ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXV (1983)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

TOMASZ WEISS (Warszawa)

O zbiorach rzutowych

Wstęp. Zbiory rzutowe przestrzeni polskiej doskonałej X określamy (szczegółowe definicje będą podane dalej) jako te podzbiory przestrzeni X, które otrzymamy ze zbiorów borelowskich stosując na przemian operację przekształcenia ciągłego i uzupełniania. Przyjmujemy, że w hierarchii zbiorów rzutowych zerową klasę stanowi rodzina podzbiorów borelowskich przestrzeni X. Do pierwszej klasy zaliczamy obrazy ciągłe elementów klasy zerowej. Drugą otrzymujemy z poprzedniej stosując operację uzupełniania. Do trzeciej klasy zaliczamy obrazy ciągłe zbiorów należących do klasy drugiej itd.

Korzystając z tego, że zbiory rzutowe można łatwo opisać, potrafimy odpowiedzieć na wiele pytań dotyczących teoriomnogościowych i analitycznych własności zbiorów rzutowych. Trudne zagadnienia, związane z mocą lub mierzalnością w sensie Lebesgue'a dowolnego podzbioru przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$, w przypadku zbiorów rzutowych są łatwiejsze do rozstrzygnięcia właśnie dzięki ich prostej definicji. Ponadto większości faktów o zbiorach rzutowych możemy dowieść bez używania pewnika wyboru lub posługując się jego słabszymi formami – np. zasadą wyborów zależnych. Ma to szczególne znaczenie, gdy nie tylko pytamy o istnienie zbioru o pewnej własności (np. nie zawierającego podzbioru doskonałego), ale chcemy wiedzieć, jak taki zbiór „wygląda".

Za początki teorii zbiorów rzutowych, zwanej także opisową teorią mnogości, uważa się badania nad funkcjami rzeczywistymi prowadzone przez matematyków francuskich Baire'a, Borela i Lebesgue'a pod koniec XIX wieku. W roku 1915 Suslin odkrywa błąd w jednej z prac Lebesgue'a polegający na założeniu, że rzut podzbioru borelowskiego płaszczyzny $\boldsymbol{R}^2$ na każdą z osi jest borelowski. Suslin dowodzi, że zbiory analityczne, tj. rzuty podzbiorów borelowskich przestrzeni $\boldsymbol{R}^2$, stanowią szerszą klasę niż rodzina borelowska. Również od Suslina pochodzą pierwsze twierdzenia dotyczące podstawowych własności zbiorów analitycznych.

Następnym ważnym krokiem w rozwoju opisowej teorii mnogości jest podanie przez Łuzina ogólnej definicji zbiorów rzutowych poprzez operację

rzutowania i uzupełniania. W latach dwudziestych zostaje opublikowanych wiele prac dotyczących teoriomnogościowych i analitycznych własności zbiorów należących do niższych klas rzutowych. Najważniejsze fakty, związane z zagadnieniami mocy, mierzalności i z własnościami oddzielania, zostaną odkryte przez Łuzina i Sierpińskiego.

W miarę rozwoju opisowej teorii mnogości pojawiają się problemy nie dające się rozwiązać w sposób zadowalający. Nie udaje się uzyskać odpowiedzi na pytania dotyczące mocy i mierzalności elementów wyższych klas rzutowych (hipotezy Łuzina). Dzisiaj wiemy, że przy zastosowaniu ówczesnych metod matematycznych problemy te nie mogły być rozwiązane, gdyż są niezależne od aksjomatów teorii mnogości.

W roku 1938 Gödel, w swojej słynnej pracy poświęconej dowodowi niesprzeczności hipotezy continuum, wykazuje istnienie w modelu L zbioru, który należy do trzeciej klasy w hierarchii rzutowej i który jest niemierzalny w sensie Lebesgue'a. Dzięki pracy Gödla pierwszy raz w teorii zbiorów rzutowych użyte zostają metody metamatematyczne i dlatego rok 1938 można uznać za początek nowoczesnej opisowej teorii mnogości.

W roku 1963 Cohen odkrywa metodę *forcingu*, która szybko zostaje zastosowana w badaniach nad zbiorami rzutowymi. Metoda forcingu pozwala rozstrzygnąć problem niezależności lub niesprzeczności hipotez postawionych kilkadziesiąt lat wcześniej. Uzyskiwane są zaskakujące rezultaty, które są często sprzeczne z intuicją zbioru rzutowego.

Najnowszy rozdział opisowej teorii mnogości stanowią zagadnienia związane z determinacją gier rzutowych. Początkowo metody teorii gier stosuje się w dowodach starych twierdzeń dotyczących zbiorów analitycznych. Okazuje się jednak, że dzięki teorii gier można rozwiązać wiele dotąd nierozstrzygniętych problemów opisowej teorii mnogości. Zagadnienia determinacji, intensywnie studiowane od początku lat siedemdziesiątych, rzucają nowe światło na strukturę hierarchii rzutowej. Można stwierdzić, że determinacja zbiorów rzutowych stanowi w chwili obecnej główny nurt badań nad opisową teorią mnogości, tak jak za czasów Łuzina najważniejszym problemem była moc i mierzalność.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie najważniejszych faktów z teorii zbiorów rzutowych — od podstawowych twierdzeń o przestrzeniach polskich do najnowszych wyników dotyczących determinacji zbiorów borelowskich. Teoria zbiorów rzutowych jest trudnym działem teorii mnogości i dlatego koniecznością było pominięcie dowodów. Również dodatkowe aksjomaty teorii mnogości, które stosuje się we współczesnych badaniach nad hierarchią rzutową, nie zostały przedstawione z całkowitą ścisłością, gdyż wymagałoby to wyłożenia skomplikowanych metod metamatematycznych. Artykuł ten należy więc traktować jako wprowadzenie do problematyki, którą zajmuje się opisowa teoria mnogości.

1. Przestrzeń Baire'a. Zakładamy, że skrócony termin „przestrzeń" X oznacza przestrzeń metryczną ośrodkową i zupełną. W topologii nazywamy taką przestrzeń *przestrzenią polską*. Przyjmujemy ponadto, że każda omawiana przestrzeń polska jest doskonała, to znaczy nie ma punktów izolowanych. Przykładem przestrzeni polskiej doskonałej jest n-wymiarowa przestrzeń euklidesowa $\boldsymbol{R}^n$.

