ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXV (1983)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

HANS FREUDENTHAL (Utrecht)

Nowa matematyka czy nowe jej nauczanie?([1])

1. Jakieś dwadzieścia lat temu wygłosiłem odczyt pt. *Nauczanie matematyki nowoczesnej czy nowoczesne nauczanie matematyki*([2]). Reputację miałem już wówczas nadszarpniętą i moi koledzy matematycy nie po raz pierwszy byli oburzeni, zaś obecni tam nauczyciele matematyki zmieszani dziwnym zachowaniem matematyka badacza. Wysuwałem mianowicie wątpliwości co do nauczania matematyki jako przedmiotu skodyfikowanego oraz co do modernizacji nauczania matematyki przez podciąganie programu do współczesnego stanu wiedzy matematycznej.

Matematyka była tym obszarem edukacji, który pierwszy cieszył się międzynarodową współpracą (w ramach założonej z początkiem tego stulecia Międzynarodowej Komisji Nauczania Matematyki([3])), ale aż do lat pięćdziesiątych przedmiotem tej współpracy była tylko organizacja i program, przeważały zaś poglądy matematyków uniwersyteckich.

Jeszcze z początkiem tego stulecia Felix Klein wskazywał na ogromne różnice dzielące matematykę szkolną od uniwersyteckiej. Jego *Matematyka elementarna z wyższego stanowiska*([4]) nie zapełniła jednak tej luki, interpretował on ją bowiem zbyt wąsko, jedynie jako sprawę treści. Z końcem lat pięćdziesiątych szok sputnikowy podniósł falę nieufności wobec faktycznego stanu nauczania matematyki i innych przedmiotów ścisłych i fala ta rozlała się ze Stanów na cały niemal świat. W Europie pogląd, że matematyka szkolna znajduje się o całe stulecie w tyle za obecnym stanem matema-

---

([1]) Przekład pełnej wersji artykułu *New math or new education*, którego skrót został opublikowany w *Prospects* 9 (1979), str. 321–3311. © UNESCO 1979 (*przyp. red.*).

([2]) Opublikowany jako *Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?* Enseignement Mathématique (2) 9 (1963), str. 28–44 (*przyp. red.*).

([3]) Por. K. Wuczyńska, *Koło Matematyczno-Fizyczne w Warszawie a reforma nauczania matematyki i fizyki na początku XX wieku*, Wiadom. Mat. 20 (1978), str. 183–188 (*przyp. red.*).

([4]) Felix Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, trzy tomy, Berlin 1924 (*przyp. red.*).

tyki, przyjął i rozpowszechniał OECE, późniejszy OCDE([5]). Konferencje w Royaumont (1959) i Dubrowniku (1960) przyspieszyły przemiany; wiekowe zacofanie próbowano nadrobić przez proponowanie ogromnych ilości nowego materiału i włączanie go do nowych podręczników. Zwało się to Nową Matematyką i doprowadziło do zaciekłego współzawodnictwa między zarówno ekspertami jak i szarlatanami, z żałosnymi na ogół wynikami. Tymi, którzy nie mogli dotrzymać kroku, byli biedni ludzie w klasie, od których oczekiwano, że będą nauczać bądź uczyć się Nowej Matematyki, ale ta najczęściej była tylko Nowym Nonsensem – nienauczalnym, nieprzyswajalnym, niematematycznym.

Euforia lat sześćdziesiątych ustąpiła miejsca rozczarowaniu lat siedemdziesiątych. Kiedy cały ten ruch się zaczynał, wczesne głosy ostrzegające przeciw niemu ginęły w zgiełku, wyśmiewane jako próby ratowania przestarzałej matematyki, bądź atakowane jako zbrodnia stanu. Dziś natomiast, po upływie dwudziestu lat, trudno już zrozumieć wspomniane na początku reakcje na odczyt, w którym przeciwstawiałem współczesne nauczanie matematyki nauczaniu matematyki współczesnej. Jesteśmy o dwadzieścia lat starsi, czy jednak jesteśmy o dwadzieścia lat mądrzejsi?

2. Podstawowym błędem Nowej Matematyki była fałszywa perspektywa: matematyka szkolna odstaje o całe stulecie od współczesnego stanu matematyki, a zatem należy teraz to stuletnie opóźnienie nadrobić. Według starej tradycji nauczanie matematyki na każdym szczeblu jest determinowane przez wymagania na następnym, wyższym, co składa się na stopniowy proces selekcyjny, którego zwieńczeniem staje się szlachetna twórczość matematyczna. Świeża idea Nowej Matematyki zabłysła jak krótkie spięcie: nauczanie najbardziej skomplikowanych pojęć poczynając już od przedszkola, chociaż mieli to robić nauczyciele nie mający najmniejszego pojęcia, co te pojęcia znaczą i do czego one w prawdziwej matematyce służą. Powoływano się przy tym na autorytet słynnego psychologa J. Brunera, który pisząc: *zaczynamy od hipotezy, że można skutecznie uczyć dziecko, na dowolnym etapie jego rozwoju, każdego przedmiotu i robić to w sposób intelektualnie uczciwy*, pomijał zastrzeżenie: pod warunkiem oddzielenia tego od wyrażeń matematycznych i podania w postaci, którą dziecko może operować. I właśnie to się stało: środki służące abstrakcji matematycznej, oderwane od ich matematycznego znaczenia i kontekstu, a konkretyzowane w niedorzeczny sposób, były wtłaczane w dzieci wszystkich roczników.

Temu poglądowi na matematykę jako wyrafinowanemu, schodzącemu z góry w dół przedmiotowi, przy stopniowej utracie jego wartości i wewnę-

---

([5]) OECE – Organisation Européenne de Coopération Économique (Organizacja Europejska Współpracy Ekonomicznej), OCDE – Organisation de Coopération et de Développement Économique (Organizacja Współpracy i Rozwoju Ekonomicznego) (*przyp. red.*).

trznej złożoności, przeciwstawia się inny, głoszący, że matematyka jest naturalną działalnością społeczną, rozwijającą się w miarę wzrostu osobnika i jego rosnących potrzeb w rozszerzającym się dlań świecie. Matematyka jest postawą, sposobem opanowywania tego świata poznawczo, praktycznie i emocjonalnie.

3. Matematyka różni się od wielu innych działań poznawczych sposobem akcentowania relacji między formą a treścią. W każdej dziedzinie nauki objętość wiedzy ogromnie wzrosła i nadal szybko, a nawet coraz szybciej rośnie, ale w matematyce wzrósł także arsenał środków i sposobów organizacji jej zasobów, i to środków nie bibliotecznych czy bibliograficznych, lecz właśnie matematycznych. Matematyka nigdy nie straciła z pola widzenia swego powołania i nigdy nie zatonęła w swojej produkcji. Od zarania jej historii te działania organizacyjne znajdowały się w centrum uwagi nie kompilatorów, ale matematyków twórczych. Wynalezienie algebry literowej i geometrii współrzędnych, a nawet rachunku różniczkowego i całkowego, były początkowo tylko sposobami reorganizacji nagromadzonej wiedzy z pomocą nowych narzędzi, które z czasem okazywały się jednak tak potężne, że same produkowały ogromne ilości nowej wiedzy.

Reorganizacja środkami matematycznymi już nie tylko fragmentów, ale całych dziedzin matematyki, stała się działalnością jeszcze szerszą z chwilą ogłoszenia przez Felixa Kleina w XIX wieku programu erlangeńskiego, próby organizacji całej geometrii środkami teorii grup. W naszym wieku zespół młodych matematyków francuskich, znany jako N. Bourbaki, podjął się organizacji całej matematyki środkami matematycznymi. I znów powstała monumentalna struktura, która wprawdzie ogromnie się przyczyniła do wzrostu samej matematyki, ale w końcu została przez nią pochłonięta, jeszcze przed dokończeniem dzieła. Czy taki eksperyment zostanie jeszcze kiedyś powtórzony? Nie sądzę.

