w 1948 r., Fréchet pisał: *Przyłączam się z całego serca do hołdu, który będzie oddany profesorowi Sierpińskiemu. Przez wspaniały całokształt prac, przez nauczanie, przez swą działalność osobistą sprawił, że matematyka polska promieniuje na cały świat* ([2], str. 32). Z okazji tego jubileuszu Karol Menger, zwracając się wprost do Sierpińskiego, napisał słowa, którymi chciałbym zakończyć swój odczyt: *To me you are not only one of the outstanding mathematicians of your time but a symbol and a symbol in many ways. You are a symbol of that type of great mathematics to which your „Fundamenta" are devoted, a symbol of Polish Science and a symbol of Polish Nation. To see you rise after disasters, Phoenix like, again and again is to me a permanent source of encouragement. It should be an inspiration for the whole world and for all times* ([2], str. 33).

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Literatura cytowana

[1] P. Dugac, *Nicolas Luzin: Lettres à Arnaud Denjoy avec introduction et notes*, Archives Internationales de l'Historia des Sciences, t.27 (1977), 179–206; tłum. polskie: Wiadom. Mat. 25 (1983), 65–68.
[2] *Jubileusz 40-lecia działalności na katedrze uniwersyteckiej profesora Wacława Sierpińskiego*, Dodatek do tomu XXI Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Warszawa 1949.
[3] K. Kuratowski, *Notatki do autobiografii*, Warszawa 1981.
[4] E. Marczewski, *Rozwój matematyki w Polsce*, Kraków 1948.
[5] Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego 16 (1937).
[6] W. Sierpiński, *O polskiej Szkole Matematycznej*, w książce: *Wkład Polaków do Nauki*, Warszawa 1967, 413–434.
[7] S. Ulam, *Wspomnienia z kawiarni szkockiej*, Wiadom. Mat. 12 (1971), 49–58.

Zofia Adamowicz (Warszawa)

Wkład Wacława Sierpińskiego do ogólnej teorii mnogości

Nie jest łatwo oddzielić wyniki z ogólnej teorii mnogości od reszty twórczości Sierpińskiego.

Nie daje się również wyodrębnić w sposób naturalny poszczególnych działów jego twórczości w tej dziedzinie; można tego dokonać jedynie ze współczesnego punktu widzenia. W czasie, gdy powstawała większość prac Sierpińskiego, teoria mnogości była jeszcze tak młodą dyscypliną, że w jej ramach nie można było jeszcze wyodrębnić takich działów, jak teoria miary i kategorii, teoria funkcji rzeczywistych, deskryptywna teoria mnogości, czy też ogólna teoria mnogości.

Prace Sierpińskiego z teorii mnogości stanowią, przynajmniej częściowo, podwaliny każdej z wymienionych wyżej dziedzin. Prace te jednak powstawały jako twórczość niezróżnicowana według działów, sprzężona z ogólnym rozwojem teorii mnogości oraz z jej podziałem. Tak więc poniższy podział jego twórczości z teorii mnogości jest wyraźnie współczesny; w szczególności wyróżnienie wkładu Sierpińskiego do tzw. ogólnej teorii mnogości nie jest wcale związane z chronologicznym powstawaniem jego prac. Można, jak sądzę, wyróżnić w jego twórczości następujące tematy:

Pewnik wyboru i arytmetyka liczb kardynalnych.

Hipoteza continuum.

Kombinatoryka nieskończona.

Teoria typów porządkowych.

Poza pracami dotyczącymi wyżej wymienionych tematów istnieje jednak ogromna liczba prac Sierpińskiego z ogólnej teorii mnogości, których nie sposób sklasyfikować.

Sierpiński rozwiązywał problemy pojawiające się w naturalny sposób w danym momencie rozwoju teorii mnogości, przy czym szczególnie interesowała go struktura prostej rzeczywistej.

Sierpiński sam nie wiązał swoich wyników w teorie, ale niektóre jego prace stały się inspiracją powstania i rozwoju pewnych teorii, np. kombinatoryki nieskończonej. Te właśnie prace omówię tu bardziej szczegółowo, pomijając z konieczności znaczną liczbę pozostałych. Trzeba jednak pamiętać, że i one wnoszą istotny wkład do wiedzy, dostarczają znacznej liczby użytecznych faktów, stanowią narzędzie dla najróżniejszych konstrukcji teoriomnogościowych i są często cytowane.

