wmptm 1897

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego





ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXV (1983)

PAWEŁ SZEPTYCKI (Lawrence, Kansas)

# Nachman Aronszajn (1907–1980)

Nachman Aronszajn, syn Judela i Chany Aronszajnów, urodził się 26 lipca 1907 r. w Warszawie, gdzie uczęszczał do szkoły podstawowej, a następnie (w latach 1916–1925) do Gimnazjum Ascola. W latach 1925–1929 studiował na Uniwersytecie Warszawskim. Utrzymywał się z korepetycji. W Archiwum UW znajduje się obfita korespondencja (ciągnąca się do 1938 r.) w sprawie odraczania spłaty czesnego Aronszajna.

Niewiele wiemy o jego najbliższej rodzinie poza tym, że ojciec jego pracował dla krewnego, sprzedawcy futer, że starszy brat osiadł w latach dwudziestych w Palestynie, a młodsze utalentowane rodzeństwo wraz z resztą rodziny zginęło w Getcie Warszawskim.

Doktorat z matematyki uzyskał Aronszajn w roku 1929 za pracę *O metryce i metryzacji* napisaną pod kierunkiem S. Mazurkiewicza (dyplom otrzymał w 1930 r.). Niedługo potem przeniósł się do Paryża, gdzie w roku 1935 obronił pracę [15] na tytuł doktora nauk; promotorem był chyba M. Fréchet. Od roku 1936 utrzymywał się ze stypendium Caisse Nationale des Recherches Scientifiques.

Do momentu rozpoczęcia wojny oddawał się wyłącznie badaniom naukowym. Podczas wojny był szeregowcem w Armii Polskiej we Francji i w Anglii. Z ożywieniem opowiadał o swych przygodach z tego okresu, zwłaszcza miło wspominając swój pobyt w szpitalu wojskowym w Anglii, gdzie nauczył się grać w brydża. Od roku 1942 do końca wojny był oddelegowany z Armii Polskiej do admiralicji brytyjskiej dla pracy nad zagadnieniami matematycznymi związanymi z działaniami wojennymi. W tym okresie utrzymywał żywy kontakt z G. H. Hardym, pod którego mocnym wpływem, zarówno matematycznym jak filozoficzno-życiowym, pozostał do końca życia. Hardy zaraził Aronszajna swą pedanterią w obliczaniu najlepszych stałych w nierównościach, nie udało mu się jednak przekazać swej pasji do krykieta.

W 1949 r. kończy się jego praca dla CNRS. Po rocznym pobycie na Harwardzie, Aronszajn zdecydował przenieść się na stałe do Stanów Zjednoczonych. Przez 2 lata przebywał na Uniwersytecie Oklahomy w Stillwater,

gdzie zorganizował aktywną grupę zajmującą się zagadnieniem przybliżania wartości własnych zagadnień brzegowych. Po 2 latach, na skutek nacisków politycznych wywieranych przez komitet senatora McCarthy'ego, przeniósł się wraz z całą grupą na Uniwersytet Kansaski w Lawrence, gdzie pozostał aż do przejścia na emeryturę w roku 1978. Ostatnie dwa lata życia spędził w Corvallis, Oregon, gdzie zmarł 5 lutego 1980.

Aronszajn był człowiekiem o mocnej osobowości i zasadach opartych na własnej filozofii życiowej, w której poza zasadniczymi elementami humanistycznymi niemałą rolę odgrywała matematyka, w pewnym sensie zastępująca mu religię. W sprawach zasadniczych był raczej bezkompromisowy, co objawiało się zarówno w jego opiniach o wynikach własnych i cudzych, których nigdy nie owijał w bawełnę, jak również w decyzjach życiowych, jak np. wyżej wspomniany exodus z Oklahomy.