Współczesny sposób organizowania matematyki polega na identyfikacji podobnych struktur ukrytych w różnych matematycznych obiektach, operacjach i metodach, skupianiu uwagi na tych strukturach oraz definiowaniu ich w sposób niezależny, co prowadzi do reorganizacji i rozwinięcia szerokiego pola badań.

4. Struktury są zjawiskiem uniwersalnym. Strukturalizując świat wokół nas do pewnego stopnia go opanowujemy. Licząc, mierząc lub ważąc ludzi — zapominamy o osobnikach. Konieczne jest zubożanie struktur bogatych. W istocie, patrząc z perspektywy jej zastosowań, liczba jest strukturą ubogą, chociaż w matematyce, ze wszystkimi swoimi arytmetycznymi i algebraicznymi relacjami, należy do najbogatszych. System kolejowy, z jego majątkiem trwałym i ruchomym, z jego personelem i operacjami, jest strukturą bogatą. Odwzorowanie go na układ punktów reprezentujących stacje i łączących je linii jest zubożeniem tej struktury do tego, co matematycy

nazywają grafem. W matematyce grafy nie są jednak wcale tak ubogie, jakby się to mogło wydawać, np. słynne zagadnienie czterech barw, po wielu nieudanych próbach w końcu rozstrzygnięte, dotyczyło grafów.

Matematyka zna rozmaite struktury. Najuboższą wyobrażalną strukturą jest pojedynczy zbiór, chociaż system złożony ze zbiorów może już być wyposażony w strukturę bogatą. Taką bogatą strukturą jest geometria euklidesowa z jej prostymi, płaszczyznami, okręgami, kwadratami, sferami, bryłami foremnymi, parkietażami, odbiciami, obrotami, symetriami. Ubogie struktury mają szerokie zastosowania, jednakże stosowanie ich jest zadaniem nietrywialnym, polega bowiem na ich wzbogacaniu w odpowiedni sposób. Z drugiej strony, struktury matematyczne mogą być tak bogate, że znajdują bezpośrednie zastosowania, aczkolwiek tylko w bardzo specyficznych warunkach.

System matematyki, taki jak u Bourbakiego, ma imponującą hierarchię. Zaczyna się ona od najprostszych struktur matematycznych, mianowicie zbiorów, i te struktury stopniowo się wzbogaca tworząc coraz delikatniejszą sieć rozgałęzień. Przy konstruowaniu takiej hierarchii trzeba dokonywać wyborów. Pozwala to na nowe organizowanie matematyki, co wszakże można robić wieloma sposobami, zależnie od stawianych sobie celów.

Piaget, pod wrażeniem pochodzącej od Kleina hierarchii geometrii, starał się wykazać eksperymentalnie, że psychologiczny rozwój pojęć przestrzennych dokładnie tej hierarchii odpowiada. Następnie, poznawszy hierarchię matematyki Bourbakiego, próbował tej samej strategii w stosunku do pojęć matematycznych. Ogólna idea Piageta zawierała się w tym, by rozwój indywidualny naśladował ciągi epistemiczne, co zaś należy rozumieć przez *episteme* w geometrii było przezeń identyfikowane z hierarchiami Kleina i Bourbakiego, jedynymi jakie znał. Tak więc, według Piageta, rozwój poznawczy miał wychodzić od struktur najprostszych i postępować drogą stopniowego wzbogacania. Wydaje mi się to jednak hipotezą wielce nieprawdopodobną i chociaż eksperymenty Piageta miały ją potwierdzać, ich wyniki nie zawsze były przekonywające.

Najbardziej zadziwiający przykład: jest faktem, że liczb uczymy się tak samo jak języka, jak słownictwa, wyróżniającego się jednak silniejszą regularnością. I środkami tego słownictwa, z pomocą jego dużej regularności, to znaczy z pomocą układu dziesiętnego, dziecko uczy się władania liczbą i arytmetyką. Jednakże żadna hierarchia matematyki nie zwraca najmniejszej uwagi na ten antropomorficzny rys uczenia się liczby: matematyka wydaje się uniwersalna, kosmiczna. W konsekwencji ani Piaget i jego szkoła, ani też żaden inny psycholog nie zwrócili uwagi na rolę odgrywaną w rozwoju i nauczaniu przez strukturę dziesiętną liczby.

Inny przykład. Według Piageta płaszczyzna i przestrzeń tworzą się w umyśle takie, jakie są w systemach, które znał, tzn. ze współrzędnymi kartezjańskimi. Wbrew temu przekonaniu wszystkie obserwacje wskazują

raczej na biegunową niż na kartezjańską strukturalizację płaszczyzny i przestrzeni w rozwoju umysłowym.

5. Perspektywa od struktur uboższych do bogatszych jest też fałszywa. Jest to perspektywa dedukcyjna na matematykę jako na gotowy produkt, nie jest ona natomiast ani perspektywą historyczną, ani rozwojową matematyki. I nie jest ona dobra dydaktycznie. Poparta wszakże argumentacją w duchu Piageta, została przyjęta przez Nową Matematykę. Przynajmniej jako zasada: uczyć matematyki ustrukturalizowanej jak u Bourbakiego. Powiedziałem: jako zasada, pozwalała bowiem upiększać nauczanie „mądrą" matematyką i psychologią, w istocie zaś miała charakter jedynie deklaratywny. Ale i tak jej działanie było dostatecznie szkodliwe, blokowała bowiem innowacje. W istocie autorzy podręczników nie mogą nie respektować faktu, że dzieci w wieku szkolnym przyswoiły już sobie liczbę bez znajomości tego, czym ona jest na najwyższych piętrach hierarchii, a figury geometryczne i ich cechy poznały intuicyjnie, a nie tak jak są one wmontowane w hierarchiczny gorset.

Myślę, że w obecnym stuleciu nauczanie matematyki w wielu krajach ulegało stopniowej poprawie, nawet w okresie Nowej Matematyki, a gdyby nie blokujący dogmatyzm tej ostatniej, to postęp ten mógłby być szybszy.

6. Dzisiejszy defetyzm pewnych kręgów jest równie mało usprawiedliwiony, jak euforia lat sześćdziesiątych. Tamta euforia była związana z inną fałszywą perspektywą, która dziś okazała się pomyłką. Mam na myśli ideę, że można fundamentalnie zmienić nauczanie matematyki (czy też czegokolwiek innego) dekretem, zabiegami administracyjnymi, wciśnięciem nowych treści edukacyjnych w głowy nauczycieli i uczniów z pomocą odpowiednich podręczników, dobrych czy złych, biało-czarnych czy trójkolorowych. Mimo ostrzeżeń próbowano tak postępować w wielu krajach, i to raczej ta właśnie polityka się załamała, a nie Nowa Matematyka. Mówiąc o ich polityce mam na myśli autorów za biurkiem, układaczy rezolucji na konferencjach, decydentów i ich doradców. A przecież wprowadzenie innowacji edukacyjnych jest zabiegiem społecznym, tam zaś, gdzie nie ma żywych ludzi, jest pustynia. Na nieszczęście narodziny Nowej Matematyki zbiegły się z teoriami programowymi, które próbowały formalizować rozwój edukacji na kształt procesu biurokratycznego, co jest poglądem ciągle żywotnym i, jak się wydaje, czerpiącym nowe siły z każdego nowego niepowodzenia. Istnieje wszakże inny pogląd na innowację dydaktyczną, a mianowicie jako na proces uczenia się wciągający wszystkich, których on dotyczy, w tym nauczycieli, a przebiegający w szkolnej izbie. Żywy, a nie wynikający z badania i porównywania współczynników korelacji czy równań regresji. Społeczna wiedza o tym, czego dzieci mogą się uczyć, czego nauczyciele mogą nauczać, jak wygląda klasowa rzeczywistość – jest niezbędna każdemu, kto bierze się za rozwój oświaty. Szkoły są wszędzie różne, ale pod jednym względem są podobne: jako żywe organizmy reagujące obronnie na biurokratyczne zakusy. Pod tym

względem kraje rozwijające się nie różnią się od rozwiniętych. Tylko szkoda wyrządzona biurokratycznymi zakusami w zakresie innowacji może być w krajach rozwijających się większa.

