wmptm 1897

Fermata jest słuszne dla wykładnika p. (Liczby regularne można definiować na kilka sposobów, z których najbardziej elementarny brzmi: liczba pierwsza p jest *regularna*, jeżeli dla $k = 1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(p-3)$ suma

$$1^{2k} + 2^{2k} + 3^{2k} + \ldots + (p-1)^{2k}$$

nie dzieli się przez p^2.)

Rozdział VIII *Po Kummerze nowe światło* poświęcony jest rezultatom, związanym z twierdzeniem Wiefericha, który w 1909 roku pokazał, że jeżeli w pierwszym przypadku twierdzenie Fermata jest fałszywe dla pewnej liczby pierwszej p, to zachodzi kongruencja $2^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^2)$. Wynik Wiefericha jest w istocie bardzo silny, bo jak dotąd znamy jedynie dwie liczby pierwsze, spełniające ten warunek, a mianowicie $p = 1093$ i 3511. Autor podaje dowód rezultatu Wiefericha, znaleziony przez Mirimanoffa, a oparty na pewnej tożsamości Eulera.

Wynik Wiefericha został następnie wzmocniony przez Mirimanoffa i Morishimę przez zastąpienie kongruencji $2^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^2)$ przez $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^2)$ przy dowolnej liczbie pierwszej $a \leqslant 31$. Morishima twierdził, że to samo zachodzi także dla $a = 37$, 41 i 43, ale jego dowód wzbudza pewne wątpliwości.

W rozdziale IX *Siła teorii ciał klas* podaje się zastosowania metod algebraicznej teorii liczb, które pojawiły się w XX wieku, do zagadnienia Fermata, a rozdział X *Świeże wysiłki* daje przegląd ostatnich rezultatów na omawiany temat. Znajdujemy tu wynik Wagstaffa, dający słuszność twierdzenia Fermata dla wszystkich nieparzystych liczb pierwszych mniejszych od 125 000.

Rozdział IX *Oszacowania* podaje szereg rezultatów oszacowujących wielkość ewentualnych rozwiązań równania Fermata. Wynika z nich np., że jeżeli liczby x, y, z są kontrprzykładem na twierdzenie Fermata, to każda z nich musi mieć przynajmniej $18 \cdot 10^5$ cyfr w rozwinięciu dziesiętnym. Dwa ostatnie rozdziały: *Kongruencja Fermata* i *Wariacje i Fuga na pewien temat* omawiają różnego rodzaju analogony zagadnienia Fermata.

Jak z powyższego przeglądu treści wynika, książka P. Ribenboima zawiera sporo bardzo interesującego materiału, a że jest napisana lekko i czyta się ją przyjemnie, można ją śmiało polecić każdemu, kto interesuje się teorią liczb.

Władysław Narkiewicz

P. D. T. A. Elliott, *Probabilistic Number Theory I, II*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften tom 239, 240, Springer-Verlag, Berlin–Heidelbergstr–New York 1980, str. XXII + 393, XVIII + 375, cena DM 74.–, DM 70.–, ISBN 3-540-90437-9, 3-540-90438-7.

Dwutomowe dzieło P. D. T. A. Elliotta jest dopiero drugą monografią na świecie poświęconą wyłącznie probabilistycznej teorii liczb. Pierwszą stanowi książka wybitnego matematyka litewskiego J. Kubiliusa zatytułowana dość ostrożnie *Wierojatnostnyje mietody w tieorii czisel.*

W 1917 roku G. H. Hardy i bardzo oryginalny matematyk hinduski S. Ramanujan opublikowali pionierską pracę na temat wielkości średniej dla funkcji $\omega(n)$ – liczby różnych dzielników pierwszych n. Wynik stwierdza, że dla dowolnej funkcji $\psi(x)$ rosnącej do nieskończoności, gdy $x \to \infty$, zachodzi wzór

$$\frac{1}{x} \# \{n \leqslant x;\ |\omega(n) - \log\log x| > \psi(x)\,(\log\log x)^{1/2}\} \to 0,$$

gdzie $\#A$ oznacza liczebność zbioru A.

W 1932 roku P. Turán podał zupełnie inny dowód korzystający z elementarnej nierówności

$$\sum_{n \leqslant x} (\omega(n) - \log\log x)^2 \leqslant cx \log\log x,$$

gdzie c jest stałą.