Był pierwszy w docenianiu wartościowych wyników innych, zwłaszcza młodych matematyków i nie szczędził energii na organizowanie ich wizyt w Stanach Zjednoczonych. Lista gości, którzy przewinęli się przez Lawrence w okresie od 1951 r. do 1978 r. jest imponująca, zarówno ilościowo jak jakościowo. W matematyce interesował się i doceniał praktycznie wszystkie dziedziny; przykładał ogromną wagę do badań naukowych, w odróżnieniu od działalności dydaktycznej. Od późnych lat pięćdziesiątych regularnych zajęć dydaktycznych już nie prowadził, poza seminariami utrzymywanymi na wysokim poziomie i często odstręczającymi mniej zaawansowanych studentów. Tym tłumaczy się stosunkowo niewielka ilość stopni naukowych nadanych pod jego kierownictwem.

Matematyka była dla Aronszajna zawodem, religią i pasją. W czasie roku akademickiego czuł się zobowiązany do intensywnej pracy nad swoimi długofalowymi projektami, w czasie wakacji dla rozrywki rozmyślał nad zagadnieniami z różnych dziedzin matematyki i nie jest wykluczone, że większość z jego bardziej znanych prac powstała w takich właśnie wakacyjnych okolicznościach. Z pozamatematycznych zainteresowań należy wspomnieć muzykę klasyczną, której był amatorem i znawcą, oraz szachy i brydża; chętnie uczestniczył w turniejach w każdej z tych gier.

Aronszajn miał niezwykłą pamięć i umiejętność koncentracji: miał wyraźną niechęć do robienia notatek i nie odczuwał ich potrzeby, wskutek czego wielu z jego nieogłoszonych wyników nie sposób już odtworzyć. Niechęć do pisania, które odrywało go od pracy twórczej, połączona z niezwykłą, może nawet przesadną pedanterią, powodowały, że jeśli już coś zdecydował się napisać, to przedsięwzięcie to trwało czasem parę lat. Następowały więc długie opóźnienia między uzyskaniem wyników a momentem ukazania się ich w druku, co — szczególnie w działach szybko się rozwijających — często powodowało trudne do rozwikłania kwestie priorytetu.

Powyższe uwagi w pewnym stopniu wyjaśniają, dlaczego za życia Aronszajn nie był w amerykańskim środowisku matematycznym należycie doce-



Nachman Aronszajn w czasach studenckich
(z archiwum UW)

niony. Pozwalają też one lepiej zrozumieć charakter jego spuścizny naukowej.

Przed przejściem do bardziej szczegółowego opisu prac naukowych Aronszajna chciałbym się zastrzec, że nie czuję się powołany do decydowania we wspomnianych wyżej sprawach priorytetu, ani kompetentny do wydania autorytatywnej opinii o wartości niektórych pozycji bibliografii.

Spuścizna naukowa Aronszajna dzieli się na kilka grup prac powiązanych pomysłami, nad którymi autor pracował przez dłuższe okresy, oraz szereg prac pojedynczych na różnorodne tematy. Warto tu zauważyć, że niektóre z tych pojedynczych prac, ilustrujących wielostronne zainteresowania autora, bardziej może od pozostałych przyczyniły się do reputacji Aronszajna.

W okresie warszawskim Aronszajn interesował się (oczywiście) teorią zbiorów i topologią, a największy nań wpływ wówczas mieli: S. Mazurkiewicz, jego nauczyciel, K. Borsuk, rówieśnik i współpracownik, oraz W. Sierpiński, który ten wpływ zachował do końca życia.

Pierwsze trzy jego prace, [1]–[3], są inspirowane przez twierdzenie

o łukowej spójności przestrzeni zupełnych, spójnych i lokalnie spójnych, w którym Mazurkiewicz miał duży udział. W pracy [3] np. pokazuje się, że klasa tych przestrzeni, w odróżnieniu od węższej klasy przestrzeni zwartych, spójnych i lokalnie spójnych (continuów Peano) nie ma wspólnego modelu ciągłego, ale jeśli ograniczyć się do przekształceń otwartych, to taki model istnieje; w tej pracy Aronszajn pierwszy definiuje pojęcie przekształcenia otwartego dla ogólnych przestrzeni topologicznych. W pracy [6], wspólnej z K. Borsukiem, dowodzi się ważnego do dziś twierdzenia, że jeśli przestrzenie $A$ i $B$ oraz ich część wspólna $A \cap B$ są retraktami absolutnymi, to także ich suma $A \cup B$ jest retraktem absolutnym. Wpływ K. Borsuka będzie jeszcze widoczny w pracach [19]–[21], choć były one pisane już w Paryżu i pod wrażeniem świeżych wówczas odkryć W. Hurewicza. Przyniosły one oryginalną interpretację w zakresie wielościanów $n$-wymiarowych grup homotopii Hurewicza oraz grup homologii, ale nie były później kontynuowane.