7. To, co nazwałem dzisiejszym rozczarowaniem, wyraża nowy slogan *Back to basics*, mający oznaczać powrót od Nowej Matematyki do dobrej, starej matematyki. Podobny jest do damskiej mody: propaguje się stary styl jako coś nowego. Czy producenci mogą tak szybko dostosować do tej zmiany swoje materiały edukacyjne? Oczywiście nie, zamiast tego dostosowują oni reklamę. Podręcznikowe serie polecane lat temu dziesięć jako najwyższe osiągnięcie Nowej Matematyki wychwala się dzisiaj jako wzór dobrej starej matematyki. Pokazuje to raz jeszcze, jak niewielkie były zmiany fundamentalne w ogólnym obrazie rzeczy.

Back to basics jest kolejną fałszywą perspektywą. Prawidłowa droga polega na zwróceniu się w stronę rzeczy najważniejszych, *forward to basics*. Jednak jak zegarek pradziadka, tak i jego arytmetyka nie może tu być wzorem. Stare problemy arytmetyczne nigdy nie wrócą i stare sposoby nauczania arytmetyki nigdy nie ożyją.

Co jednak powiemy o dawnej umiejętności rachowania (*numeracy*)? Kiedy zadaje się to pytanie, ogarnia mnie zdziwienie, dlaczego ludzie nie martwią się z równą siłą o kaligrafię. Średniowieczne manuskrypty są dziełami sztuki, ale stare czasy nie skończyły się na średniowieczu. Listy i rękopisy ostatnich paru generacji każą jednak wątpić, czy kaligrafia była powszechnym przyzwyczajeniem, zaletą czasów minionych.

Czy umiejętność rachowania podupadła? Nie jestem pewny. Czy podupada obecnie? Zapewne w niektórych krajach tak. Byłoby zadaniem pedagogów ustalić, w jakim stopniu do tego upadku przyczynił się nacisk na mierzenie wyników oświatowych. W niektórych częściach świata pedagogiczna teoria i praktyka opierają się na idei, że w oświacie rzeczy mogą i powinny być mierzone. Nawet gdyby to było prawdą, nie dałoby to jeszcze odpowiedzi na pytanie: które rzeczy? Odpowiedź taka wymaga jakiejś filozofii nauczania, jeśli bowiem będziemy mierzyć rzeczy niewłaściwe, konkluzje mogą być formalnie prawdziwe, ale bez znaczenia lub nawet niebezpieczne.

8. Dokonajmy przeglądu fałszywych perspektyw, które zasygnalizowałem. Wszystkie są ze sobą związane: ruch zstępujący od wyższej do niższej matematyki, struktury ubogie poprzedzające bogate, innowacje wywołane raczej potrzebami zewnętrznymi niż pochodzące od wewnętrznego wzrostu, cofanie się wstecz zamiast pójście naprzód w stronę rzeczy podstawowych (*back* zamiast *forward to basics*). Trzeba oczywiście wyjaśnić, co się rozumie przez rzeczy podstawowe: podstawową technologię czy podstawowe rozumienie. Ma to znaczenie zarówno dla pedagogiki, jak i dla rozwoju systemu edukacyjnego. Rzeczy podstawowe mogą – i moim zdaniem powinny –

oznaczać podstawową filozofię, w ogólności oświatową, a zarazem dla danego obszaru specyficzną. Nie ma ani edukacji, ani jej rozwoju bez jakiejś filozofii, choćby złej, a katalogi celów nauczania nie mogą być jej substytutem.

Kiedy używam słowa „filozofia", mam na myśli to jego znaczenie, które ono miało, nim filozofia stała się przedmiotem nauczania, podzielonym na rozdziały i paragrafy z tytułami i podtytułami. Mam na myśli rozum kreślący racjonalny obraz świata, społeczeństwa i człowieka, który staje się moim obrazem i do którego chcę przekonać innych. Mam na myśli filozofię ujawniającą się w moich działaniach, a jeśli są one skierowane w stronę edukacji, w mojej działalności jako pedagoga i działacza.

Ci, których kształcimy lub którym pomagamy kształcić innych, należą do ludzkości tej i przyszłej, są członkami społeczeństwa tego i przyszłego, żyjącymi w rozszerzającym się świecie, który będą poznawać i obejmować we władanie.

Matematyka, podobnie jak mowa, rysunek czy pismo, jest przejawem zarówno naturalnej, jak i społecznej działalności człowieka. Znajduje się ona między pierwszymi działaniami poznawczymi, jakie znamy, a nauczanie matematyki było pierwszym historycznie poświadczonym rodzajem nauczania. Ale pod wpływem zmian społecznych rosła i zmieniała się matematyka, a wraz z nią rosło i zmieniało się nauczanie matematyki i jego filozofia. Pokażę to na przykładzie rachowania.

9. Już kilka tysiącleci temu pewna umiejętność rachowania była potrzebna każdemu biorącemu udział w życiu ekonomicznym, ale to minimum zostało szybko przekroczone przez funkcjonariuszy publicznej i prywatnej biurokracji oraz przedsiębiorców, którzy stali się jednym ze źródeł matematyki profesjonalnej.

Istnieją różne stopnie znajomości rachunków, podobnie jak różne są stopnie znajomości czytania i pisania([6]). Ten, którego od swoich pracowników żądali kupcy i bankierzy, był nadzwyczaj wysoki i został osiągnięty jedynie przez mniejszość, zarabiającą na życie rzetelnym wykonywaniem operacji arytmetycznych – tanią siłę roboczą, która w ciągu ostatniego półwiecza stała się motorem upowszechnienia i rozwoju mechanicznych i elektrycznych kalkulatorów.

Ludzkie rachunki, nawet na najwyższym poziomie, nie mogą się dłużej równać z elektronicznymi komputerami. Z drugiej strony, rzesze tych, którzy potrafią mało, a także analfabetów i ludzi nie potrafiących rachować (*innumerates*) – szwaczek, brukarzy, tragarzy – są zastępowane przez nową siłę ro-

---

([6]) Autor porównuje tu dwa pojęcia, nie mające polskich desygnatów: *literacy* jako zdolność czytania i pisania oraz *numeracy* jako umiejętność wykonywania podstawowych działań na liczbach (*przyp. red.*).

boczą, obsługującą karty elektroniczne płac czy pulpity rozdzielcze supermarketów i innych.

Czym jest umiejętność rachowania? Jakakolwiek byłaby odpowiedź, wypadłaby inaczej pół wieku temu, a inaczej wypada obecnie, a także inaczej w krajach rozwijających się i inaczej w rozwiniętych. Odnosi się to zresztą nie tylko do rachowania, ale i do całej matematyki. Matematyka, jako idea, jest uniwersalna, ale jako zjawisko zależy od otoczenia. Mało wiem o Trzecim Świecie i jego potrzebach, jednakże ilekroć widzę matematykę dla dzieci w krajach rozwijających się, skopiowaną według tego, czego się uczy w krajach rozwiniętych, jestem zaszokowany, podobnie zresztą jak i wtedy, gdy widzę matematykę dla młodzieży opartą na Bourbakim. Oczywiście wszystkie dzieci mają prawo do takiej samej dobrej matematyki, jakiej uczą się najbardziej uprzywilejowane, jednakże Nowa Matematyka głosiła, że poczynając już od przedszkola dzieci powinny się uczyć matematyki w stylu Bourbaki. A to po prostu nie działało. Hasła, których nie można zrealizować, są bez wartości.

