to otrzymane układy X_1 i Y_1 będą miały na ogół różne wartości (rys. 12). Jednak, jak dowodzą przykłady 4, 5 i 6, istnieją układy, które mają zawsze równe wartości, bez względu na to, jak je przesuniemy na planszy (czy też, jak umiejscowimy na planszy trójkąt Pascala). Okazuje się, że zależy to od tego, czy jeden z układów można przeprowadzić w drugi bez wykonywania operacji typu h_A (stawianie pionka na polu zerowym) lub operacji typu h_A^{-1}. Zanim jednak sformułujemy odpowiednie twierdzenie, rozważmy pewien przykład.

Układ U przedstawiony na rys. 13 umieszczamy na „czystej" szachownicy, tj. nie przyporządkujemy na razie wartości poszczególnym polom. Układ ten przesuwamy do wiersza zawierającego pola $A, B, \ldots, H$ za pomocą operacji typu f_A^{-1}. Jasne jest, że wszystkie manipulacje pionkami dokonywać się będą tylko na tych polach planszy, jakie znajdują się wewnątrz pogrubionej ramki na rysunku – nazwijmy ten obszar *stożkiem układu* U. Obliczymy teraz końcową zawartość każdego z pól $A, B, \ldots, H$, tzn. liczby pionków czarnych i białych na tych polach po dokonaniu wszystkich manipulacji.

Zawartość np. pola F można ustalić następująco. Umieśćmy tam wierzchołek P_0 trójkąta Pascala (rys. 14) i obliczmy – przy tak określonych



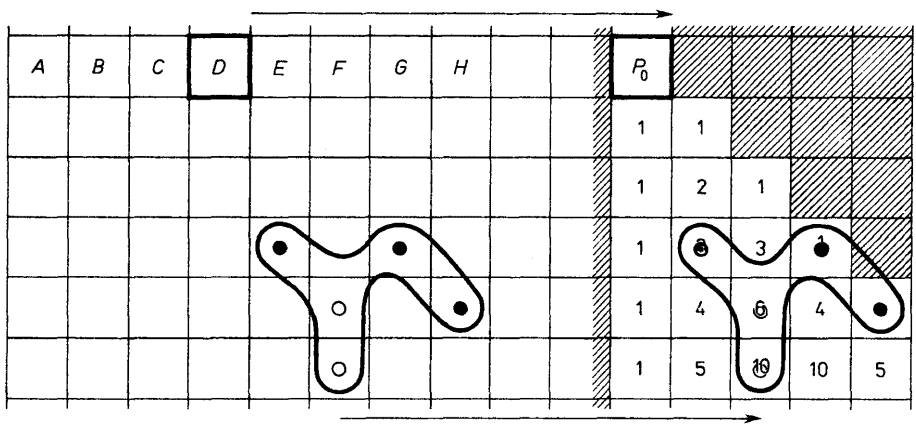
Rys. 13



Rys. 14

wartościach pól – sumę wartości wszystkich czarnych pionków układu U oraz sumę wartości wszystkich białych pionków układu U. Ponieważ pierwsza z tych liczb jest równa $u^+ = 0+3+6 = 9$, a druga $u^- = -1-1 = -2$, więc na polu F musi się znaleźć 9 pionków czarnych oraz 2 pionki białe. Po zdjęciu par przeciwnych zostanie 7 pionków czarnych.

Zawartość pozostałych pól można ustalić w ten sam sposób, co jednak nie jest najlepszym rozwiązaniem, gdyż za każdym razem musimy powtarzać od nowa wszystkie czynności. Postąpimy zatem inaczej. Umieśćmy wierzchołek P_0 trójkąta Pascala dowolnie poza stożkiem układu U. Chcąc teraz ustalić zawartość np. pola D przesuwamy cały układ U o taki wektor, który pole D przesuwa na pole P_0 (rys. 15). W naszym przykładzie będzie to przesunięcie o 7 pól na prawo, tj. przesunięcie o wektor $[\overrightarrow{7, 0}]$.



Rys. 15

Powyższy przykład sugeruje, że istnieje prosta metoda sprawdzenia, czy układ U można przeprowadzić w układ V za pomocą pewnego ciągu operacji elementarnych nie zawierającego operacji typu h_A, ani operacji typu h_A^{-1}: należy mianowicie przesunąć oba układy w górę, do pewnego wiersza n, który leży powyżej obu układów i sprawdzić, czy wynik przesuwania jest dla obu układów ten sam z dokładnością do par przeciwnych. Metodę tę wykorzystamy w dowodzie zapowiedzianego twierdzenia.

Będziemy mówić, że układy X i Y są *mocno równoważne*, gdy dla każdego całkowitoliczbowego wektora $\vec{w}$ o drugiej współrzędnej nieujemnej układy $X(\vec{w})$ i $Y(\vec{w})$ — będące wynikiem przesunięcia po planszy o wektor $\vec{w}$ układów X i Y odpowiednio — mają takie same wartości.