Jego praca doktorska nie została opublikowana. Część jej wyników weszła w skład pracy [60] (napisanej wspólnie z jego uczniem, P. Panitchpakdim) z 1956 r. Ze wzmianek w [60], str. 438 i w [18] można wnosić, że w pracy doktorskiej rozpatrywał on analogony pojęcia wypukłości w przestrzeniach metrycznych i był prekursorem badań prowadzonych przez wielu matematyków([1]).

Z okresu warszawskiego (prace [1]–[13]) pochodzą też jego zainteresowania teorią funkcji zespolonych i rzeczywistych. Jedyna jego praca z teorii zbiorów [53] ukazała się znacznie później; było to rozwiązanie ćwiczenia, które nieopatrznie zadał słuchaczom wykładu z teorii zbiorów.

Bardziej znana jest natomiast jego nieopublikowana konstrukcja drzewa o wysokości $\omega_1$, takiego, że każdy jego poziom i każdy łańcuch są przeliczalne; drzewom o tej własności, zwanym *drzewami Aronszajna*, poświęcony jest osobny paragraf w III wydaniu *Teorii mnogości* K. Kuratowskiego i A. Mostowskiego([2]).

Do zainteresowań wywiezionych z Warszawy Aronszajn dodał w Paryżu równania różniczkowe, w szczególności równania o pochodnych cząstkowych. Niewątpliwy był tu wpływ Hadamarda.

Prace [16], [17], [24] dotyczą zagadnienia opisania, wyłącznie za pomocą własności odległości, przestrzeni metrycznych z dodatkowymi strukturami algebraicznymi i topologicznymi (np. grup metrycznych, przestrzeni Hilberta, Banacha itd.). Do pomysłów tych, motywowanych pracami K. Mengera, Aronszajn wrócił później w pracy [60], a także w pracach o rozmaitościach nieskończenie wymiarowych, które nigdy nie ukazały się drukiem.

---

([1]) L. Nachbin, *A theorem of the Hahn–Banach type for linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), str. 28–46; B. Grünbaum, *Some applications of expansion constants*, Pacific J. Math. 10 (1960), str. 193–201.

([2]) Pomysł takiego drzewa nasunął się Aronszajnowi przy próbie uzupełnienia luki w pracy doktorskiej G. Kurepy.

Prace [28]–[30] dają zarys teorii całek multyplikatywnych (zasugerowanej przez prace Brukhilla). Temat ten podjął ponownie w latach sześćdziesiątych, gdy T. Kato pokazał, że całki takie są ważnym pojęciem w teorii równań ewolucji. Przez jakiś czas Aronszajn wraz z niżej podpisanym nosili się z zamiarem rozwinięcia teorii równań ewolucji, opartej na całkach multyplikatywnych; wyniki uzyskane w tym kierunku okazały się jednak zbyt ogólne, by bez dodatkowych pomysłów mogły być stosowane do subtelniejszych zagadnień.

Praca [22] wywarła najbardziej długotrwały wpływ na dalszą działalność naukową Aronszajna; metodę przybliżania wartości własnych zagadnień brzegowych, która pojawiła się w [22] w przypadku płyty utwierdzonej na brzegu, rozwijał on kolejno w pracach [31], [32], [42], [43], [48]–[50], [52], [56] i [78]; ta ostatnia praca zawiera ostateczną wersję metody. Prace [54], [57], [58], [62], [63], [68], [69], [72], [74], [76], [77], [80], [83], też były motywowane tym tematem. Warto więc nieco dłużej zatrzymać się nad paroma szczegółami dotyczącymi tego pomysłu.