Szczególnie ważną w opisowej teorii mnogości jest *przestrzeń Baire'a*, którą oznaczamy symbolem $\mathcal{N}$. Składa się ona ze wszystkich nieskończonych ciągów liczb naturalnych (a więc $\mathcal{N} = \omega^\omega$) oraz ma topologię produktową przy założeniu, że ω jest przestrzenią dyskretną. Topologię w $\mathcal{N}$ można zdefiniować w sposób równoważny za pomocą metryki określając odległość d następującym wzorem:

1° $x, y \in \mathcal{N}$ i $x = y$, to $d(x, y) = 0$.

2° $x, y \in \mathcal{N}$ i $x \neq y$, to $d(x, y) = (\inf\{n;\ x(n) \neq y(n)\} + 1)^{-1}$, gdzie $x(n)$ i $y(n)$ oznaczają odpowiednio n-te wyrazy ciągów x i y.

Przestrzeń $\mathcal{N}$ z tak określoną metryką jest zupełna, zawiera podzbiór gęsty przeliczalny (np. podzbiór składający się z ciągów, których prawie wszystkie wyrazy są zerami) i nie ma punktów izolowanych. Ponadto $\mathcal{N}$ jest homeomorficzna z przestrzenią liczb niewymiernych Q, z każdą swoją potęgą $\mathcal{N}^k$ ($k \geqslant 1$) i z produktem nieskończonym $\mathcal{N}^\omega$.

TWIERDZENIE 1. *Każda przestrzeń X jest obrazem ciągłym przestrzeni $\mathcal{N}$.*

Funkcję ciągłą f taką, że $f(\mathcal{N}) = X$, można dobrać w ten sposób, aby odwzorowywała różnowartościowo pewien zbiór domknięty $a \subseteq \mathcal{N}$ na przestrzeń X. Możemy więc powiedzieć, że każda przestrzeń X jest obrazem ciągłym i różnowartościowym podzbioru domkniętego przestrzeni Baire'a.

Niech X będzie teraz dowolnym zbiorem. Część wspólna dowolnej ilości σ-ciał zawartych w $P(X)$ (gdzie $P(X)$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów X) jest także σ-ciałem. Istnieje zatem najmniejsze σ-ciało zawierające pewną ustaloną rodzinę podzbiorów X. Najmniejsze σ-ciało zawierające wszystkie podzbiory otwarte przestrzeni X nazywamy rodziną podzbiorów *borelowskich* przestrzeni X i oznaczamy symbolem $B(X)$. Z definicji $B(X)$ widać, że zbiorami borelowskimi będą zbiory otwarte, domknięte, przeliczalne iloczyny zbiorów otwartych itd.

TWIERDZENIE 2. *Każdy podzbiór borelowski dowolnej przestrzeni X jest obrazem ciągłym przestrzeni $\mathcal{N}$.*

Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi. Funkcję $f\colon X \to Y$ będziemy nazywać *borelowsko mierzalną*, jeśli dla każdego $b \in B(Y)$ jego przeciwobraz, czyli $f^{-1}(b)$, należy do $B(X)$. Klasa funkcji borelowsko mierzalnych jest szersza niż klasa funkcji ciągłych. Każda funkcja ciągła jest borelowsko mierzalna, ale nie na odwrót.

O funkcji $f\colon X \to Y$ powiemy, że jest *borelowskim izomorfizmem*, gdy jest

różnowartościowa, odwzorowuje X na Y oraz f i funkcja odwrotna f^{-1} są borelowsko mierzalne.

TWIERDZENIE 3 (Kuratowski). *Dla dowolnych przestrzeni X i Y istnieje izomorfizm borelowski odwzorowujący X na Y.*

2. Hierarchia rzutowa. Dla dowolnych zbiorów X i Y niech funkcja $r_X\colon X \times Y \to X$ będzie rzutem na oś X, to znaczy niech $r_X(x, y) = x$ dla każdej pary $(x, y) \in X \times Y$. Jeśli $A \subseteq P(X \times Y)$, to symbolem $r_X A$ oznaczać będziemy rodzinę, której elementami są rzuty na oś X zbiorów należących do A. Gdy $A \subseteq P(X)$, to przez cA oznaczymy rodzinę składającą się z uzupełnień zbiorów należących do A.

Następująca definicja indukcyjna, pochodząca od Łuzina, określa klasy rzutowe, które są podstawowym pojęciem opisowej teorii mnogości.

DEFINICJA 1. Niech X będzie dowolną przestrzenią. Dla każdego $n \in \omega$ określamy rodziny $\Sigma^1_n(X)$ i $\Pi^1_n(X)$ składające się z podzbiorów X:

1° $\Sigma^1_0(X) = \Pi^1_0(X) = B(X)$.

2° $\Sigma^1_1(X) = r_X B(X \times \mathcal{N})$; $\Pi^1_1(X) = c\Sigma^1_1(X)$.

3° $\Sigma^1_{n+1}(X) = r_X \Pi^1_n(X \times \mathcal{N})$; $\Pi^1_{n+1}(X) = c\Sigma^1_{n+1}(X)$.

Rodziny $\Sigma^1_n(X)$ i $\Pi^1_n(X)$ dla dowolnego $n \in \omega$ nazywamy *klasami rzutowymi*, ich elementy noszą nazwę *zbiorów rzutowych*. Zbiory należące do $\Sigma^1_1(X)$, odkryte przez Suslina, nazywamy *analitycznymi*, zbiory klasy $\Pi^1_1(X)$ *uzupełnieniami analitycznymi*.

W definicji zbiorów analitycznych rodzinę $B(X \times \mathcal{N})$ możemy zastąpić przez klasę wszystkich podzbiorów domkniętych przestrzeni $X \times \mathcal{N}$. Zbiory analityczne zawarte w X są zatem rzutami podzbiorów domkniętych przestrzeni $X \times \mathcal{N}$.