Rozważmy teraz pierwszy z wyżej wymienionych tematów: pewnik wyboru. Znaczna część okresu twórczej pracy Sierpińskiego przypada na czasy, kiedy zarówno w odniesieniu do pewnika wyboru, jak i do hipotezy continuum nie znano odpowiedzi na następujące trzy pytania: czy dają się udowodnić, czy dają się obalić, czy są niezależne. Niesprzeczność obu hipotez udowodnił Gödel w 1938 r. [6], niezależność pewnika wyboru od teorii mnogości z indywiduami — Fraenkel i Mostowski w 1939 r. [5], [13], a niezależność hipotezy continuum i pewnika wyboru od teorii mnogości bez indywiduów — Cohen, dopiero w 1963 r. [3].

Problem prawdziwości pewnika wyboru, a także hipotezy continuum, był tematem ożywionej dyskusji wśród matematyków. Sierpiński nie włączał się do tej dyskusji; pragnął on jedynie głęboko zrozumieć sens obu hipotez.

Jeśli chodzi o pewnik wyboru, Sierpiński uważał, że dotyczy on sensu słowa *istnieje*. Problem wyboru elementów z pewnej liczby zbiorów jest dla niego analogiczny do problemu wyboru elementu z jednego zbioru. Wybór elementu z jednego zbioru niepustego nie wymaga żadnego szczególnego aksjomatu — istnienie takiego elementu wynika z definicji tego,

że zbiór jest niepusty. Niemniej jednak, jeśli nie możemy konkretnego elementu wskazać, jego istnienie może być dyskusyjne. Tym bardziej dyskusyjne jest to, czy można wybrać po jednym elemencie z nieskończonej liczby zbiorów.

Sierpiński, we wszystkich swoich rozumowaniach, a także w innych znanych dowodach, zwraca szczególną uwagę na efektywność konstrukcji. Nawet jeśli konstrukcja nie wymaga pewnika wyboru, nie zawsze uznaje ją za efektywną. Dyskusje tego rodzaju znaleźć można w kilku pracach Sierpińskiego, na przykład w [*1*], [*2*], [*3*]. Dziś, gdy znane są modele dla teorii mnogości z negacją pewnika wyboru, można powiedzieć, że teoria tego rodzaju jest ciekawym przedmiotem badań. Badania takie często dają nowy pogląd na całokształt teorii mnogości.

Z prac Sierpińskiego o pewniku wyboru najbardziej istotne są te, które dotyczą działań na liczbach kardynalnych. Przy założeniu pewnika wyboru arytmetyka liczb kardynalnych staje się bardzo regularna: liczby kardynalne stanowią wtedy ciąg rosnący

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \ldots < \aleph_\omega < \ldots,$$

a ich dodawanie, odejmowanie i mnożenie podlega łatwym ogólnym wzorom; jedynie w odniesieniu do potęg pewnik wyboru rozstrzyga niewiele.

Bez pewnika wyboru natomiast sytuacja jest diametralnie inna. O arytmetyce liczb kardynalnych nie da się wtedy powiedzieć prawie nic. Na przykład dla każdego skończonego porządku częściowego można bez sprzeczności założyć, że wkłada się on w porządek liczb kardynalnych [8]. Bez pewnika wyboru dadzą się udowodnić tylko nieliczne równości bądź nierówności. Sierpiński dowiódł na przykład następujących:

$$2^m - m = 2^m, \qquad [4],$$
$$2m = 2n \Rightarrow m = n, \qquad [6],$$
$$2m \leqslant 2n \Rightarrow m \leqslant n, \qquad [7].$$

Niektóre prawa arytmetyki liczb kardynalnych są równoważne pewnikowi wyboru, np.

$[(\forall m)(m^2 = m) \Rightarrow$ Pewnik wyboru$]$ [14] (Tarski 1924),

$[(\forall m, n)(m - n$ daje się jednoznacznie zdefiniować$) \Rightarrow$ Pewnik wyboru$]$ (Sierpiński 1947 [*5*]).

