Paulo Ribenboim, *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin 1979, str. XVI+302, cena DM 48.–, ISBN 3-540-90432-8.

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Zagadnienie Fermata jest jednym z najsławniejszych zagadnień matematyki i należy do najstarszych problemów matematycznych, których rozwiązania nie znamy. Chodzi w nim o udowodnienie, że równanie

$$x^n+y^n = z^n$$

nie ma rozwiązań naturalnych przy $n \geqslant 3$. Problem ten bierze swój początek w notatce uczynionej przez Fermata na marginesie egzemplarza dzieł Diofantesa (przy okazji studiowania diofantowskiego rozwiązania równania $x^2+y^2 = z^2$): *Niemożliwe jest rozdzielenie sześcianu na dwa sześciany, bikwadratu na dwa bikwadraty i ogólniej dowolnej potęgi wyższej niż druga, na dwie takie same potęgi. Znalazłem zaprawdę zadziwiający dowód tego, lecz ten margines jest zbyt wąski, by go zmieścić.*

Autor recenzowanej książki postawił sobie za cel przedstawienie historii badań nad problemem Fermata, w formie dostępnej dla niespecjalistów. W istocie, książkę można swobodnie czytać, mając jedynie podstawowe wiadomości z zakresu algebry (elementy teorii pierścieni i ciał) i teorii liczb. Pewnym defektem tego podejścia jest niemożność przedstawienia dowodów wszystkich omawianych wyników, szczególnie z ostatniego okresu. Jednakże także w takich wypadkach autor stara się przedstawić podstawowe idee i pomysły, leżące u podstaw osiągniętych rezultatów.

Jak wynika z tytułu, książka składa się z 13 rozdziałów. Pierwsze dwa z nich, *Wczesna historia ostatniego twierdzenia Fermata* oraz *Ostatnie rezultaty* przedstawiają w krótkim zarysie historię zagadnienia i w zasadzie stanowią streszczenie pozostałych rozdziałów. Ta część książki ma charakter popularny i jest w pełni dostępna dla czytelnika bez większego przygotowania. Wydaje mi się, że pożyteczną rzeczą byłoby przełożenie jej na język polski i opublikowanie w *Wiadomościach*.

Rozdział III, *Przed Kummerem* opisuje najwcześniejsze próby rozwiązania problemu i zawiera rozwiązania podane przez Fermata dla wykładnika $n = 4$, przez Eulera w 1770 r. w przypadku $n = 3$, przez Dirichleta (1825) w przypadku $n = 5$ i przez V. A. Lebesgue'a (1840) w przypadku $n = 7$.

Ponieważ z prawdziwości twierdzenia Fermata dla pewnego wykładnika n wynika jego słuszność dla wszystkich wielokrotności n, przeto wystarczy się ograniczyć do przypadku, gdy n jest liczbą pierwszą i większość uzyskanych wyników dotyczy tego właśnie przypadku.

Tradycyjnie rozważanie równania

$$x^p+y^p = z^p$$

rozdziela się na dwa przypadki: tzw. *pierwszy przypadek*, zachodzi, gdy żadna z liczb x, y, z nie dzieli się przez p, jeżeli zaś $p|xyz$, to mówimy o *drugim przypadku*.

W rozdziale czwartym *Naiwne podejście* znajdujemy pierwsze wyniki ogólne, m.in. sławne twierdzenie Sophie Germain (1823) mówiące, że jeśli liczby $p \neq 2$ i $2p+1$ są obie pierwsze, to I przypadek twierdzenia Fermata jest słuszny dla wykładnika p. Jak wkrótce potem pokazał Legendre, zachodzi także analogiczne twierdzenie, w którym w miejsce $2p+1$ występują $4p+1$, $8p+1$, $10p+1$, $14p+1$ i $16p+1$. Pozwala to na dowód twierdzenia Fermata dla wszystkich wykładników pierwszych $3 \leqslant p < 100$ w pierwszym przypadku. Rozdział ten zawiera także dowód niedawnego wyniku Terjaniana (1977): jeżeli p jest nieparzystą liczbą pierwszą oraz

$$x^{2p}+y^{2p} = z^{2p}$$

przy naturalnych x, y, z, to jedna z liczb x, y musi się dzielić przez $2p$.