Z definicji 1 wynika, że kolejne klasy rzutowe otrzymujemy przez stosowanie operacji rzutowania lub uzupełniania. W ten sposób uzyskujemy coraz bardziej skomplikowane podzbiory przestrzeni X. Istnieją jednak w każdej przestrzeni X zbiory, które nie należą do żadnej klasy rzutowej. Wynika to z faktu, że jeśli X jest przestrzenią polską doskonałą, to moc X jest równa $\mathfrak{c}$ (continuum), a więc X ma $2^{\mathfrak{c}}$ różnych podzbiorów. Natomiast moc rodziny wszystkich zbiorów rzutowych zawartych w X jest równa $\mathfrak{c}$.

TWIERDZENIE 4. *Jeśli $f\colon X \to Y$ jest izomorfizmem borelowskim, to*

$$f[\Sigma^1_n(X)] = \Sigma^1_n(Y) \quad \text{oraz} \quad f[\Pi^1_n(X)] = \Pi^1_n(Y).$$

Korzystając z twierdzenia 4 i z faktu, że wykres funkcji borelowsko mierzalnej $f\colon X \to Y$ należy do $B(X \times Y)$, możemy podać jeszcze inną charakteryzację zbiorów rzutowych.

TWIERDZENIE 5. *Jeżeli $M(X, Y)$ jest rodziną wszystkich funkcji borelowsko mierzalnych odwzorowujących X w Y, to*

$$\Sigma^1_{n+1}(Y) = \{g(a);\ a \in \Pi^1_n(X) \text{ i } g \in M(X, Y)\}.$$

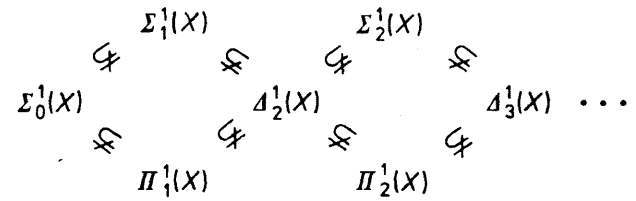
Twierdzenie 5 pozostanie prawdziwe, jeśli $M(X, Y)$ oznaczać będzie rodzinę wszystkich funkcji ciągłych przekształcających X w Y. Zbiory należące do $\Sigma^1_{n+1}(Y)$ są zatem obrazami ciągłymi elementów klasy $\Pi^1_n(X)$, gdzie X jest dowolną przestrzenią.

Bez trudu można dowieść, że klasy rzutowe $\Sigma^1_n(X)$, $\Pi^1_n(X)$ są zamknięte ze względu na operacje brania przeliczalnych sum i iloczynów. Wynika stąd, że dla dowolnej liczby naturalnej n rodzina

$$\Delta^1_n(X) = \Sigma^1_n(X) \cap \Pi^1_n(X)$$

jest σ-ciałem.

Między klasami rzutowymi zachodzą następujące inkluzje:



Wszystkie inkluzje przedstawione na diagramie są ostre. Oznacza to, że dzięki operacjom rzutowania i uzupełniania, które stosowaliśmy przy definiowaniu hierarchii rzutowej, otrzymujemy za każdym razem nowe zbiory.

3. Własności klas $\Sigma^1_1(X)$ i $\Pi^1_1(X)$. Przedstawimy teraz metodę otrzymywania zbiorów analitycznych, która pochodzi od Suslina i jest historycznie najwcześniejsza spośród wszystkich konstrukcji klasy $\Sigma^1_1(X)$.

Niech S będzie zbiorem wszystkich ciągów skończonych o wyrazach należących do zbioru liczb naturalnych, tj. $S = \bigcup_{n\in\omega} \omega^n$. Definiujemy relację $\preccurlyeq$ określoną na S, która jest liniowym porządkiem:

1° Jeżeli $s \in S$ i $s = \langle s_0, \ldots, s_n \rangle$, to

$$x_s = \frac{1}{2^{s_0+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{s_0+\ldots+s_n+n+1}}.$$

2° Jeżeli $s_1, s_2 \in S$, to $s_1 \preccurlyeq s_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_{s_1} \geqslant x_{s_2}$.

Nazwijmy *rzeszotem* każdą funkcję $p\colon S \to P(X)$ (gdzie X jest dowolnym zbiorem) taką, że dla wszelkich s_1, s_2 należących do S spełniony jest warunek: jeśli $s_1 \subseteq s_2$, to $p(s_1) \supseteq p(s_2)$. Określamy tzw. zbiór „przesiany" przez rzeszoto p, który oznaczamy symbolem $\Sigma[p]$:

1° $\Sigma^p_x = \{s \in S;\ x \in p(s)\}$.

2° $\Sigma[p] = \{x \in X;\ \Sigma^p_x$ nie jest dobrze uporządkowany przez relację $\preccurlyeq\}$.

TWIERDZENIE 6. *Niech X będzie dowolną przestrzenią. Oznaczmy przez P rodzinę wszystkich rzeszot domkniętych, to znaczy*

$P = \{p;\ p$ *jest rzeszotem i dla każdego* $s \in S$ *zbiór* $p(s)$ *jest domknięty w* $X\}$.

Wtedy

$$\{\Sigma[p];\ p\in P\} = \Sigma^1_1(X).$$

Innymi słowami klasa zbiorów analitycznych jest identyczna z rodziną zbiorów „przesianych" przez rzeszota domknięte.

WNIOSEK 1. *Jeśli* $a\in\Pi^1_1(X)$, *to istnieje rzeszoto domknięte* p *takie, że* $a = \bigcup_{\xi<\aleph_1} C^p_\xi$, *gdzie* $C^p_\xi = \{x;\ \Sigma^p_x$ *jest dobrze uporządkowany w typ* ξ *przez relację* $\preccurlyeq\}$.

Zbiory C^p_ξ nazywamy *konstytuentami* (*składowymi*) zbioru a. Można udowodnić, że dla każdego $\xi < \aleph_1$ konstytuenta C^p_ξ jest zbiorem borelowskim. Wynika stąd, że dowolne uzupełnienie analityczne jest sumą $\aleph_1$ zbiorów borelowskich. Analogiczne twierdzenie daje się udowodnić dla rodzin $\Sigma^1_1(X)$ i $\Sigma^1_2(X)$, to znaczy dowolny zbiór należący do $\Sigma^1_1(X)$ lub $\Sigma^1_2(X)$ również daje się przedstawić jako suma $\aleph_1$ zbiorów borelowskich.