Program matematyki w każdym kraju musi brać pod uwagę wiele rozmaitych czynników społecznych. Spośród nich najważniejszy – jak sądzę – jest wiek, w którym zdecydowana większość młodzieży opuszcza szkołę. Może to być lat 10, jak jest zapewne w wielu krajach Trzeciego Świata, lub 13, jak to było pół wieku temu na dużych obszarach Europy, lub 16, jak jest teraz, lub wreszcie 18 w krajach najbardziej uprzywilejowanych.

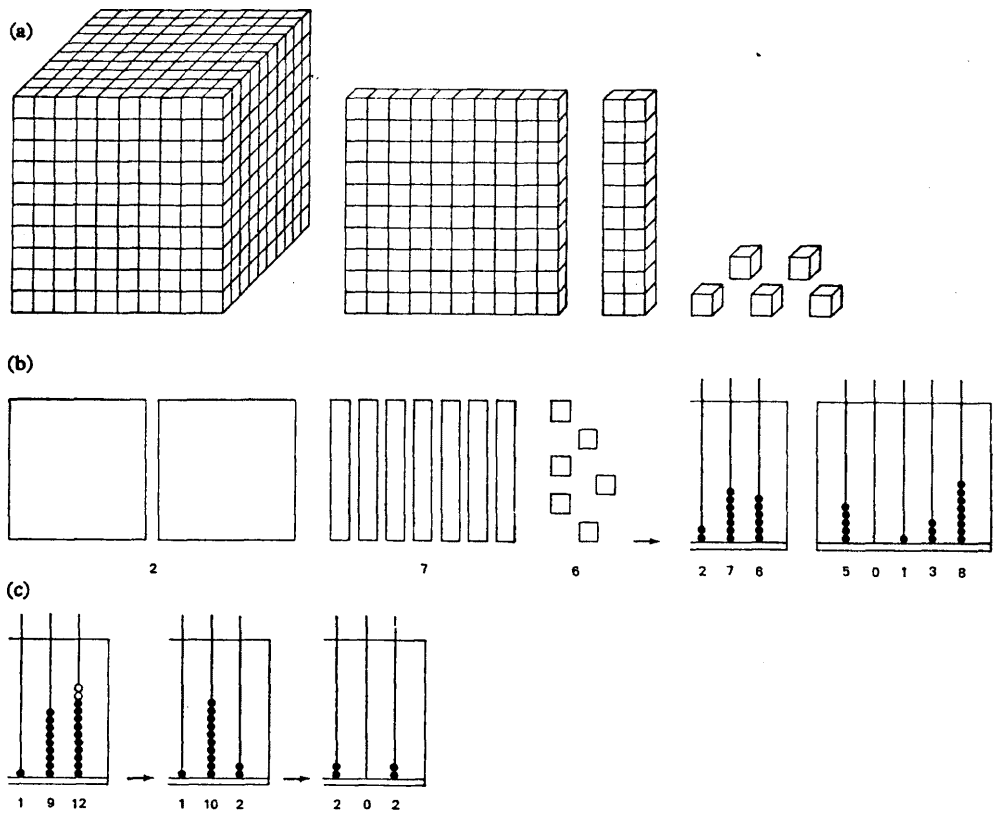
Jest faktem, że w wieku 12–13 lat większość młodzieży nie jest jeszcze zdolna do dobrej arytmetyki. Przekonanie, że poprawa nauczania może tu doprowadzić do dużych zmian, jest iluzją, a wszelkie próby byłyby marnowaniem czasu. Dzisiaj rachunki arytmetyczne, na których się opieramy, są dziełem komputerów. Natomiast rozumienie arytmetyki, to inna sprawa. Jest rzeczą pożałowania godną, że w większości badań edukacyjnych nad matematyką zautomatyzowane umiejętności nie są należycie odróżniane od rozumienia. Taksonomie pretendujące do wyjaśnienia mglistych idei dotyczących poziomów rozumienia zaciemniły obraz jeszcze bardziej, zwłaszcza w badaniach testowych.

Jeśli jest prawdą, że niewielu spośród 12- i 13-latków jest zdolnych do dobrej arytmetyki, to istnieje znacznie więcej takich, którzy są zdolni rozumieć arytmetykę. Niepowodzenia w testach umiejętności nie oznaczają braku zrozumienia. Na szczęście przeciwwagą dla kultury testowej staje się zwracanie przez podręczniki coraz większej uwagi na nauczanie rozumienia arytmetyki. Zostały rozwinięte nowe metody nauczania algorytmów przez głębokie rozumienie systemu pozycyjnego.

Nasz system pozycyjny opiera się na dwóch zasadach: strukturalnej, łączącej dziesięć jednostek w nową jednostkę i notacyjnej, używającej tych samych symboli dla jednostek na każdym poziomie i rozróżniającej te poziomy przez ich pozycję.

Pierwsza zasada sięga wstecz do arytmetyki egipskiej, podczas gdy druga pojawiała się w arytmetyce babilońskiej (chociaż z podstawą 60, a nie 10). Obie dają się skonkretyzować w sposób współczesny (rys. 1(a)): sześciany dla jednostek najniższych, łączone w słupy po 10 sześcianów, łączone w płyty po 10 słupów, łączone w duże sześciany po 10 płyt, przedstawiając w ten sposób jednostki 1, 10, 100, 1000. Można także dobierać inne podstawy. Klocki takie stanowią wartościową pomoc, chociaż brak im elastyczności i nie przedstawiają one idei pozycyjnej w sposób kompletny. Obie zasady łączą się w abaku, najstarszym przyrządzie arytmetycznym ludzkości, zachowanym w niektórych częściach Związku Radzieckiego i Azji Wschodniej, zlekceważonym w Europie po pojawieniu się arytmetyki pisanej, ale teraz odżywającym jako wysoce efektywne narzędzie dydaktyczne (rys. 1(b) i (c)).

10. Wybrałem rachunki jako przykład wpływu filozofii edukacji na rozwój samej edukacji. Rachunki wszakże nie wyczerpują matematyki, nawet na poziomie początkowym. Przeciwnie, zbytni nacisk na rachunki może ujawniać filozofię złą lub, jak może raczej należałoby powiedzieć, filozofię minioną, do której wszakże ciągle lgnie ogromna większość podręczników na



Rys. 1

poziomie początkowym, pomimo słownych deklaracji uznawania innych wartości.

Z drugiej strony i wbrew podręcznikom, pojawiają się na świecie liczne i obiecujące próby wyrażenia szerszej filozofii przez nowy rodzaj edukacji matematycznej. Czytelnik mi wybaczy, że ograniczę swoje sprawozdanie do filozofii, którą znam najlepiej, a mianowicie tej, którą wyraża instytut IOWO w Utrechcie([7]). Instytut ten powstał w 1971 roku po dziesięcioletnim okresie działania w postaci Komisji Modernizacji Programów Matematycznych. Podstawowe idee IOWO streszczę w postaci kilku haseł kładących nacisk na to, że:

Matematyka jest raczej aktywnością niż gotowym przedmiotem.

Ważniejsze jest *mathematizing* niż *mathematized*.

Ważniejsze jest powtórne odkrywanie niż przekazywanie idei.

Rzeczywistość jest raczej źródłem *a priori* niż dziedziną zastosowań matematyki.