Obie prace dały początek probabilistycznej teorii liczb. Nieco później, po wykrystalizowaniu się podstawowych pojęć rachunku prawdopodobieństwa (aksjomatyka

Kołmogorowa 1933), można było spojrzeć na wyniki Hardy'ego–Ramanujana i Turána znacznie szerzej. Pierwszy rezultat sugeruje pytanie, jakie funkcje arytmetyczne $f(n)$ mają rozkłady graniczne, tj. czy

$$v_x(n; f(n)-A(x) \leqslant zB(x)) \stackrel{\text{df}}{=}$$

$$\stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{x} \# \{n \leqslant x;\ f(n)-A(x) \leqslant zB(x)\}$$

ma granicę $F(z)$, gdy $x \to \infty$, dla odpowiednio dobranych funkcji $A(x)$ i $B(x)$ (normalizacja). W oszacowaniu Turána Czytelnik z łatwością dopatrzy się nierówności Czebyszewa.

Podstawowe badania teorii dotyczą funkcji addytywnych i multyplikatywnych. Funkcja $f(m)$ nazywa się *silnie addytywna*, jeśli $f(mn) = f(m)+f(n)$ dla każdej pary liczb m, n względnie pierwszych i $f(p^\alpha) = f(p)$, $\alpha \geqslant 1$. A zatem $f(p)$ dla liczb pierwszych p wyznaczają wszystkie wartości funkcji. Wartość średnią i dyspersję definiuje się odpowiednio

$$A(x) = \sum_{p \leqslant x} f(p)/p$$

i

$$B(x) = \sum_{p \leqslant x} f^2(p)/p.$$

W 1939 roku P. Erdös i M. Kac udowodnili, że jeśli $|f(p)| \leqslant 1$ i $B(x) \to \infty$, to $f(n)$ ma rozkład Gaussa

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^z e^{-w^2/2}\, dw.$$

Jest to centralne twierdzenie graniczne dla zmiennych losowych określonych następująco: $X_p = f(p)$ z prawdopodobieństwem $1/p$ i $X_p = 0$ z prawdopodobieństwem $1-1/p$.

Metody Erdösa i Kaca były raczej naśladownictwem metod rachunku prawdopodobieństwa niż precyzyjnym zastosowaniem odpowiednich twierdzeń. W owym czasie posługiwano się intuicyjnym pojęciem przestrzeni probabilistycznej. Dopiero w latach 1945–1955 J. Kubilius skonstruował adekwatną przestrzeń probabilistyczną, w której można ściśle stosować ogólne wyniki rachunku prawdopodobieństwa. Ważnym elementem konstrukcji jest tzw. „Lemat Fundamentalny" z teorii sita, pozwalający wprowadzić pojęcie niezależności zmiennych losowych X_p.

Dalsze losy teorii przedstawię przy okazji omawiania zawartości książki Elliotta.

Pierwszy tom składa się ze wstępu i 10 rozdziałów. Już ze wstępu (16 stron) Czytelnik może całkiem dobrze zapoznać się z olbrzymim arsenałem różnych metod stosowanych w książce. W rozdziale I autor zebrał potrzebne wyniki z teorii miary, rachunku prawdopodobieństwa i analizy fourierowskiej. Niektóre z nich są mało znane i mogą zainteresować tych, którzy nie zamierzają przestudiować całego dzieła.

Rozdział II zawiera podstawowe wyniki z elementarnej i analitycznej teorii liczb; a zatem metodę sita A. Selberga, twierdzenie o liczbach pierwszych tj. wzór asymptotyczny $\pi(x) \sim x/\log x$ dla liczby liczb pierwszych $p \leqslant x$ i teorię szeregów Dirichleta ze szczególnym uwzględnieniem twierdzeń tauberowskich. Duże znaczenie w probabilistycznej teorii liczb mają szeregi Dirichleta o współczynnikach multyplikatywnych. Wynika to z faktu, że funkcja charakterystyczna dla sumy zmiennych losowych X_p, $p|n$, jest multyplikatywna.

W następnym rozdziale autor wykorzystuje Lemat Fundamentalny do konstrukcji modelu przestrzeni probabilistycznej Kubiliusa. W modelu tym zmienne losowe X_p są prawie niezależne dla p nie przekraczających pewnej wielkości r. Suma zmiennych X_p po wszystkich dzielnikach pierwszych liczby n daje funkcję addytywną $f(n)$, a suma częściowa X_p, $p|n$, $p \leqslant r$, dobrze aproksymuje $f(n)$. Podano wyraźne oszacowania dla błędu przybliżenia.