Zagadnienie własne dla operatora samosprzężonego można, jak wiadomo, sformułować jako zagadnienie znalezienia maksimum funkcjonału kwadratowego na kuli jednostkowej w przestrzeni Hilberta. Zastępując przestrzeń wyjściową przestrzenią skończenie wymiarową, uzyskuje się zagadnienie algebry liniowej, którego wartości własne szacują z dołu (przynajmniej niektóre) wartości własne zagadnienia wyjściowego. Jest to klasyczna metoda Rayleigha–Ritza. Pomysł A. Weinsteina polega na zastąpieniu przestrzeni Hilberta w problemie wyjściowym przestrzenią większą, do której funkcjonał kwadratowy da się rozszerzyć w sposób naturalny. Procedura ta prowadzi do problemu pomocniczego, którego wartości własne szacują z góry wartości własne problemu wyjściowego. Wprowadzenie zagadnienia pomocniczego jest celowe, jeśli można je w sposób efektywny rozwiązać.

Podobny efekt można uzyskać modyfikując w zagadnieniu wyjściowym nie przestrzeń, lecz funkcjonał kwadratowy (tj. operator) – jest to metoda Aronszajna. Dalszy ciąg pomysłu polega na konstrukcji ciągu zagadnień pośrednich między zagadnieniem pomocniczym a wyjściowym; wartości własne każdego z tych zagadnień leżą między odpowiednimi wartościami własnymi zagadnienia poprzedniego i następnego, szacują więc coraz lepiej z góry wartości własne zagadnienia wyjściowego. Głównym przyczynkiem Aronszajna w tej metodzie jest efektywny (przynajmniej w zasadzie) algorytm obliczania wartości własnych kolejnych zagadnień pośrednich. Algorytm ten spotkał się z dużym uznaniem badaczy interesujących się zagadnieniami wartości własnych, między innymi H. Weyla. Warto zauważyć, że stosunkowo niedawno udowodniono, że metody Weinsteina (większa przestrzeń) i Aronszajna (większy funkcjonał) są równoważne i znaleziono ostateczne warunki zbieżności dla tych metod.

Badania nad zagadnieniami pośrednimi doprowadziły Aronszajna do

rozpatrywania ogólnych zagadnień brzegowych, pojęcia koercywności i przestrzeni Sobolewa rzędów ułamkowych parę lat przed tym, nim te pojęcia stały się chlebem powszednim matematyków zajmujących się teorią równań cząstkowych. Temat ten motywował również pewne pomysły w teorii przestrzeni wektorowych topologicznych [68] i algebrze [77]. Wspomnieć też wypada pracę [63] ilustrującą efektywność metody Aronszajna w zagadnieniach dla równań zwyczajnych, w tym przypadku w zagadnieniu postawionym przez Weyla.

Podczas swego pobytu w Anglii Aronszajn ogłosił drukiem swą pierwszą pracę o jądrach odtwarzających [34]; temat ten rozwinął dalej w [36] i w ostatecznej formie w [45], jego być może najczęściej cytowanej pracy. Pewne zastosowania jąder odtwarzających podane są w [40], [51], [64]; później liczba tych zastosowań znacznie wzrosła. Oczywiście motywacją i pierwszymi przykładami jąder odtwarzających były jądra Bergmana i Szegö. Trzeba wspomnieć, że prace [40] i [51] zawierają być może pierwszy dowód istnienia funkcji Greena dla ogólnych zagadnień brzegowych dla równań eliptycznych wysokiego rzędu (z punktu widzenia obecnego stanu wiedzy dowód ten ma raczej znaczenie historyczne).

Mimo parokrotnych prób, Aronszajn nie dokończył ostatecznej wersji teorii jąder pseudoodtwarzających naszkicowanej w [36].

Do okresu wojennego zaliczyć można pracę z Hardym [35] motywowaną teorią funkcji harmonicznych [41]. Ta ostatnia ogłoszona drukiem praca Hardy'ego nigdy nie przeszła przez korektę autorską (skutek powolnej poczty w czasie wojny) i doprowadzała Aronszajna do rozpaczy ogromną ilością błędów drukarskich w krytycznych miejscach. Pomysły w niej zawarte rozwinął i uogólnił w [79]. Materiał zawarty w tych pracach nie został być może jeszcze w pełni wykorzystany i doceniony.