LEMAT 1. *Przypuśćmy, że zbiory* a, b *należą do* $\Sigma^1_1(X)$ *i* $a\subseteq X\setminus b = X\setminus\Sigma[p] = \bigcup_{\xi<\aleph} C^p_\xi$, *gdzie* p *jest pewnym rzeszotem domkniętym. Wtedy istnieje* $\xi_0 < \aleph_1$ *takie, że* $a\subseteq \bigcup_{\xi<\xi_0} C^p_\xi$.

Bezpośrednio z lematu 1 wynikają dwa ważne wnioski.

TWIERDZENIE 7 (Łuzin). *Jeśli* $a, b\in\Sigma^1_1(X)$ *i* $a\cap b = \emptyset$, *to istnieje* $e\in B(X)$ *takie, że* $a\subseteq e$ *oraz* $e\cap b = \emptyset$.

TWIERDZENIE 8 (Suslin). $\Sigma^1_1(X)\cap\Pi^1_1(X) = B(X)$.

Twierdzenie 7, nazywane *zasadą oddzielania* dla zbiorów analitycznych, nie przenosi się na uzupełnienia analityczne. Istnieją mianowicie dwa rozłączne zbiory klasy $\Pi^1_1(\mathcal{N})$, które nie dają się „rozdzielić" zbiorem borelowskim (S. Nowikow). Twierdzenie 8 wskazuje na ważną własność uzupełnienia analitycznego; jeżeli ma ono nieprzeliczalną ilość różnych konstytuent, to nie jest analityczne. Jak pokazał Sierpiński, w przestrzeni $\mathcal{N}$ można podać efektywnie (tzn. bez użycia pewnika wyboru) przykład zbioru a należącego do $\Pi^1_1(\mathcal{N})$ i mającego nieprzeliczalną ilość różnych konstytuent. Skonstruowany przez Sierpińskiego zbiór a ma jeszcze jedną interesującą własność; jest on „uniwersalny" dla klasy $\Pi^1_1(X)$ (gdzie X oznacza dowolną przestrzeń), tj. dla każdego $b\in\Pi^1_1(X)$ istnieje funkcja $f\colon X\to\mathcal{N}$ borelowsko mierzalna taka, że $b = f^{-1}(a)$.

4. Miara i kategoria. Na podstawie diagramu i twierdzenia 8 wiemy, że na początku hierarchii rzutowej pojawiają się zbiory, które nie są borelowskie. Ponieważ elementy rodziny $B(X)$ są mało skomplikowane, chcielibyśmy wiedzieć, kiedy dla zbioru rzutowego $a\subseteq X$ istnieje $b\in B(X)$ różniące się od a o zbiór intuicyjnie „mały", to jest przykładowo zbiór I kategorii. Niech $J(X)$ będzie rodziną zbiorów I kategorii zawartych w przestrzeni X. Przypomnijmy, że $a\subseteq X$ nazywamy zbiorem I kategorii, jeśli a jest sumą

przeliczalnej ilości zbiorów nigdziegęstych zawartych w X. O zbiorze $a \subseteq X$ powiemy, że ma własność Baire'a, jeżeli istnieje $b \in B(X)$ takie, że zbiór $(a \setminus b) \cup (b \setminus a)$ należy do $J(X)$.

Oznaczmy symbolem C najmniejsze σ-ciało podzbiorów X spełniające warunki:

1° C zawiera podzbiory domknięte przestrzeni X.

2° C jest zamknięte na operację Σ, to znaczy, jeśli p jest rzeszotem i dla każdego $s \in S$, $p(s) \in C$, to wówczas $\Sigma[p] \in C$.

LEMAT 2. $C \subseteq \Delta_2^1(X) = \Sigma_2^1(X) \cap \Pi_2^1(X)$.

LEMAT 3. *Klasa podzbiorów X mających własność Baire'a jest σ-ciałem zamkniętym na operację Σ.*

Z lematów 2 i 3 wynika ważne

TWIERDZENIE 9 (Łuzin, Sierpiński). *Zbiory należące do C (w szczególności zbiory analityczne i uzupełnienia analityczne) mają własność Baire'a.*

Niech μ będzie półskończoną miarą określoną na pewnym σ-ciele podzbiorów przestrzeni X spełniającą następujące warunki:

1° μ jest miarą borelowską, tzn. podzbiory borelowskie przestrzeni X są mierzalne względem μ,

2° μ jest zupełna, tj. dla dowolnego zbioru b takiego, że $\mu(b) = 0$, każdy zbiór zawarty w b jest mierzalny względem μ.

Przez $\mathfrak{M}$ oznaczamy rodzinę zbiorów, które możemy „aproksymować" względem μ zbiorami borelowskimi, tzn. $\mathfrak{M} = \{a \subseteq X$; istnieje $b \in B(X)$ takie, że $\mu((a \setminus b) \cup (b \setminus a)) = 0\}$.

LEMAT 4. *$\mathfrak{M}$ jest σ-ciałem zamkniętym na operację Σ.*

Z lematu 4 otrzymujemy następujące

TWIERDZENIE 10 (Łuzin, Sierpiński). *Rodzina C zawarta jest w $\mathfrak{M}$. W szczególności każdy zbiór analityczny i każde uzupełnienie analityczne należy do $\mathfrak{M}$.*

Zauważmy, że n-wymiarowa miara Lebesgue'a λ określona na podzbiorach przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$ jest miarą półskończoną, borelowską i zupełną. Twierdzenie 10 mówi, że zbiory należące do $\Sigma_1^1(\boldsymbol{R}^n) \cup \Pi_1^1(\boldsymbol{R}^n)$ są mierzalne względem miary λ. Stąd zbiór a, o którym mówiliśmy w uwagach do twierdzenia 8, jest efektywnym przykładem zbioru nieborelowskiego, mierzalnego w sensie Lebesgue'a.

Na podstawie aksjomatyki teorii mnogości Zermelo–Fraenkla nie możemy udowodnić, że wszystkie elementy klasy $\Sigma_2^1(X)$ mają własność Baire'a lub są mierzalne względem półskończonej, borelowskiej i zupełnej miary μ. O zagadnieniach związanych z problemem posiadania własności Baire'a i mierzalnością względem miary μ zbiorów należących do wyższych klas rzutowych, tj. $\Sigma_n^1(X)$ lub $\Pi_n^1(X)$ dla $n \geqslant 2$, będziemy mówić w dalszej części.