Jak wspomniałam, dziś wiadomo, że teoria mnogości wraz z pewnikiem wyboru prawie wcale nie rozstrzyga tego, czym są potęgi liczb kardynalnych. Wiadomo na przykład, że można założyć bez sprzeczności, iż $2^{\aleph_0}$ jest prawie dowolną liczbą kardynalną [4]. Mianowicie można założyć $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, itd. Sprzeczne z teorią mnogości jest jedynie założenie, że $2^{\aleph_0}$ ma charakter współkońcowości $\aleph_0$ (np. że $2^{\aleph_0} = \aleph_\omega$); także

wprost z definicji liczby mocno nieosiągalnej wynika to, że $2^{\aleph_0}$ jest od niej mniejsza.

Zagadnienie, czym jest $2^{\aleph_0}$ czyli continuum, nazywał Sierpiński *problemem continuum* — w okresie międzywojennym był to dla matematyków wielki otwarty problem.

Zagadnienie potęgowania liczb kardynalnych, w jeszcze większym stopniu niż przez hipotezę $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, jest rozstrzygane przez tzw. *uogólnioną hipotezę continuum*. Jest ona przypuszczeniem, że $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ dla każdej liczby porządkowej α. Jeśli odrzucimy pewnik wyboru, to jako słabsze sformułowanie hipotezy continuum otrzymamy

$$\forall \mathfrak{m}\ \neg(\aleph_0 < \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}), \tag{1}$$

a jako uogólnioną hipotezę continuum

$$\forall \mathfrak{m}, \mathfrak{n}\ \neg(\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{m}}). \tag{2}$$

Może się wydać zaskakujące, że hipoteza (2) implikuje pewnik wyboru, a więc i całą regularność dodawania i mnożenia liczb kardynalnych. Jest to jedno z największych twierdzeń Sierpińskiego. Hipoteza (1) nie implikuje pewnika wyboru, a nawet nie implikuje $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Twierdzenie, że uogólniona hipoteza continuum implikuje pewnik wyboru, zostało zasugerowane przez Lindenbauma i Tarskiego, a jego dowód podał Sierpiński w 1947 r. [8].

Hipotezą $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ Sierpiński zajmował się bardzo dużo. Problem rozstrzygnięcia tej hipotezy uważał za bardzo trudny i nie próbował go rozwiązywać. Wykazał natomiast ogromną liczbę konsekwencji i równoważników tej hipotezy. Jego książka *Hypothèse du continu* zawiera ich około stu, przy czym prawie wszystkie dotyczą struktury wewnętrznej prostej i płaszczyzny. Oto omówienie najważniejszych i najciekawszych z nich.

Hipoteza continuum znaczy dokładnie to, że liczby rzeczywiste można ustawić w ciąg $(x_\xi)_{\xi<\aleph_1}$. Stąd łatwo wynika, że płaszczyznę (kwadrat) można podzielić na zbiory $E_1 \cup E_2$ takie, że E_1 jest przeliczalny na każdej prostej poziomej, a E_2 na każdej prostej pionowej. Mianowicie:

$$E_1 = \{\langle x_\xi, x_\eta\rangle : \xi < \eta\}, \qquad E_2 = \boldsymbol{R}^2 - E_1.$$

Istnienie powyższego podziału jest równoważne z hipotezą continuum. Sierpiński zauważył je w 1919 roku [9]. Ma ono głębokie konsekwencje, np. tę, że zbiór E_1 jest niemierzalny. Istotnie, gdyby zbiór E_1 był mierzalny, to mielibyśmy

$$\int_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle} \chi_{E_1}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\langle 0,1\rangle}\Big(\int_{\langle 0,1\rangle} \chi_{E_1}(x,y)\,dx\Big)dy = 0$$

z twierdzenia Fubiniego. Z drugiej strony,

$$\int_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle} \chi_{E_1}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\langle 0,1\rangle}\Big(\int_{\langle 0,1\rangle} \chi_{E_1}(x,y)\,dy\Big)dx = 1,$$

co daje sprzeczność.

To rozumowanie było wielokrotnie wykorzystywane w przeszłości np. w [1], [2] (niesprzeczność istnienia zbioru PCA niemierzalnego), a także współcześnie (w związku z problemem prostokątów).

Inne zdanie równoważne z hipotezą continuum jest następujące: przestrzeń $\boldsymbol{R}^3$ można rozłożyć na trzy części, $E_1 \cup E_2 \cup E_3$, z których każda jest skończona w odpowiednim kierunku [*10*].