Jedynym śladem współpracy Aronszajna z siłami zbrojnymi (Francji) jest praca [66], przygotowana i oddana do druku przez M. Frécheta, który przez parę lat po wojnie był pod wrażeniem, że Aronszajn zginął w zawierusze wojennej. Praca ta zawiera wersję metody sympleksów w programowaniu liniowym. Gdyby ukazała się ona z mniejszym opóźnieniem lub jej autor dłużej pozostał przy swym pomyśle, historia metody sympleksów mogłaby wyglądać inaczej.

Praca [33], również z okresu wojny, wydaje się nie związana z resztą bibliografii. Niedawno wynik w niej zawarty został rozszerzony na równania uogólnione (tj. z wielowartościowymi prawymi stronami).

Prace [37], [38] są pierwszym śladem zainteresowania autora teorią przestrzeni funkcyjnych. Temat ten, a w szczególności pojęcie zbiorów wyjątkowych, był dalej rozwinięty w pracach [69], [73], [76], [80], [84]. Pomimo ich elegancji i naturalności, pomysły Aronszajna w tym kierunku nie spotkały się w środowisku matematycznym z uznaniem, na jakie – moim zdaniem – zasługiwały.

Napisana wspólnie z K. T. Smithem praca [55] wydaje się, wraz z [45], być najbardziej znaną z publikacji Aronszajna. Zapoczątkowała ona niezwykle ożywione badania nad przestrzeniami niezmienniczymi i doczekała się około setki uogólnień([3]). Być może ważniejszymi od samego zagadnienia były metody i pojęcia, które pojawiły się przy tej okazji i przyczyniły się do burzliwego rozwoju teorii operatorów. Niektórych z tych pojęć i metod o nieprzemijającej wartości można się doszukać już w pracy [55]. Powyższe uwagi stosują się też, choć w mniejszym stopniu, do prac [65] i [70].

We wczesnych latach sześćdziesiątych Aronszajn zajmował się poważnie teorią interpolacji przestrzeni Banacha; praca [67] poświęcona jest tzw. interpolacji kwadratowej (przestrzeni Hilberta), szczegóły można znaleźć w [80], a praca [73] dotyczy teorii ogólnej. Być może z powodu tej ogólności praca ta nie wywarła większego wpływu na teorię interpolacji.

Pozycja [74] ilustruje zainteresowanie Aronszajna teorią przestrzeni funkcji mierzalnych. Pomysły w niej zawarte nie zostały jeszcze w pełni wyeksploatowane.

[85] jest jedynym drukowanym śladem zainteresowania autora rozmaitościami nieskończenie wymiarowymi. Jest to uogólnienie na przestrzenie Banacha klasycznego twierdzenia Rademachera o istnieniu prawie wszędzie różniczki funkcji wielu zmiennych rzeczywistych. Fakt, że zbiór punktów, gdzie różniczka istnieje, jest niepusty, ma wiele zaskakujących zastosowań; został on zauważony uprzednio przez P. Mankiewicza z inną interpretacją zwrotu „prawie wszędzie".

Ostatnie lata życia poświęcił Aronszajn niemal wyłącznie pracy nad monografią teorii funkcji wieloharmonicznych. Jest to klasa funkcji analitycznych wielu zmiennych rzeczywistych, których kolejne iteracje laplasjanu spełniają w każdym punkcie określone warunki wzrostu. W szczególności każde rozwiązanie równania $\Delta^m u = 0$ jest funkcją wieloharmoniczną; również przy ustalonej dodatniej wartości zmiennej czasowej, każde rozwiązanie równania przewodnictwa ciepła w półprzestrzeni jest funkcją wieloharmoniczną zmiennych przestrzennych. Własności tych funkcji fascynowały Aronszajna już od czasów paryskich i pomysł monografii oraz jej zarys powstały już we wczesnych latach sześćdziesiątych. Śmierć przerwała autorowi pracę nad wersją, która miała być ostateczną. Zarys teorii i niektórych zastosowań został ogłoszony w [82], [85], [86].