TWIERDZENIE. *Układy X i Y są mocno równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy układ X można przeprowadzić w układ Y za pomocą pewnego ciągu operacji elementarnych, z których każda jest postaci f_A, f_A^{-1}, g_A lub g_A^{-1}.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że układ X można przeprowadzić w układ Y za pomocą ciągu operacji $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i że każde x_i jest postaci f_A, f_A^{-1}, g_A lub g_A^{-1}. Weźmy teraz dowolny wektor $\vec{w}$ całkowitoliczbowy i o drugiej współrzędnej nieujemnej i każdą operację x_i przesuńmy o wektor $\vec{w}$, tzn. jeśli $x_i = f_A$, weźmy operację $f_{A+\vec{w}}$, jeśli $x_i = g_A$, weźmy operację $g_{A+\vec{w}}$ itd. Jest

oczywiste, że otrzymany w ten sposób ciąg operacji przeprowadza układ $X(\vec{w})$ w układ $Y(\vec{w})$. Wobec tego układy $X(\vec{w})$ i $Y(\vec{w})$ mają takie same wartości, co dowodzi, że układy X i Y są mocno równoważne.

Załóżmy teraz, że układy X i Y są mocno równoważne. Skonstruujemy pewien ciąg operacji elementarnych typu f_A, f_A^{-1}, g_A lub g_A^{-1}, który układ X przeprowadza w układ Y. Wybierzmy w tym celu dowolny wiersz „czystej" planszy położony powyżej obu układów – niech to będzie wiersz k. Zauważmy najpierw, że wynik przesuwania każdego z układów X i Y do wiersza k (za pomocą operacji typu f_A^{-1}) jest taki sam z dokładnością do par przeciwnych. Wynika to stąd, że dla każdego z tych układów – co pokazuje omówiony wyżej przykład – zawartość dowolnego pola w wierszu k zależy (z dokładnością do par przeciwnych) tylko od wartości, jaką przyjmuje ten układ po odpowiednim umiejscowieniu na planszy trójkąta Pascala. A ponieważ układy są mocno równoważne, więc i przyjmowane przez nie wartości są równe. Żądany ciąg operacji przeprowadzający X w Y otrzymujemy biorąc kolejno operacje następujące: operacje typu f_A^{-1} przeprowadzające układ X do wiersza k, zdjęcie z planszy wszystkich par przeciwnych (w wierszu k), dostawienie na odpowiednich polach pewnej liczby par przeciwnych (w wierszu k), operacje typu f_A przeprowadzające pionki wiersza k w układ Y.

Uwaga. Żądanie, wykorzystane w dowodzie powyższego twierdzenia, by druga współrzędna wektora $\vec{w}$ była nieujemna, zapewnia, że przesuwanie operacji x_i o wektor $\vec{w}$ zawsze da się wykonać, gdyż pola $A+\vec{w}$ „zmieszczą się" na planszy. Nie jest to jednak żądanie istotne, można bowiem wykazać, że ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n$ da się zawsze dobrać w ten sposób, żeby operacje x_i działały w granicach wierszy zajmowanych przez pionki układów X i Y, między najwyższym a najniższym takim wierszem.

Wniosek 1. *Jeśli prawdziwa jest pewna „liniowa" tożsamość dotycząca współczynników newtonowskich, tj. tożsamość postaci*

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \binom{n+n_i}{k+k_i} = 0,$$

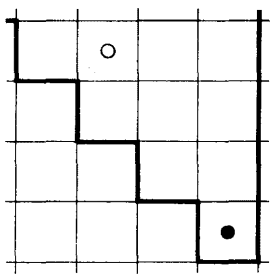
gdzie r, a_i, n_i, k_i – ustalone, k dowolne, n dowolne, to tożsamość tę można udowodnić czynnościowo za pomocą odpowiednich manipulacji pionkami na trójkątnym liczydle Pascala.

Dowód. Ustalmy dowolnie parametry n i k w ten sposób, żeby $n+n_i \geqslant 0$ dla każdego i. Układ $\sum_{i=1}^{r} a_i \cdot \binom{n+n_i}{k+k_i}$ ustawmy na planszy. Jest oczywiste, że układ ten jest mocno równoważny układowi pustemu, gdyż zmiana parametrów n i k odpowiada „przesuwaniu" naszego układu po planszy. Wobec tego układ ten można przeprowadzić w układ pusty za pomocą ciągu operacji, z których każda jest typu f_A, f_A^{-1}, g_A lub g_A^{-1}.

WNIOSEK 2. *Układ złożony z dwóch pionków, jednego czarnego i jednego białego, można zastąpić mocno mu równoważnym układem złożonym z pionków jednakowego koloru wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z tych pionków leży w stożku drugiego.*

Dowód. Przypadek, gdy jeden z pionków leży w stożku drugiego, jest oczywisty – przesuwając w górę pionek tworzący wspomniany stożek „zbijemy" w końcu drugi z pionków. Jeśli natomiast żaden z pionków nie leży w stożku drugiego, można tak ustawić względem nich wierzchołek trójkąta Pascala (powyżej obu pionków), żeby w jednym położeniu układ miał wartość dodatnią, a w innym – wartość ujemną. Jest więc oczywiste, że żaden układ czarnych pionków, ani żaden układ białych pionków nie mogą być mocno równoważne naszemu układowi.