Ostatnio rozważa się w topologii i teorii mnogości pewien aksjomat słabszy od hipotezy continuum. Brzmi on następująco: jeśli X jest przestrzenią zwartą Hausdorffa z własnością Suslina, tzn. jeśli każda rodzina rozłącznych zbiorów otwartych jest co najwyżej przeliczalna, to suma mniej niż continuum zbiorów nigdzie gęstych w X jest brzegowa. Aksjomat ten nazywa się *aksjomatem Martina* [12]. Otóż część konsekwencji hipotezy continuum wynika z aksjomatu Martina. W związku z tym Martin i Solovay [12] zainteresowali się książką *Hypothèse du continu* i ustalili, które z twierdzeń Sierpińskiego można wyprowadzić z aksjomatu Martina zamiast z hipotezy continuum, a które są niezależne od tego aksjomatu. Następujące twierdzenie, na przykład, jest niezależne od aksjomatu Martina, a wynika z hipotezy continuum: *jeśli Φ jest rodziną zbiorów liczb rzeczywistych bez nieprzeliczalnych antyłańcuchów* (jak np. zbiory o niepustym wnętrzu), *to istnieje ciąg zbiorów $E_1, E_2, \ldots$ spoza Φ* (np. ciąg, którego jedynym wyrazem jest zbiór liczb niewymiernych) *taki, że*

$$\boldsymbol{R} - \bigcup_n E_n \quad \textit{jest przeliczalne} \text{ (np. równe } Q);$$

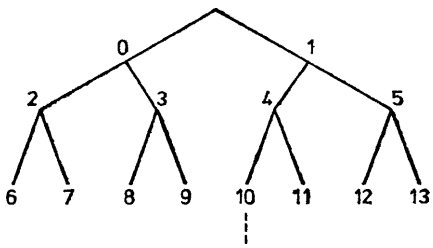
jest to twierdzenie Ulama w przypadku $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, wzmocnione przez Sierpińskiego w 1933 r. dla przypadku, gdy continuum jest mniejsze od pierwszej liczby słabo nieosiągalnej [*11*].

Przechodzę teraz do omówienia twierdzeń Sierpińskiego, które dziś wchodzą w skład tzw. *kombinatoryki nieskończonej*. Za najważniejsze uznać tu należy twierdzenie o rodzinach zbiorów prawie rozłącznych [*12*]. Zbiorami *prawie rozłącznymi* (termin pochodzi od Sierpińskiego, 1937) nazywamy takie zbiory A, B liczb naturalnych, że $A \cap B$ jest skończone, lub takie zbiory mocy $\mathfrak{m}$, że $\overline{\overline{A \cap B}} < \mathfrak{m}$. Dziś podręczniki kombinatoryki zaczynają się od tej właśnie definicji z odsyłaczem do Sierpińskiego.

Główne twierdzenia Sierpińskiego o zbiorach prawie rozłącznych są następujące:

(i) *Istnieje rodzina mocy $2^{\aleph_0}$ podzbiorów prawie rozłącznych zbioru $\boldsymbol{N}$.*

Najprostszy dowód tego twierdzenia można zilustrować następującym drzewem:



Ma ono $2^{\aleph_0}$ gałęzi, zbiory zaś wyznaczone przez poszczególne gałęzie są prawie rozłączne.

Idea oryginalnego dowodu Sierpińskiego była podobna.

(ii) *Dla każdego zbioru mocy* $\mathfrak{m}$ *istnieje rodzina mocy* $\mathfrak{m}^+$ (tzn. najmniejszej mocy większej od $\mathfrak{m}$) *prawie rozłącznych jego podzbiorów mocy* $\mathfrak{m}$.

Współczesne znaczenie teorii zbiorów prawie rozłącznych można ująć w następujących punktach:

1° Jest ona działem kombinatoryki.

2° Jest istotnym narzędziem w ogromnej liczbie dowodów teoriomnogościowych.

3° Stanowi podwalinę wszelkich rozważań dotyczących antyłańcuchów w algebrach Boole'a.

Każda rodzina zbiorów prawie rozłącznych stanowi antyłańcuch w algebrze Boole'a $\mathscr{P}(N)/\mathrm{Fin}$ (rodzina podzbiorów zbioru liczb naturalnych podzielona przez ideał zbiorów skończonych). Strukturą tej algebry Sierpiński zajmował się w kilku pracach. Pokazał na przykład, że w algebrze $\mathscr{P}(N)/\mathrm{Fin}$ istnieją łańcuchy długości $\aleph_1$ [*15*], a także, że nie ma w niej tzw. luk typu $(\aleph_0, \aleph_0)$ [*14*].