Bibliografia prac Aronszajna niewątpliwie nie odzwierciedla w pełni jego twórczości naukowej. Wiele z jego interesujących wyników nigdy nie doczekało się druku, a często nawet nie zostało zapisanych. Wymienię kilka, o których słyszałem bądź od Aronszajna, bądź od jego wcześniejszych współpracowników: praca o zbiorach wyjątkowych w twierdzeniu Hartoga

---

([3]) Zob. np. H. Radjavi, P. Rosenthal, *Invariant subspaces*, Springer Verlag, 1975.

o analityczności łącznej dla funkcji zmienneych rzeczywistych, wyniki dotyczące własności geometrycznych zakresów numerycznych operatorów w przestrzeni Hilberta, wyniki o rozmaitościach nieskończenie wymiarowych związane z pracami [16] i [17], twierdzenie o niezmienniczości obszaru dla dwulipschitzowskich homeomorfizmów w przestrzeniach Banacha, pomysły dotyczące podstaw geometrii różniczkowej i topologii ogólnej.

Może warto dodać parę słów o tych ostatnich: Aronszajn raczej krytycznie odnosił się do pojęć: filtru i ciągu uogólnionego i wprowadził pojęcie *kierunku*, oddające te same usługi, a jego zdaniem pozbawione pewnych niedostatków pojęć poprzednich. W latach pięćdziesiątych miał wykład z topologii oparty na tym pojęciu i przez parę lat nosił się z zamiarem napisania artykułu wyjaśniającego jego zalety; ciągi uogólnione i filtry były już jednak tak zakorzenione, że kierunki pozostały tylko ciekawostką.

Przez wiele lat Aronszajn nosił się z zamiarem monograficznego opracowania metod przybliżonych znajdowania wartości własnych i ich zastosowań; zamiar ten został zrealizowany w pewnym stopniu przez innych autorów([4]).

Skrypt [47] powinien był się doczekać szerszego obiegu; Aronszajn parokrotnie jednak odrzucał propozycje wydawców, uważając ten skrypt za początek większego dzieła, którego nigdy nie zredagował, choć parokrotnie przedstawiał w wykładach monograficznych i seminariach.

Powyższy zarys zawartości niektórych z pozycji bibliograficznych Aronszajna i związków między nimi jest siłą rzeczy fragmentaryczny. Miejmy nadzieję, że będzie on kiedyś użyteczny jako punkt wyjścia dla głębszych badań, nad rolą, jaką Aronszajn odegrał w rozwoju matematyki([5]).

## Spis prac N. Aronszajna

[1] *Über die Bogenverknüpfung in topologischen Räumen*, Fund. Math. 15 (1930), str. 229–241.
[2] *Einige Bemerkungen über den Begriff des lokalen Zusammenhanges*, Monatshefte für Math. und Physik 37 (1930), str. 241–252.
[3] *Über ein Urbildproblem*, Fund. Math. 17 (1931), str. 92–121.
[4] *Une remarque sur les singularités des séries de Dirichlet*, C. R. Acad. Sci. Paris 192 (1931), str. 1346–1348.
[5] *Sur les décompositions des fonctions uniformes*, ibidem 193 (1931), str. 1381–1383.
[6] (z K. Borsukiem) *Sur la somme et le produit combinatoire des retractes absolus*, Fund. Math. 18 (1932), str. 193–197.
[7] *Sur les invariants des transformations continues d'ensembles*, ibidem 19 (1932), str. 92–142.
[8] *Sur les décomposition des fonctions uniformes*, C. R. Acad. Sci. Paris 196 (1933), str. 521–522.

---

([4]) Np. Hans F. Weinberger, *Variational methods of equivalues approximation*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 1974.

([5]) Autor pragnie podziękować R. Dudzie, A. Krzywickiemu i Z. Semadeniemu za uwagi i uzupełnienia dotyczące wczesnych prac Aronszajna z topologii.