Rozdział IV poświęcony jest nierówności Turána–Kubiliusa, tj. nierówności Czebyszewa dla dowolnej funkcji addytywnej $f(n)$. Wynik jest prostą konsekwencją nierówności wielkiego sita. Twórcą wielkiego sita był J. W. Linnik (1941). Dużego postępu dokonał A. Rényi. On też podał interpretację metody sita w terminach probabilistyki. Metody wielkiego sita były bardzo popularne w latach sześćdziesiątych (Bombieri, Selberg, Davenport, Halberstam, Halász, Montgomery). Znaczący wkład do rozwoju wielkiego sita

wniósł sam Elliott. W recenzowanej książce autor wybrał własną metodę opublikowaną w *Acta Arithmetica* 18 (1971). Dla recenzenta najciekawszą wydaje się metoda Halásza wykorzystująca znaną zasadę dualności, że normy operatora i jego sprzężonego są równe (w odpowiednich przestrzeniach). Autor poświęca tej zasadzie jeden paragraf.

W rozdziale V dowodzi się twierdzenia Erdösa–Wintnera podającego warunki konieczne i wystarczające na to, by funkcja addytywna miała rozkład graniczny. Zbadano funkcję charakterystyczną rozkładu granicznego i typ zbieżności. Podano kilka przykładów.

W rozdziale VI pojawiają się nowe wielkie postacie teorii, mianowicie H. Delange, E. Wirsing i G. Halász. Ich wyniki dotyczą wzorów asymptotycznych dla wartości średnich funkcji multyplikatywnych. Wyniki zostały wykorzystane w następnym rozdziale do scharakteryzowania wszystkich funkcji addytywnych, które po odpowiedniej translacji mają rozkłady graniczne.

W rozdziale VIII bada się rozmieszczenie wartości funkcji addytywnych modulo 1 (części ułamkowych $f(n)$). Temat ten nieco odbiega od głównego nurtu książki.

Dalej, w rozdziale IX, autor wraca do tematyki rozdziału VI, rozszerzając poprzednie wyniki za pomocą silniejszych metod Halásza.

W ostatnim rozdziale podaje się warunki konieczne i zarazem dostateczne na to, aby wartość średnia funkcji multyplikatywnej była różna od zera. Główne wyniki należą do Delange'a i Elliotta.

Drugi tom tematycznie jest ścisłą kontynuacją pierwszego, natomiast jeśli chodzi o metody, to jest on w dużym stopniu niezależny. Centralnym problemem jest, jak poprzednio, istnienie rozkładów granicznych dla funkcji addytywnych.

W rozdziale XI otrzymuje się wyniki wstępne. Najogólniej mówiąc podane są warunki na $A_i(x)$ i $B_i(x)$ (porównawcze wzory asymptotyczne), przy których częstości $\nu_x(n; f_i(n)-A_i(x) \leqslant zB_i(x))$, $i = 1, 2$, zbiegają do tego samego rozkładu (w różnym sensie).

Rozdział XII zawiera kompletny dowód twierdzenia Erdösa–Kaca. Jedna z wersji podaje warunek Fellera–Lindeberga jako konieczny na to, by częstość $\nu_x(n; f(n)-A(x) \leqslant zB(x))$ dążyła do rozkładu normalnego, gdy $x \to \infty$. Ponadto przeprowadza się analogiczne badania dla funkcji addytywnych obciętych do zbioru liczb postaci $p+1$, gdzie p przebiega liczby pierwsze. Wyniki są głębsze z powodu zastosowania twierdzenia Bombieriego o równomiernym rozmieszczeniu liczb pierwszych w postępach arytmetycznych. W tym przypadku podstawowe wyniki należą do Elliotta i Katái.

W dwu następnych rozdziałach bada się słabe prawo wielkich liczb dla funkcji silnie addytywnych.

W rozdziale XV rozstrzyga się następujące pytanie Hardy'ego i Ramanujana: dla jakich funkcji arytmetycznych $f(n)$ istnieją niemalejące funkcje $g(n)$ (zwane „normal order") takie, że $|f(n)-g(n)| \leqslant \varepsilon g(n)$ dla prawie wszystkich n (w sensie gęstości naturalnej).

Trzy kolejne rozdziały poświęcone są badaniom ogólnych rozkładów granicznych dla funkcji addytywnych, tj. istnieniu granicy

$$G(z) = \lim_{x \to \infty} \nu_x(n; f(n)-\alpha(x) \leqslant z\beta(x))$$

przy odpowiednim unormowaniu $\alpha(x)$, $\beta(x)$ nie koniecznie standardowym $A(x)$, $B(x)$. Wyniki nie są kompletne. W szczególnych przypadkach, gdy zakłada się, że $G(z)$ jest rozkładem Gaussa lub Cauchy'ego, otrzymuje się pełną charakteryzację $\alpha(x)$ i $\beta(x)$. W innych twierdzeniach pokazuje się, jakie rozkłady nie mogą występować dla funkcji addytywnych.