Ważniejsze są związki niż izolowane zjawiska.

Ważniejsze są bogate konteksty niż kolekcje werbalnych problemów.

Ważniejsze jest tworzenie obiektów umysłowych niż przyswajanie pojęć.

Ważniejsze jest wielokrotne podchodzenie do nowych pojęć niż wielorakie ich wcielenia.

Ważniejsze jest rozumienie niż umiejętność.

Powiedziałem „kładących nacisk", co oznacza pewne przesunięcie akcentu. Zinstytucjonalizowane uczenie się kładzie nacisk na „niewłaściwą" stronę, wysiłki innowacyjne zmierzają do lepszego dostosowania.

11. Dobra filozofia wyraża się bardziej działaniami niż słowami. Hasła nie mają znaczenia, póki nie odnoszą się do faktów. Edukacja matematyczna składa się z dużej ilości materiału, nie tylko dla ucznia, ale także dla nauczyciela, dla studenta na kierunku nauczycielskim, wykładowcy tamże, doradcy, działacza oświatowego, a także z opisów i analizy doświadczeń

([7]) Institut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs, IOWO (Instytut Rozwoju Edukacji Matematycznej), założony i kierowany przez wiele lat przez H. Freudenthala, był znanym na całym świecie ośrodkiem dydaktyki matematyki. Działalności IOWO poświęcony był specjalny zeszyt *Educational Studies in Mathematics* 8 (1977).

Niestety IOWO jest już historią: z końcem roku 1980 Instytut ten został zlikwidowany. Przyczyny nie były bynajmniej ekonomiczne, lecz polityczne. W Holandii wzięły górę poglądy, że instytucje rządowe mogą ustalać programy nauczania, lecz nie powinny narzucać ani nawet sugerować nauczycielowi sposobów realizacji programu (chodziło przede wszystkim o przedmioty humanistyczne, ale zasadę potraktowano ogólnie). IOWO mogłoby zapewne ocaleć (w okrojonej postaci), gdyby jego pracownicy zgodzili się na rezygnację z opracowywania konkretnych projektów realizacji materiału i ograniczyli się do prac programowych. Byłoby to jednak zaprzeczeniem podstawowej idei IOWO, że postęp w nauczaniu polega na ulepszaniu metod nauczania, a nie na zmianach programów (*przyp. red.*).

w nauczaniu na wszystkich szczeblach, sukcesów i niepowodzeń, sprawdzonych i niesprawdzonych idei. Ale cały ten materiał nie ma żadnej wartości, póki jego filozofia nie daje się zrealizować.

Na małą skalę pokazano, że daje się. Na dużą skalę dowód będzie sprawą czasu. Edukacja innowacyjna jest procesem uczenia się społeczeństwa, ale w porównaniu z indywidualnymi uczniami, grupami uczących się czy instytucjami rozwoju, społeczeństwo jest najwolniejszym ze wszystkich uczniem, a nadto istnieją łatwiejsze przedmioty do uczenia się niż matematyka i nauczanie matematyki.

Nie pisałem tego artykułu z zamiarem wprowadzenia w życie pewnych idei nauczania matematyki, wobec jego rozmiarów byłoby to bowiem niecelowe, będę się jednak starał dać przynajmniej pewien pogląd na to, co moje hasła w istocie znaczą.

12. Zacznę od historyjki z przedszkola. W sali jest akwarium z rybami i od czasu do czasu należy je oczyścić. Dzieci obserwują, jak robi to nauczycielka. Ryby trzeba połapać w siateczkę i poprzekładać do innego naczynia. „Teraz łatwo możemy policzyć ryby" – mówi Ania. Spróbowała, ale bez powodzenia: „Proszę pani, one się wszystkie bardzo rzucają".

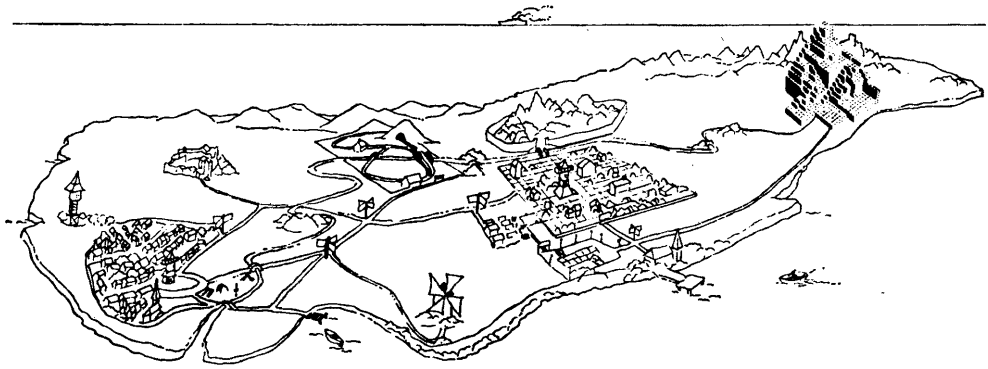
Nauczycielka wyłapuje ryby jedną po drugiej. Trzy zostały policzone, ale zaraz potem zostały złapane razem trzy następne. „Proszę pani, znów ich nie mogę liczyć" – żali się Ania. A pani podpowiada: „Spróbuj je rysować, a jak je narysujesz, policzysz na papierze". Pomysł jest dobry, Ania chwyta za papier i ołówek. „Poczekaj chwileczkę" – mówi. Rysuje najpierw trzy ryby w tym drugim naczyniu, a następnie trzy właśnie złapane. I dalej idzie już jej łatwo, nie pomija żadnej ryby. A kiedy akwarium jest puste, liczy i dumnie oznajmia: „Teraz wiem, ile ich jest: piętnaście".

Kilka dni później dwie ryby zdechły. „Co za szkoda, teraz moje liczenie na nic" – powiada. Nie wie, ile jest żywych ryb w akwarium. „Weź swój rysunek ryb" – podpowiada nauczycielka. Ania skreśla dwie ryby i znów zna odpowiedź.

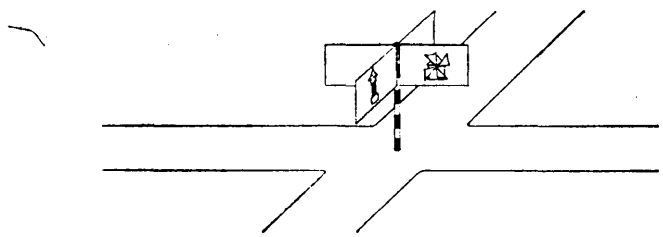
13. Nie muszę chyba komentować tej historyjki, każdy komentarz mógłby ją zepsuć. Nie mogę jednak nadal tylko opowiadać krótkich czy dłuższych historyjek. Taką dłuższą historią byłaby bajkowa wyspa, na której pierwszoklasiści spędzili kilka miesięcy swojej edukacji matematycznej. Przypływają łodzią (rys. 2).

Ile dzieci, ile autobusów z dwoma lub trzema miejscami w rzędzie? Którędy jadą? Jaka jest najkrótsza droga i jak ją opisać? Jaką ma długość? Którędy iść od wiatraka do latarni morskiej? Odgadnij napisy na tym drogowskazie. Gdzie on może stać (rys. 3)? Wieże na wyspie zbudowane są z takich samych kawałków, jak możesz je opisać (rys. 4)?