5. Zbiory Suslina. Niech k będzie dowolną nieskończoną liczbą kardynalną. W zbiorze k^ω składającym się ze wszystkich nieskończonych, przeliczalnych ciągów o wyrazach należących do k definiujemy topologię produktową zakładając, że k ma topologię dyskretną. Przestrzeń k^ω z tak określoną topologią jest metryzowalna i doskonała, ale dla $k > \aleph_0$ nie jest przestrzenią ośrodkową. O zbiorze a zawartym w przestrzeni X powiemy, że jest zbiorem Suslina typu k, jeśli $a = r_X(b)$, gdzie b należy do rodziny podzbiorów domkniętych przestrzeni $X \times k^\omega$. Klasa rzutowa $\Sigma^1_1(X)$ składa się oczywiście ze zbiorów Suslina typu $\aleph_0$.

LEMAT 5 (Martin). *Zbiór a zawarty w przestrzeni X jest zbiorem Suslina typu $\aleph_n$ ($n \in \omega$ oraz $n \geqslant 1$) wtedy i tylko wtedy, gdy $a = \bigcup_{\xi < \aleph_n} b_\xi$, gdzie $b_\xi \in B(X)$ dla każdego $\xi < \aleph_n$.*

Każdy zbiór należący do $\Sigma^1_2(X)$ jest sumą $\aleph_1$ podzbiorów borelowskich X, a więc z lematu 5 wynika, że dowolny element klasy $\Sigma^1_2(X)$ jest zbiorem Suslina typu $\aleph_1$.

Podamy teraz kilka faktów związanych z mocą zbiorów należących do $\Sigma^1_1(X)$ lub $\Pi^1_1(X)$. Zacznijmy od klasycznego twierdzenia dotyczącego zbiorów analitycznych.

TWIERDZENIE 11 (Suslin). *Jeśli $a \in \Sigma^1_1(X)$, to a jest przeliczalny lub zawiera podzbiór doskonały.*

Następujące twierdzenie jest uogólnieniem poprzedniego wyniku na zbiory Suslina.

TWIERDZENIE 12 (Mansfield). *Jeśli a jest zbiorem Suslina typu k i moc a jest większa od k, to wówczas a zawiera podzbiór doskonały.*

Dowolny zbiór doskonały, zawarty w przestrzeni X ma moc $\mathfrak{c}$, a więc z twierdzenia 11 wynika, że w klasie zbiorów analitycznych prawdziwa jest hipoteza continuum.

Wiemy już, że każdy zbiór $a \in \Pi^1_1(X)$ jest sumą $\aleph_1$ zbiorów borelowskich. Zatem na mocy twierdzenia 11 a może mieć moc $\aleph_0$, $\aleph_1$ lub $\mathfrak{c}$. Z twierdzenia 11 wynika również, że jeśli $\aleph_1 < \mathfrak{c}$, to a zawierać będzie podzbiór doskonały wtedy i tylko wtedy, jeśli moc a równa jest $\mathfrak{c}$. W przypadku, gdy $\aleph_1 = \mathfrak{c}$ nie możemy na podstawie aksjomatyki Zermelo–Fraenkla odpowiedzieć na pytanie, czy każde nieprzeliczalne uzupełnienie analityczne zawiera zbiór doskonały lub, co jest równoważne (lemat 1), nie potrafimy udowodnić, że istnieje nieprzeliczalny zbiór $a \in \Pi^1_1(X)$, którego każda konstytuenta jest co najwyżej przeliczalna.

6. Rzutowe dobre porządki. Niech X będzie dowolnym zbiorem i relacja $\leqslant_R$ dobrym porządkiem określonym na X. Dla $\leqslant_R$ możemy zdefiniować funkcję f: $X \to \mathrm{On}$ (gdzie On oznacza klasę wszystkich liczb porządkowych) spełniającą warunki:

1° $f(x) = 0$, jeśli $\neg y \leqslant_R x$ dla dowolnego $y \in X$ takiego, że $y \neq x$.

2° $f(x) = \sup\{f(y)+1;\ y \leqslant_R x\}$.

Liczbę porządkową $\sup\{f(x);\ x\in X\}$ nazywamy *długością relacji* $\leqslant_R$. Ponieważ istnieje dokładnie jedna funkcja spełniająca warunki 1°, 2°, długość relacji $\leqslant_R$ jest określona jednoznacznie.

TWIERDZENIE 13 (Kunen, Martin). *Niech $\leqslant_R$ będzie dowolną relacją dobrego porządku określoną na przestrzeni X. Jeśli $\leqslant_R$, jako podzbiór $X\times X$, jest zbiorem Suslina typu k, to długość relacji $\leqslant_R$ musi być mniejsza niż k^+, gdzie k^+ oznacza najmniejszą liczbę kardynalną większą niż k.*

Z twierdzenia 13 wynika, że dobry porządek należący do $\Sigma^1_1(X\times X)$ ma długość mniejszą niż $\aleph_1$. Ponieważ dowolna relacja dobrego porządku określona na X ma długość nie mniejszą od $\aleph_1$, otrzymujemy następujący ważny wniosek:

TWIERDZENIE 14. *Nie istnieje relacja dobrego porządku, która traktowana jako podzbiór $X\times X$ byłaby zbiorem analitycznym.*

Problem istnienia dobrego porządku klasy $\Sigma^1_n(X\times X)$ (lub, co jest równoważne, należącego do $\Delta^1_n(X\times X)$) nie ma na gruncie aksjomatyki Zermelo–Fraenkla rozwiązania dla $n>1$. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 15 (Cohen, Lévy). *Na podstawie systemu Zermelo–Fraenkla nie potrafimy udowodnić, że istnieje rzutowy dobry porządek przestrzeni $\mathcal{N}$.*

7. **Uniformizacja.** Niech a będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni $X\times Y$. Powiemy, że $\tilde{a}$ zawarte w a jest *uniformizacją* zbioru a, jeśli rzut r_X jest na zbiorze $\tilde{a}$ przekształceniem różnowartościowym i $r_X(\tilde{a})=r_X(a)$. Zauważmy, że korzystając z aksjomatu wyboru wykazujemy istnienie uniformizacji dla dowolnego $a\subseteq X\times Y$. Jednak w przypadku, gdy a jest zbiorem rzutowym, chcemy, aby $\tilde{a}$ było także zbiorem rzutowym i to należącym do możliwie niskiej klasy.