W rozdziale XIX bada się wzory asymptotyczne dla wartości średnich funkcji multyplikatywnych. Dużą wagę przywiązuje się do oszacowania wyrazu błędu. Podstawowym narzędziem jest metoda E. Wirsinga zbliżona do tej, której A. Selberg użył w elementarnym dowodzie wzoru asymptotycznego dla liczby liczb pierwszych $p \leqslant x$.

W następnym rozdziale szacuje się szybkość zbieżności częstości $\nu_x(n; f(n)-A(x) \leqslant zB(x))$ do rozkładu normalnego.

Rozdział XXI jest zatytułowany „twierdzenia lokalne dla funkcji addytywnych". Chodzi o zbadanie granicy $\lim_{x \to \infty} \nu_x(n; f(n) = a)$. Okazuje się, że granica istnieje i jest różna od zera dla najwyżej przeliczalnej

mnogości a. Najgłębszy i elegancki rezultat należy do G. Halásza, mianowicie dla dowolnej funkcji addytywnej $f(n)$ i dowolnych liczb rzeczywistych a, $x \geqslant 1$, zachodzi nierówność

$$v_x(n; f(n) = a) \leqslant c\Big(\sum_{\substack{p \leqslant x \\ f(p) \neq 0}} p^{-1}\Big)^{1/2},$$

gdzie c jest pewną stałą absolutną.

Przedostatni rozdział dotyczy bardzo ważnej funkcji arytmetycznej $h(n)$ — liczby klas ideałów ciała kwadratowego o wyróżniku $-n$. Nie jest to funkcja ani addytywna, ani multyplikatywna. Mało wiadomo o $h(n)$ dla pojedynczych wartości n, natomiast znane są dość silne wzory asymptotyczne dla momentów. W książce autor dowodzi istnienia dystrybuanty asymptotycznej dla $h(n)/\sqrt{n}$.

W ostatnim rozdziale autor sformułował wiele problemów i postawił kilka hipotez.

Książka Elliotta jest przeznaczona dla specjalistów z teorii liczb. Przedstawia ona dużą wartość również dla matematyków pracujących wyłącznie w probabilistyce.

Uważam, że recenzowana książka ilustruje główny nurt probabilistycznej teoriii liczb. W książce Czytelnik nie znajdzie żadnego śladu dwóch potężnych metod współczesnej analitycznej teorii liczb, mianowicie metody dyspersyjnej i metody ergodycznej Linnika. Te dwie metody stosuje się do innych zagadnień.

Autor potraktował zadanie napisania obszernej monografii bardzo poważnie i wykonał je z entuzjazmem. Każdy rozdział zakończony jest obszernymi uwagami merytorycznymi i historycznymi. Bardzo atrakcyjne są zamieszczone wypowiedzi i listy Erdösa, Turána oraz innych ciekawych osób. Przed stroną tytułową umieszczono reprodukcje fotografii Turána, Erdösa, Kaca i Kubiliusa — prekursorów teorii.

Henryk Iwaniec

Książki nadesłane

Walter Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, wydanie trzecie zmienione, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1982, nakład 10000 egz., str. 291, cena zł 140.—. Z języka angielskiego przetłumaczył Wojciech Wojtyński. ISBN 83-01-02846-7

1. Systemy liczb rzeczywistych i zespolonych. 2. Podstawy topologii. 3. Ciągi i szeregi liczbowe. 4. Ciągłość. 5. Różniczkowanie. 6. Całka Riemanna–Stieltjesa. 7. Ciągi i szeregi funkcyjne. 8. Pewne funkcje specjalne. 9. Funkcje wielu zmiennych. 10. Całkowanie form zewnętrznych. 11. Teoria Lebesgue'a.

Recenzję pierwszego wydania zamieściśliśmy w Wiadom. Mat. 13 (1971), str. 122–123.

Rudolf Lidl, *Algebra dla przyrodników i inżynierów*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1983, nakład 5000 egz., str. 286, cena zł 70.—. Z języka niemieckiego przetłumaczył Jarosław Cichorski. ISBN 83-01-04165-X

1. Wprowadzenie. 2. Struktury algebraiczne. 3. Półgrupy. 4. Grupy. 5. Pierścienie i ciała. 6. Algebra Boole'a.

W. J. Rozenberg, *Wstęp do teorii błędów systemów pomiarowych*, Biblioteka Naukowa Inżyniera, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1982, nakład 1400 egz., str. 445, cena 150.—. Z języka rosyjskiego przetłumaczył Jerzy Dudziewicz. ISBN 83-01-02984-6

1. Teoria błędów systemów pomiarowych. Terminologia i problematyka. 2. Tezaurus. 3. System pomiarowy idealny. 4. System pomiarowy realny. Błąd zupełny. 5. Analiza błędu zupełnego. 6. Optymalizacja systemów.