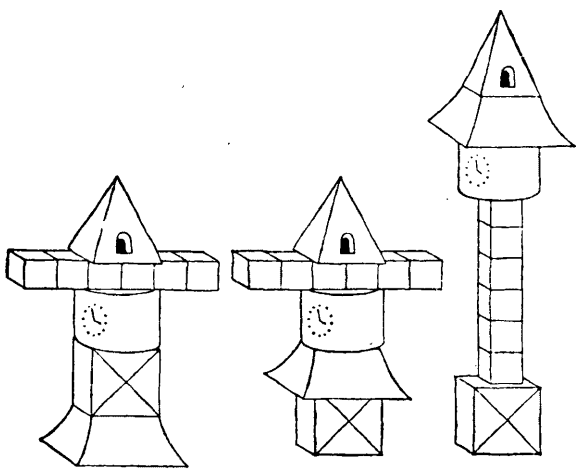
Jak możesz się wspiąć na górę klocków w prawym jej rogu (rys. 5)? Z ilu klocków się ona składa? Jak możesz opisać te struktury klockowe (rys. 6)?



Rys. 2



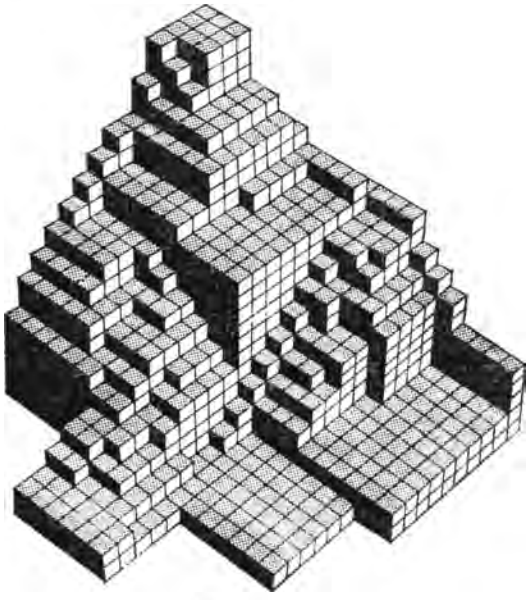
Rys. 3



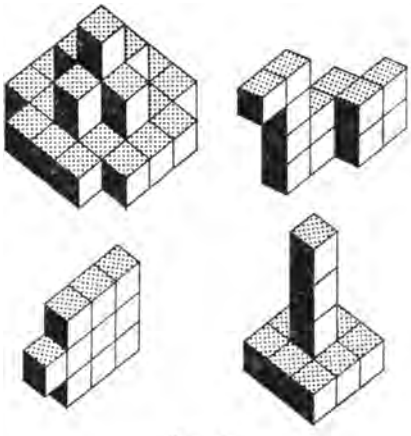
Rys. 4

Co widzisz z tego punktu wyspy i gdzie to zdjęcie zostało zrobione (rys. 7)? Ile jest miejsc na tym parkingu? Linie autobusowe z ludźmi wsiadającymi i wysiadającymi oferują sposób uprawiania arytmetyki (rys. 8).

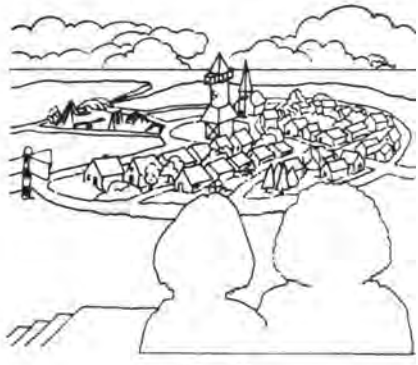
14. W różnych koncepcjach Nowej Matematyki podstawową rolę odgrywają zbiory. Nie trzeba chyba tłumaczyć, że IOWO może się obyć bez tej



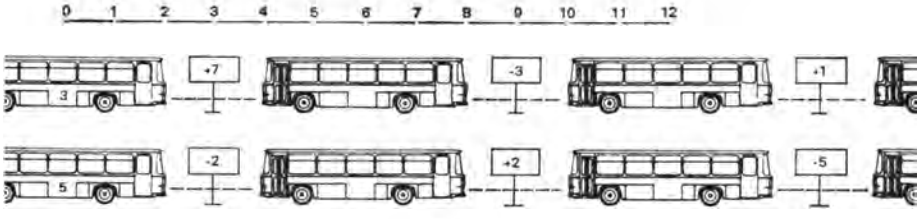
Rys. 5



Rys. 6

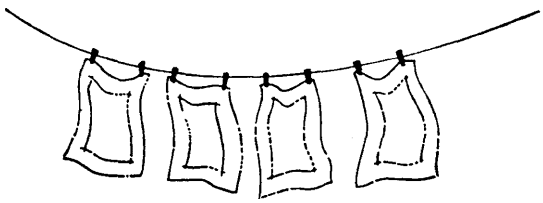


Rys. 7

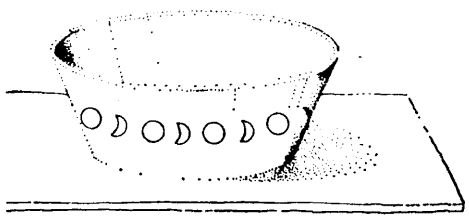


Rys. 8

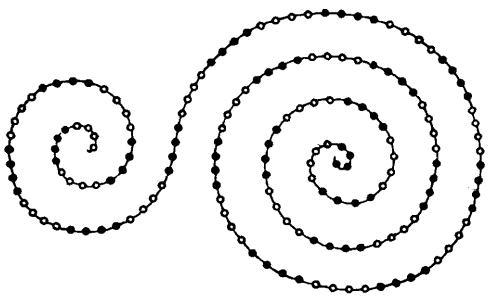
przedwczesnej abstrakcji. Liczba ani się nie opiera na pojęciu zbioru, ani nie jest w oparciu o nie wprowadzana. Kilku przykładów, jak się do pojęcia liczby dochodzi i jaką się mu nadaje strukturę, dostarczają rysunki. Ile jest chusteczek? Ile jest spinek? Czy może ich być mniej? (rys. 9). Czy księżyców jest więcej niż słońc (rys. 10)? Więcej białych czy czarnych pereł (rys. 11)? Skąd wiesz, że te liczby są równe?