W dowolnej przestrzeni X istnieją zbiory borelowskie nie mające borelowskiej uniformizacji. Natomiast w pewnych szczególnych przypadkach zbiory borelowskie mają własność uniformizacji. Na przykład dowolny zbiór wypukły należący do $B(\boldsymbol{R}^k\times\boldsymbol{R}^l)$ ma uniformizację borelowską. Zachodzi również interesujące

TWIERDZENIE 16 (Arsenin, Kunugui, Nowikow). *Jeśli a należy do $B(X\times Y)$ i dla każdego $x_0\in X$ część wspólna prostej $x=x_0$ i zbioru a jest podzbiorem σ-zwartym przestrzeni $X\times Y$, to wówczas a ma uniformizację należącą do $B(X\times Y)$ oraz $r_X(a)$ jest podzbiorem borelowskim przestrzeni X.*

Z twierdzenia 16 wynika, że jeśli $a\in B(X\times Y)$ oraz rzut r_X jest na zbiorze a funkcją różnowartościową, to $r_X(a)$ jest podzbiorem borelowskim przestrzeni X. Zatem zbiory analityczne, nieborelowskie są obrazami zbiorów borelowskich w przekształceniach borelowsko mierzalnych (ciągłych), nieróżnowartościowych.

W przestrzeni $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ można pokazać efektywnie zbiór analityczny, który nie daje się zuniformizować za pomocą zbioru analitycznego. Własność uniformizacji ma natomiast klasa $\Pi^1_1(X\times Y)$.

TWIERDZENIE 17 (Kondô). *Każdy zbiór należący do* $\Pi^1_1(X \times Y)$ *ma uniformizację klasy* $\Pi^1_1(X \times Y)$.

Dowodzi się, że jeśli każdy zbiór klasy $\Pi^1_n(X \times Y)$ ma uniformizację należącą do $\Pi^1_n(X \times Y)$, to dowolny element rodziny $\Sigma^1_{n+1}(X \times Y)$ można zuniformizować zbiorem klasy $\Sigma^1_{n+1}(X \times Y)$. Otrzymujemy stąd

WNIOSEK 2. *Każdy zbiór należący do* $\Sigma^1_2(X \times Y)$ *ma uniformizację klasy* $\Sigma^1_2(X \times Y)$.

Twierdzenie 17 i wniosek 2 są najsilniejszymi wynikami, jakie można uzyskać na gruncie teorii Zermelo–Fraenkla. Świadczy o tym następujące

TWIERDZENIE 18 (Lévy). *W systemie aksjomatów Zermelo–Fraenkla nie możemy udowodnić, że każdy zbiór klasy* $\Pi^1_2(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ *ma uniformizację rzutową.*

8. Aksjomat Martina. Przestrzeń topologiczną X (niekoniecznie polską lub doskonałą) nazywamy *przestrzenią Suslina*, jeśli dowolna rodzina składająca się z parami rozłącznych, otwartych podzbiorów X jest co najwyżej przeliczalna. Powiemy, że spełniony jest *aksjomat Martina* dla liczby kardynalnej $\aleph$ mniejszej od $2^{\aleph_0}$ (aksjomat ten oznaczamy symbolem $A_\aleph$), jeśli prawdziwe jest zdanie: *dowolna, zwarta przestrzeń Suslina* X *nie jest sumą* $\aleph$ *zbiorów nigdziegęstych zawartych w* X. Przykładowo, niech X będzie domkniętym odcinkiem jednostkowym $J \subset \boldsymbol{R}$. Aksjomat Martina $A_\aleph$ mówi, że J nie daje się przedstawić jako suma $\aleph$ podzbiorów I kategorii zawartych w J.

Przez A oznaczmy następujące zdanie: jeżeli $\aleph < 2^{\aleph_0}$, to $A_\aleph$. Solovay i Tennenbaum udowodnili, że aksjomat A jest niesprzeczny z systemem Zermelo–Fraenkla. Aksjomat Martina dla liczby kardynalnej $\aleph_1$ ma interesujące konsekwencje w opisowej teorii mnogości, zwłaszcza w zagadnieniach związanych z mocą zbiorów klasy $\Pi^1_1(\mathcal{N})$ i mierzalnością elementów klasy $\Sigma^1_2(\mathcal{N})$.

TWIERDZENIE 19 (Martin, Solovay). *Niech* $Ł_1$ *oznacza następującą hipotezę (znaną jako hipoteza Łuzina): jeśli* $a \subset \mathcal{N}$ *i moc zbioru* a *jest równa* $\aleph_1$, *to* $a \in \Pi^1_1(\mathcal{N})$. *Zdanie* $Ł_1$ *jest niesprzeczne z* $A_{\aleph_1}$, *a więc jest również niesprzeczne z systemem aksjomatów Zermelo–Fraenkla.*

TWIERDZENIE 20 (Martin, Solovay). *Przyjmijmy, że* $Ł_2$ *oznacza (pochodzącą także od Łuzina) hipotezę: suma* $\aleph_1$ *podzbiorów borelowskich* $\mathcal{N}$ *należy do klasy* $\Sigma^1_2(\mathcal{N})$. *Zdanie* $Ł_2$ *jest niesprzeczne z aksjomatem* $A_{\aleph_1}$.

Wiemy, że każdy zbiór należący do $\Sigma^1_2(\mathcal{N})$ daje się przedstawić jako suma $\aleph_1$ zbiorów borelowskich. Z twierdzenia 20 wynika, że odwrotna implikacja, to znaczy hipoteza $Ł_2$, jest niesprzeczna z systemem aksjomatów Zermelo–Fraenkla. Zauważmy, że ze względu na istnienie izomorfizmu borelowskiego odwzorowującego $\mathcal{N}$ na przestrzeń X, twierdzenia 19 i 20 pozostaną prawdziwe, jeśli w miejsce symbolu $\mathcal{N}$ wstawimy X.

Martin i Solovay pokazali, że $A_{\aleph_1}$ implikuje mierzalność zbioru, który jest

sumą $\aleph_1$ podzbiorów prostej $\boldsymbol{R}$ mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Od tych samych autorów pochodzi dowód następującego faktu: jeśli $A_{\aleph_1}$, to suma $\aleph_1$ podzbiorów prostej $\boldsymbol{R}$, z których każdy jest I kategorii, jest również zbiorem I kategorii.