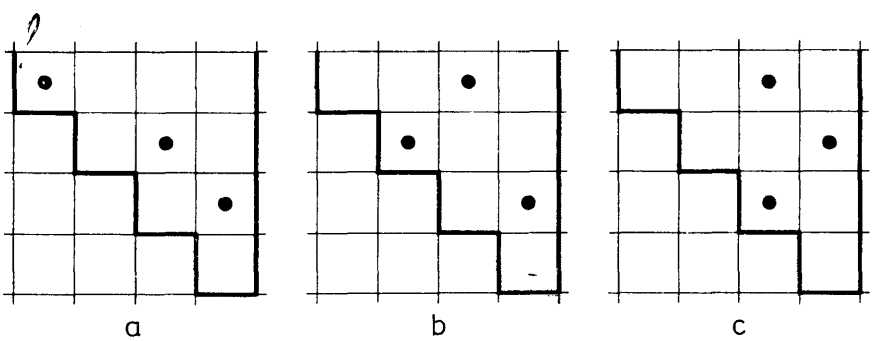
PRZYKŁAD 8. Układ przedstawiony na rys. 16 jest mocno równoważny pewnemu jednokolorowemu układowi pionków. Jest przy tym oczywiste, że musi to być układ pionków czarnych. Wśród wszystkich takich układów poszukajmy takich, które mają najmniejszą z możliwych liczbę pionków.



Rys. 16

Okaże się, że są 3 takie układy (rys. 17). Czytelnik zechce sprawdzić, że istotnie każdy z nich jest mocno równoważny układowi z rys. 16. Wykażemy, że mają one najmniejszą z możliwych liczbę pionków.

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Każdemu z czarnych pionków



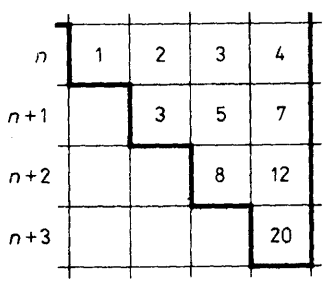
Rys. 17

stojących w wierszu n przypiszmy liczbę 1, a każdemu z pionków białych n-tego wiersza przypiszmy liczbę -1. Pionkom wiersza $n+r$ ($r \geqslant -n$) przypiszemy, w zależności od koloru, liczbę 2^r lub -2^r, natomiast układowi $U = \sum_{i=1}^{m} a_i \binom{n+r_i}{k_i}$ przypiszemy liczbę

$$\xi(U) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot 2^{r_i}.$$

Operacje f_A i g_A oraz operacje do nich odwrotne nie zmieniają wartości funkcji ξ. Wobec tego, jeśli układy X i Y są mocno równoważne, to $\xi(X) = \xi(Y)$ (ale nie na odwrót).

Niech teraz n będzie numerem wiersza, w jakim stoi biały pionek układu z rys. 16. Oznaczając ten układ U mamy $\xi(U) = 8-1 = 7$. Rozkład $7 = 4+2+1$ jest takim przedstawieniem liczby 7 w postaci sumy nieujemnych całkowitych potęg liczby 2, które ma najmniejszą z możliwych liczbę składników. Wynika stąd, że każdy układ czarnych pionków mocno równoważny układowi U musi się składać z co najmniej 3 pionków. Jeśli jest to układ złożony z dokładnie trzech pionków, muszą się one znajdować po jednym w wierszach n, $n+1$ i $n+2$ (i oczywiście w stożku czarnego pionka układu U).



Rys. 18

Można wykazać, że układy z rys. 17 są jedynymi układami trójpionkowymi mocno równoważnymi układowi U. Istotnie, przypiszmy polom wiersza n-tego znajdującym się w stożku, kolejno od lewej do prawej, liczby 1, 2, 3, 4 (pozostałe pola wiersza n-tego mają wartość 0), a polom wierszy $n+1$, $n+2$ i $n+3$ przypiszmy wartości zgodnie z rekurencyjną zasadą (b) (zob. rozdział 1, Opis liczydła), jak pokazuje rys. 18. Wartością układu U jest teraz 18 i oczywiście, każdy układ mocno mu równoważny też musi mieć wartość 18. Wybierając po jednej liczbie ze zbiorów $\{8, 12\}$, $\{3, 5, 7\}$ i $\{1, 2, 3, 4\}$, a następnie dodając wybrane liczby, sumę 18 można uzyskać tylko na trzy sposoby: $12+5+1$, $12+3+3$, $8+7+3$ — co odpowiada naszym trzem rozwiązaniom.