Rys. 9



Rys. 10

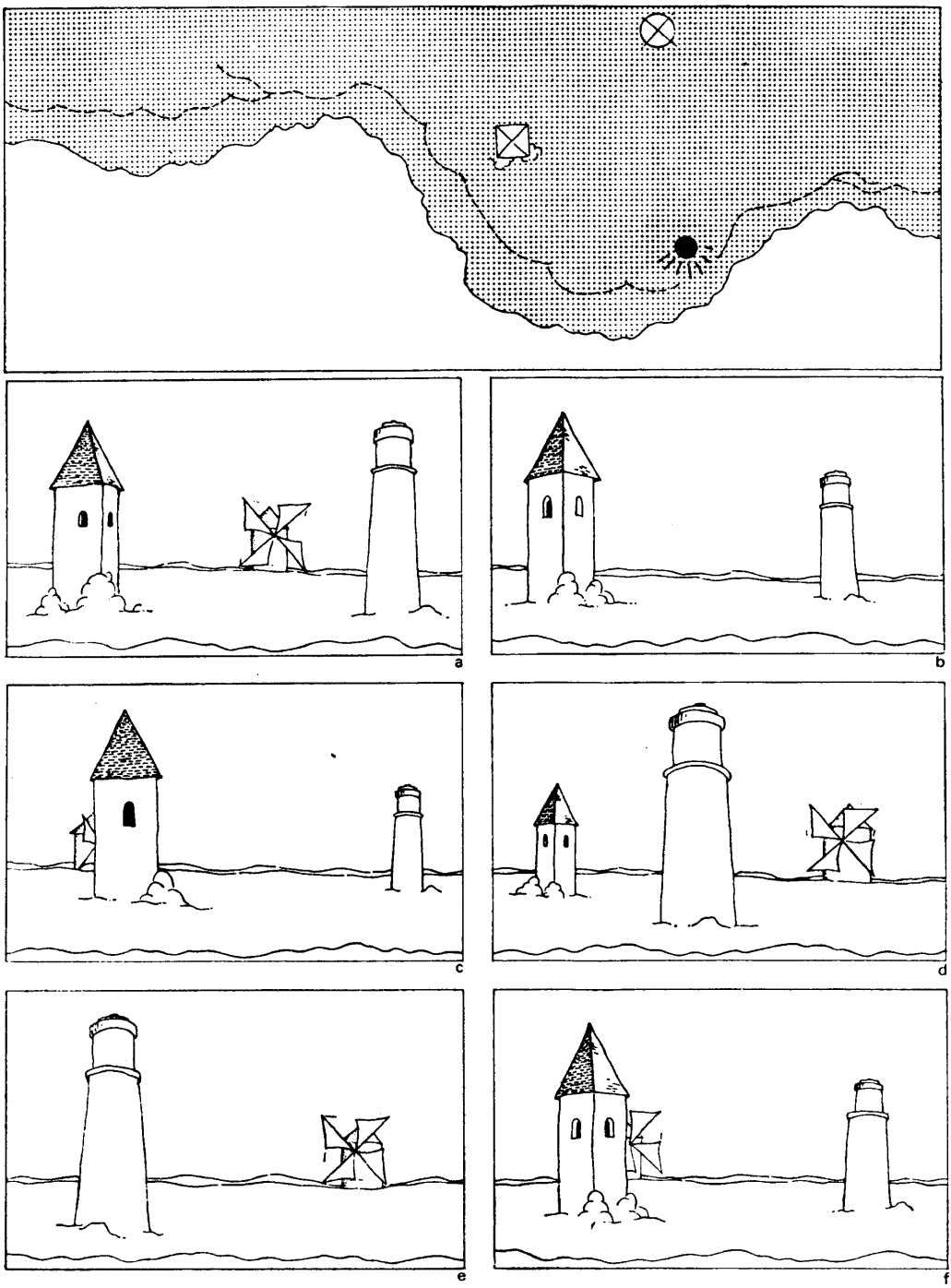


Rys. 11

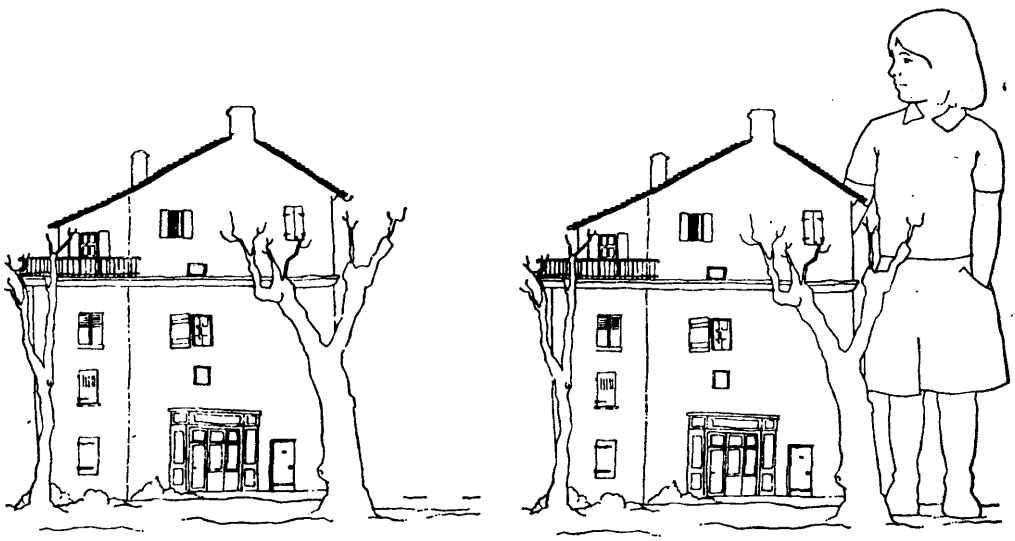
15. Bajkowa wyspa jest takim rodzajem kontekstu, który w terminologii IOWO nazywa się „umiejscowieniem" (*location*). Innym rodzajem jest „historyjka" Jej przykładem może być akcja ratownicza jachtu Bermuda, zidentyfikowanego i uratowanego przez holownik (lekcja dla dzieci w klasie IV–V). Dostarcza ona okazji do nauki posługiwania się mapami i robienia geometrii. Przytoczę jedno tylko pytanie z tej historyjki: w jakim porządku były wykonywane te zdjęcia z pokładu żaglowca płynącego wzdłuż brzegu (rys. 12)?

16. Stosunek jest jednym z najpotężniejszych środków strukturalizacji rzeczywistości, ale w nauczaniu matematyki został on silnie zredukowany przez przedwczesne matematyzowanie i formalizowanie. Podejście IOWO ilustruje fragment lekcji (klasy I–II) pokazany na rys. 13.

„Jak myślisz, jak wysoki byłbyś na tym obrazku?" Karol pokazuje. „Czy wszyscy się zgadzają?" Jan myśli, że Piotr byłby wyższy: „Ale nie byłbyś aż tak wysoki, jak te drzwi." Karol poprawia swoją ocenę.



Rys. 12. W jakiej kolejności były wykonane te zdjęcia?



Rys. 13

Nauczyciel dołącza drugą część obrazu. „Jak to jest możliwe?" „Ach, przecież to dom dla lalek!"([8])

Inny przykład: do kogo należą te ubrania (rys. 14)?

Jeszcze inny przykład: Pokazujemy dzieciom zdjęcie największej na świecie śruby okrętowej i stojących obok robotników. Problem: Jak wielka jest ta śruba?

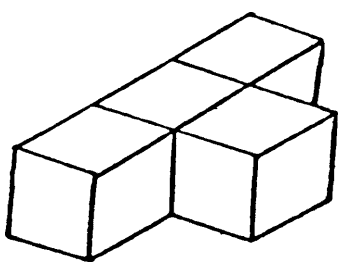
17. Według programów IOWO na wyższych poziomach nauczania dużą rolę odgrywają projekty. Przykładem (klasa VII) jest projekt Belvia: zaczyna się go od kostek i dochodzi do kształtu domów, które można zbudować z 4 kostek, wybierając jeden z nich (rys. 15).

Na pewnym obszarze projektuje się osiedle domków (rys. 16). Planuje się tych domków pięć, w związku z czym powstają takie pytania, jak: którą działkę wolisz? Jakie są pola tych działek? Jaka cena (przy znanej cenie za 1 m^2)? Następnie prosi się dzieci o zaprojektowanie ich własnych domków, przy ich zadanym kształcie (rys. 17). Dla ułatwienia mogą dostać rzeczywiste plany wykonane przez architekta specjalnie dla tego projektu (rys. 18).