Ponieważ dowolny zbiór klasy $\Sigma^1_2(\boldsymbol{R})$ jest sumą $\aleph_1$ podzbiorów borelowskich R, uzyskujemy interesujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 21 (Martin, Solovay). *Jeśli* $A_{\aleph_1}$, *to każdy zbiór należący do* $\Sigma^1_2(R)$ (*lub* $\Sigma^1_2(\mathcal{N})$) *jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i ma własność Baire'a.*

Martin udowodnił, że istnienie liczby kardynalnej mierzalnej oraz prawdziwość aksjomatu $A_{\aleph_2}$ implikują, iż każdy zbiór $\Sigma^1_3(\boldsymbol{R})$ (lub $\Sigma^1_3(\mathcal{N})$) jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i ma własność Baire'a. Można pokazać, że fakt ten nie wynika z samego tylko istnienia liczby kardynalnej mierzalnej, to znaczy prawdziwość $A_{\aleph_2}$ ma istotne znaczenie.

9. Zbiory rzutowe w modelu L i twierdzenie Solovaya. Jak już wspomnieliśmy na początku artykułu, Gödel, przy dowodzie niesprzeczności hipotezy continuum z systemem aksjomatów Zermelo–Fraenkla, zdefiniował klasę L składającą się ze zbiorów o pewnych szczególnych własnościach. W klasie L, której elementy nazywamy *zbiorami konstruowalnymi*, spełnione są wszystkie aksjomaty teorii mnogości Zermelo–Fraenkla, zatem każda logiczna konsekwencja tych aksjomatów prawdziwa jest również w L.

TWIERDZENIE 22 (Gödel, Mansfield). *Wszystkie elementy przestrzeni Baire'a są zbiorami konstruowalnymi* (*tzn.* $\mathcal{N} \subset L$) *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje relacja klasy* $\Sigma^1_2(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$, *która dobrze porządkuje przestrzeń* $\mathcal{N}$.

LEMAT 6 (Kuratowski). *Jeśli istnieje relacja klasy* $\Sigma^1_n(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$, *która jest dobrym porządkiem na* $\mathcal{N}$, *to istnieją zbiory należące do* $\Sigma^1_n(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ *niemierzalne w sensie Lebesgue'a i bez własności Baire'a.*

Jako wniosek z twierdzenia 22 i z lematu 6 otrzymujemy następujący ważny fakt:

TWIERDZENIE 23 (Gödel). *Bez sprzeczności z systemem Zermelo–Fraenkla możemy przyjąć, że istnieją zbiory należące do* $\Sigma^1_2(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$, *które są niemierzalne w sensie Lebesgue'a i nie mają własności Baire'a.*

Gödel udowodnił, że hipoteza $\mathcal{N} \subset L$ implikuje również istnienie zbioru $a \in \Sigma^1_2(\mathcal{N})$ nieprzeliczalnego i nie zawierającego podzbioru doskonałego. Łatwo pokazać, że uniformizacja zbioru b należącego do $\Pi^1_1(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ i takiego, że $a = r_{\mathcal{N}}(b)$, nie będzie zawierać podzbioru doskonałego. Otrzymujemy zatem:

TWIERDZENIE 24 (Gödel). *Jeśli* $\mathcal{N} \subset L$, *to istnieje uzupełnienie analityczne, które jest zbiorem nieprzeliczalnym bez podzbioru doskonałego.*

Założenie, że przestrzeń $\mathcal{N}$ nie jest zawarta w L, jest niesprzeczne z systemem aksjomatów Zermelo–Fraenkla. Mansfield wykazał, że każdy zbiór należący do $\Sigma^1_2(\mathcal{N})$, z co najmniej jednym elementem niekonstruowal-

nym, zawiera podzbiór doskonały. Wynika stąd

WNIOSEK 3. *Bez sprzeczności z systemem Zermelo–Fraenkla możemy przyjąć, że dowolny nieprzeliczalny zbiór klasy* $\Sigma^1_2(\mathcal{N})$ *zawiera podzbiór doskonały.*

Podamy teraz najbardziej interesujący wynik dotyczący regularności zbiorów rzutowych.

TWIERDZENIE 25 (Solovay). *Załóżmy, że istnieje liczba kardynalna mocno nieosiągalna. Wtedy bez sprzeczności z systemem aksjomatów Zermelo–Fraenkla możemy przyjąć, że prawdziwe są następujące zdania:*

1° *Każdy zbiór rzutowy zawarty w* $\mathcal{N}$ *lub* $\boldsymbol{R}$ *ma własność Baire'a i jest mierzalny względem dowolnej półskończonej, zupełnej i borelowskiej miary* μ.

2° *Każdy nieprzeliczalny zbiór rzutowy w* $\mathcal{N}$ *lub* $\boldsymbol{R}$ *zawiera podzbiór doskonały.*

3° *Nie istnieje rzutowy dobry porządek przestrzeni* $\mathcal{N}$ *lub* $\boldsymbol{R}$.

10. Zagadnienie determinacji. Na zakończenie tego artykułu podamy kilka podstawowych rezultatów związanych z determinacją zbiorów rzutowych.

Niech X będzie pewnym ustalonym zbiorem i niech a zawiera się w X^ω, czyli w zbiorze wszystkich nieskończonych, przeliczalnych ciągów o wyrazach należących do X. Dla zbioru a definiujemy grę $G_X(a)$ pomiędzy dwoma graczami, która odbywać się będzie zgodnie z następującymi warunkami:

1° Grę rozpoczyna gracz I.

2° Gracze I i II wybierają na przemian elementy zbioru X.

3° Obaj gracze wykonują nieskończoną ilość posunięć.

W wyniku gry $G_X(a)$ otrzymujemy ciąg nieskończony $f = \langle a_0, \ldots, a_n, \ldots\rangle$ należący do X^ω taki, że element a_n dla n parzystego to posunięcie gracza I, a_n dla n nieparzystego to posunięcie gracza II. Każdy z graczy przed wybraniem elementu a_n może znać ciąg $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$ utworzony z wcześniejszych posunięć swoich i drugiego gracza, dlatego grę spełniającą warunki 1°–3° nazywamy *grą z doskonałą informacją*. Mówimy, że grę $G_X(a)$ wygrywa gracz I, jeżeli $f \in a$, natomiast gra $G_X(a)$ jest wygrana przez gracza II, jeżeli $f \notin a$.