Następne trzy rozdziały: *Pomnik Kummera, Regularne liczby pierwsze* i *Kummer odchodzi* poświęcone są wyłożeniu wkładu Kummera w zagadnienie Fermata. Po przedstawieniu podstawowych faktów z teorii ciał cyklotomicznych autor podaje dowód najsławniejszego wyniku Kummera: jeżeli p jest regularną liczbą pierwszą, to twierdzenie

Fermata jest słuszne dla wykładnika p. (Liczby regularne można definiować na kilka sposobów, z których najbardziej elementarny brzmi: liczba pierwsza p jest *regularna*, jeżeli dla $k = 1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(p-3)$ suma

$$1^{2k}+2^{2k}+3^{2k}+\ldots+(p-1)^{2k}$$

nie dzieli się przez p^2.)

Rozdział VIII *Po Kummerze nowe światło* poświęcony jest rezultatom, związanym z twierdzeniem Wiefericha, który w 1909 roku pokazał, że jeżeli w pierwszym przypadku twierdzenie Fermata jest fałszywe dla pewnej liczby pierwszej p, to zachodzi kongruencja $2^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^2)$. Wynik Wiefericha jest w istocie bardzo silny, bo jak dotąd znamy jedynie dwie liczby pierwsze, spełniające ten warunek, a mianowicie $p = 1093$ i 3511. Autor podaje dowód rezultatu Wiefericha, znaleziony przez Mirimanoffa, a oparty na pewnej tożsamości Eulera.

Wynik Wiefericha został następnie wzmocniony przez Mirimanoffa i Morishimę przez zastąpienie kongruencji $2^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^2)$ przez $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^2)$ przy dowolnej liczbie pierwszej $a \leqslant 31$. Morishima twierdził, że to samo zachodzi także dla $a = 37$, 41 i 43, ale jego dowód wzbudza pewne wątpliwości.

W rozdziale IX *Siła teorii ciał klas* podaje się zastosowania metod algebraicznej teorii liczb, które pojawiły się w XX wieku, do zagadnienia Fermata, a rozdział X *Świeże wysiłki* daje przegląd ostatnich rezultatów na omawiany temat. Znajdujemy tu wynik Wagstaffa, dający słuszność twierdzenia Fermata dla wszystkich nieparzystych liczb pierwszych mniejszych od 125 000.

Rozdział IX *Oszacowania* podaje szereg rezultatów oszacowujących wielkość ewentualnych rozwiązań równania Fermata. Wynika z nich np., że jeżeli liczby x, y, z są kontrprzykładem na twierdzenie Fermata, to każda z nich musi mieć przynajmniej $18 \cdot 10^5$ cyfr w rozwinięciu dziesiętnym. Dwa ostatnie rozdziały: *Kongruencja Fermata* i *Wariacje i Fuga na pewien temat* omawiają różnego rodzaju analogony zagadnienia Fermata.

Jak z powyższego przeglądu treści wynika, książka P. Ribenboima zawiera sporo bardzo interesującego materiału, a że jest napisana lekko i czyta się ją przyjemnie, można ją śmiało polecić każdemu, kto interesuje się teorią liczb.

Władysław Narkiewicz

P. D. T. A. Elliott, *Probabilistic Number Theory I, II*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften tom 239, 240, Springer-Verlag, Berlin–Heidelbergstr–New York 1980, str. XXII+393, XVIII+375, cena DM 74.–, DM 70.–, ISBN 3-540-90437-9, 3-540-90438-7.

Dwutomowe dzieło P. D. T. A. Elliotta jest dopiero drugą monografią na świecie poświęconą wyłącznie probabilistycznej teorii liczb. Pierwszą stanowi książka wybitnego matematyka litewskiego J. Kubiliusa zatytułowana dość ostrożnie *Wierojatnostnyje mietody w tieorii czisel.*

W 1917 roku G. H. Hardy i bardzo oryginalny matematyk hinduski S. Ramanujan opublikowali pionierską pracę na temat wielkości średniej dla funkcji $\omega(n)$ – liczby różnych dzielników pierwszych n. Wynik stwierdza, że dla dowolnej funkcji $\psi(x)$ rosnącej do nieskończoności, gdy $x \to \infty$, zachodzi wzór

$$\frac{1}{x} \#\{n \leqslant x;\ |\omega(n) - \log\log x| > \psi(x)(\log\log x)^{1/2}\} \to 0,$$

gdzie $\#A$ oznacza liczebność zbioru A.

W 1932 roku P. Turán podał zupełnie inny dowód korzystający z elementarnej nierówności

$$\sum_{n \leqslant x} (\omega(n) - \log\log x)^2 \leqslant cx \log\log x,$$

gdzie c jest stałą.

Obie prace dały początek probabilistycznej teorii liczb. Nieco później, po wykrystalizowaniu się podstawowych pojęć rachunku prawdopodobieństwa (aksjomatyka