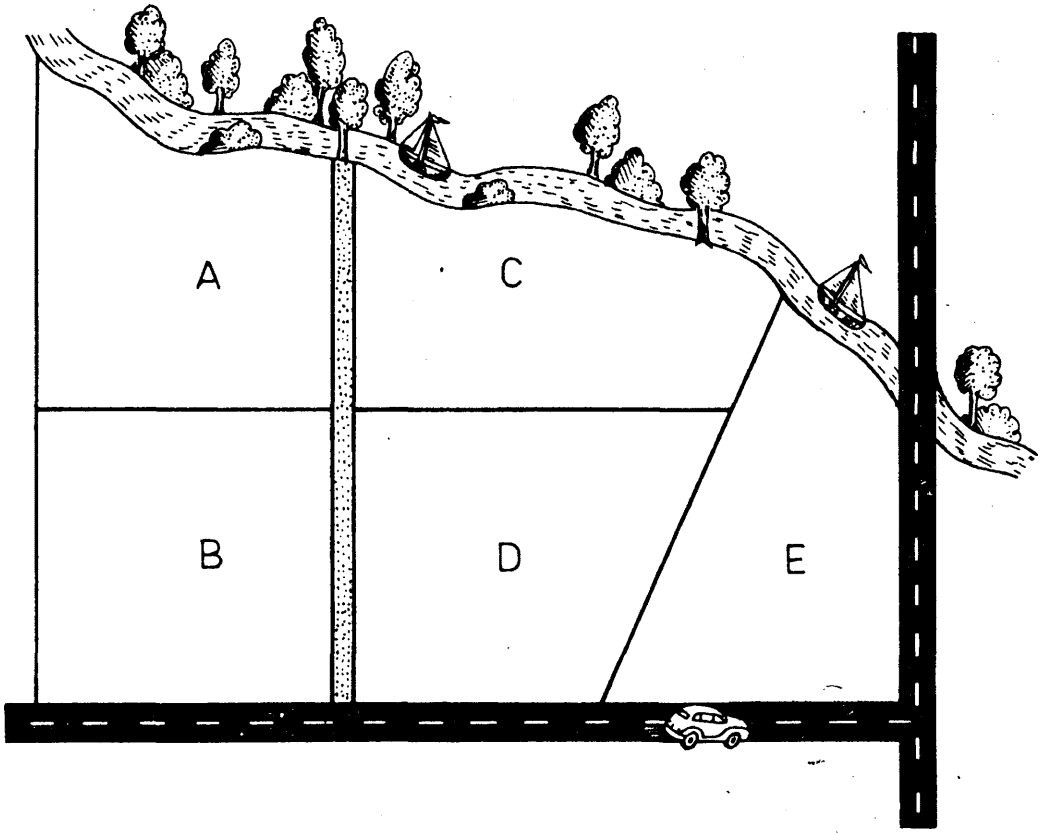
([8]) Uczniom holenderskim znane jest *Madurodam* (znajdujące się w Hadze), miniatura miasteczka holenderskiego, odwiedzane masowo przez dzieci i turystów. W Madurodam domy, skopiowane dokładnie z zabytkowych domów holenderskich, są mniejsze od dzieci; jeżdżą tam pociągi elektryczne itd., wszystko w jednej skali (*przyp. red.*).



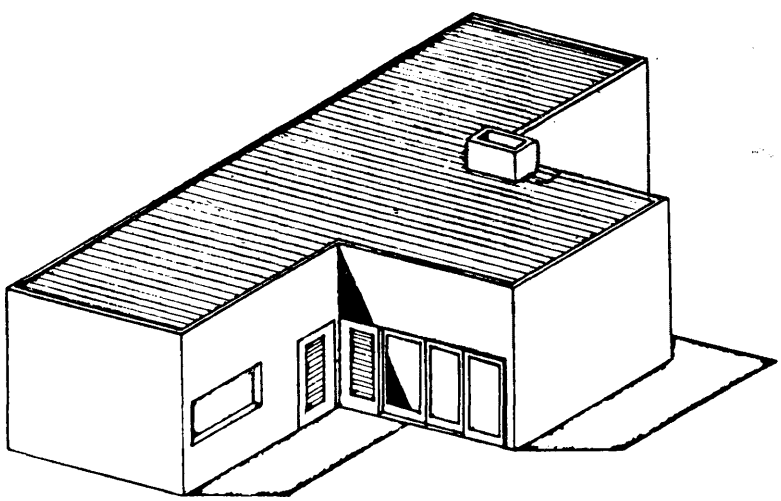
Rys. 14



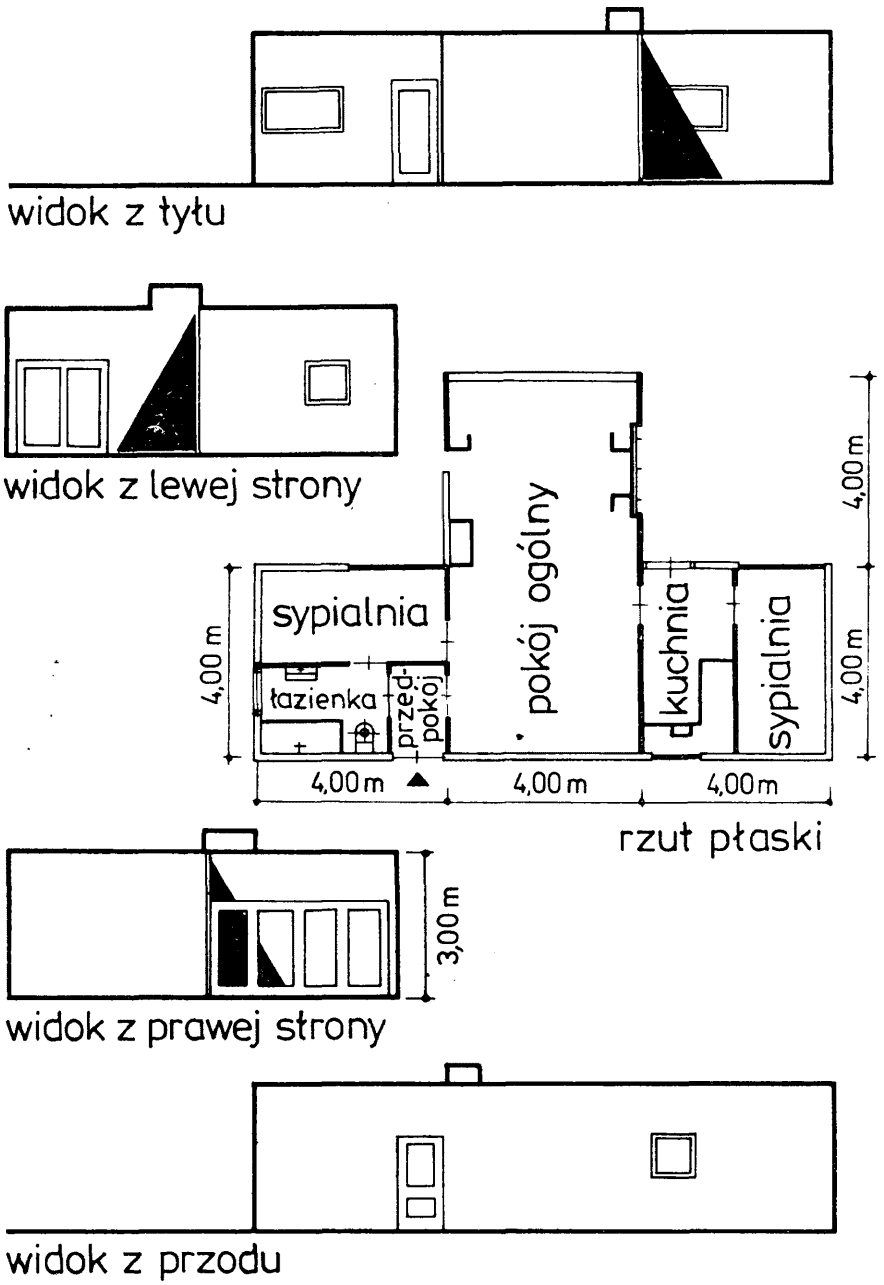
Rys. 15



Rys. 16



Rys. 17



Rys. 18. Domek rekreacyjny, typ Belvia

18. Na tym skończmy. Nie siląc się na pogląd całościowy, przedstawiłem kilka przykładów ilustrujących fundamentalne idee IOWO, streszczone w p. 10 w postaci kilku haseł. Przegląd programów IOWO zawiera artykuł *Five years of IOWO*, Educational Studies in Mathematics 7.3 (1976).

Tłum. Roman Duda