Niech $S(X)$ będzie zbiorem skończonym ciągów o wartościach z X. Każdą funkcję $\tau\colon S(X) \to X$ nazywamy *strategią* i powiemy, że gracz I gra zgodnie z τ, jeśli dla dowolnego n parzystego $a_n = \tau(f \restriction n)$, gdzie $f \restriction n = \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$. Strategię τ określamy jako wygrywającą dla gracza I, jeżeli grając zgodnie z τ wygra on grę $G_X(a)$ niezależnie od tego, jakie posunięcia wykonywać będzie gracz II. Podobnie definiujemy zgodność gry gracza II ze strategią τ oraz strategię wygrywającą dla gracza II.

DEFINICJA 2. Zbiór $a \subseteq X^\omega$ nazywamy *zdeterminowanym*, jeśli w grze $G_X(a)$ jeden z graczy ma strategię wygrywającą.

W dalszym ciągu zakładać będziemy, że X jest zbiorem przeliczalnym, co

najmniej dwuelementowym. Ponadto, przyjmujemy, że X ma topologię dyskretną, natomiast X^ω — topologię produktową.

TWIERDZENIE 26. *Jeśli* $a \subseteq X^\omega$ *jest zbiorem zdeterminowanym, to* a *lub* $X^\omega \setminus a$ *zawiera podzbiór doskonały.*

Można wykazać, że X^ω, jako przestrzeń ośrodkowa mocy $\mathfrak{c}$ (continuum), ma podzbiór a taki, że zbiory a i $X^\omega \setminus a$ nie zawierają podzbioru doskonałego. Stąd wynika

WNIOSEK 4. *W przestrzeni* X^ω, *w szczególności w* $\mathcal{N}$, *istnieją zbiory niezdeterminowane.*

Przy dowodzie istnienia zbioru niezdeterminowanego korzystamy z aksjomatu wyboru. Do tej pory nie udało się udowodnić bez używania pewnika wyboru, że taki zbiór istnieje.

Podzbiory zdeterminowane przestrzeni X nie mają regularnych własności przysługujących na przykład zbiorom borelowskim. Rodzina zbiorów zdeterminowanych przestrzeni X^ω nie jest zamknięta ze względu na operację uzupełniania. Również operacje brania sumy, iloczynu czy przekształcenia ciągłego mogą wyprowadzać poza klasę zbiorów zdeterminowanych.

Bez trudu można udowodnić, że zbiory otwarte i domknięte zawarte w dowolnej przestrzeni X^ω są zbiorami zdeterminowanymi. Pojawia się w związku z tym pytanie, czy zbiory o pewnych prostych własnościach topologicznych są zdeterminowane. Najlepiej rozwiązany jest ten problem dla podzbiorów borelowskich przestrzeni X^ω.

TWIERDZENIE 27 (Martin). *Każdy element rodziny* $B(X^\omega)$ *dla dowolnej przestrzeni* X^ω *jest zbiorem zdeterminowanym.*

Twierdzenie 27 będące ukoronowaniem badań nad determinacją najmniej skomplikowanych podzbiorów X^ω stanowi najlepszy wynik, jaki możemy uzyskać w oparciu o aksjomatykę teorii mnogości. System Zermelo–Fraenkla nie rozstrzyga, czy wszystkie elementy klasy $\Sigma^1_1(X^\omega)$ są zdeterminowane. Zakładając istnienie liczb kardynalnych mierzalnych Martin udowodnił, że każdy zbiór analityczny dowolnej przestrzeni X^ω jest zdeterminowany. Przyjmując, że $\mathcal{N} \subset L$, można natomiast wykazać istnienie zbiorów analitycznych, niezdeterminowanych.

W ostatnich latach szczególnie intensywnie badane są konsekwencje aksjomatu determinacji rzutowej zakładającego zdeterminowanie wszystkich zbiorów rzutowych. Oto kilka najsilniejszych twierdzeń wynikających z tego aksjomatu:

1° *Wszystkie zbiory rzutowe zawarte w* $\mathcal{N}$ *są mierzalne w sensie Lebesgue'a i mają własność Baire'a.*

2° *Każde dwa rozłączne zbiory klasy* $\Pi^1_{2n}(X^\omega)$ (*odpowiednio* $\Sigma^1_{2n+1}(X^\omega)$) *zawierają się w dwóch rozłącznych zbiorach klasy* $\Delta^1_{2n}(X^\omega)$ (*odpowiednio* $\Delta^1_{2n+1}(X^\omega)$).

3° *Dowolny zbiór klasy* $\Pi^1_{2n+1}(X^\omega)$ *(odpowiednio* $\Sigma^1_{2n+2}(X^\omega)$*) ma uniformizację należącą do* $\Pi^1_{2n+1}(X^\omega)$ *(odpowiednio* $\Sigma^1_{2n+1}(X^\omega)$*).*

4° *Każdy element klasy* $\Sigma^1_3(X^\omega)$ *jest zbiorem Suslina typu* $\aleph_2$*, czyli daje się przedstawić jako suma* $\aleph_2$ *zbiorów borelowskich.*

5° *Istnieje model dla teorii mnogości Zermelo–Fraenkla wzmocnionej aksjomatem istnienia liczby mierzalnej.*

Ostatni wynik świadczy o tym, że aksjomat determinacji rzutowej jest niezależny od pewników teorii mnogości Zermelo–Fraenkla.

Bibliografia

[1] J. Addison, *Some consequences of the axiom of constructibility*, Fund. Math. 46 (1959), str. 337–357.

[2] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 1, Academic Press, New York 1966.

[3] R. Mansfield, *The non-existence of* Σ^1_2 *well-orderings of the Cantor set*, Fund. Math. 86 (1975), str. 279–282.

[4] D. Martin i R. M. Solovay, *Internal Cohen extensions*, Ann. Math. Logic 2 (1970), str. 164–171.

[5] Y. Moschovakis, *Descriptive set theory*, North Holland Publ., Amsterdam 1980.