Sierpiński badał kilkakrotnie relację „prawie zawierania się zbiorów", która dokładnie odpowiada relacji porządku w $\mathscr{P}(N)/\mathrm{Fin}$.

Algebra $\mathscr{P}(N)/\mathrm{Fin}$ i inne algebry typu $\mathscr{P}(\varkappa)/\mathrm{Fin}$, gdzie $\varkappa$ jest liczbą kardynalną, są dziś obiektem znacznego zainteresowania matematyków zajmujących się kombinatoryką nieskończoną.

Otwarty jest na przykład fundamentalny i łatwy do sformułowania problem, czy $\mathscr{P}(N)/\mathrm{Fin}$ jest izomorficzna z $\mathscr{P}(\aleph_1)/\mathrm{Fin}$.

4° Teoria zbiorów prawie rozłącznych została zastosowana przez Jensena–Solovaya [10] do kodowania podzbiorów continuum liczbami rzeczywistymi — znajduje się liczbę „prostopadłą" do elementów danego zbioru (tzn. prawie rozłączną z tymi elementami) i „równoległą" do innych. Jest to bardzo spektakularne zastosowanie teorii zbiorów prawie rozłącznych.

Sierpiński badał zbiory prawie rozłączne metodą porządkowania leksykograficznego ciągów. Jemu zawdzięczamy tę metodę. Pierwszy raz pojawiła się ona w pracy [*13*] z 1922 r. Sierpiński udowodnił o tym porządku wiele faktów, które dziś się stosuje jako narzędzie techniczne. Na przykład pokazał, że porządek leksykograficzny w przestrzeni Cantora $2^{\aleph}$ jest ciągły [*18*].

Innym, dziś zasadniczym, działem kombinatoryki nieskończonej, częściowo zainicjowanym przez Sierpińskiego, jest teoria własności podziałowych. Pierwszą znaną własnością podziałową jest *zasada szufladkowa Dirichleta*: jeśli podzielić zbiór duży na mało części, to jedna z tych części jest duża. Przed Sierpińskim znane było twierdzenie Ramseya (1930), zapisywane dziś symbolicznie jako $\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_2$, gdzie $\alpha \to (\beta)^2_2$ oznacza zdanie następujące: jeśli zbiór wszystkich par nieuporządkowanych elementów zbioru mocy α podzielić na dwie części $A_1 \cup A_2$, to istnieje zbiór A mocy β taki, że zbiór par elementów zbioru A jest zawarty w jednej z części podziału. W świetle tego twierdzenia naturalne jest pytanie, czy $2^{\aleph_0} \to (\aleph_1)^2_2$. Sierpiński dał na nie odpowiedź negatywną. Sformułował ją w kategoriach relacji symetrycznych jako rozwiązanie problemu Knastra, 1933 [*16*]. Następnie zagadnienie to rozważali Węgrzy: Erdös, Rado i Hajnal. Oto twierdzenie Erdösa i Rado: $(2^{\alpha})^+ \to (\alpha^+)^2_2$ (a więc $(2^{\aleph_0})^+ \to (\aleph_1)^2_2$), patrz [9].

Własności podziałowe mają ogromne znaczenie nie tylko w kombinatoryce, lecz w całych współczesnych podstawach matematyki — w zagadnieniach dużych liczb, w teorii modeli, w podstawach arytmetyki. Można rozważać własności podziałowe bardziej złożone, np.

$$\begin{bmatrix} \varkappa \\ \varkappa \\ \varkappa \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \eta, & 1, & 1 \\ 1, & \eta, & 1 \\ 1, & 1, & \eta \end{bmatrix}^{1,1,1},$$

co znaczy, że jeśli zbiór $A \times A \times A$, gdzie $\overline{\overline{A}} = \varkappa$, podzielimy na trzy części $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, to istnieje i takie, że A_i zawiera na prostej równoległej do OX_i zbiór mocy η. Rozkład przestrzeni Sierpińskiego, o którym wspomniałam omawiając hipotezę continuum, odpowiada negacji następującej własności podziałowej:

$$\begin{bmatrix} 2^{\aleph_0} \\ 2^{\aleph_0} \\ 2^{\aleph_0} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \aleph_0, & 1, & 1 \\ 1, & \aleph_0, & 1 \\ 1, & 1, & \aleph_0 \end{bmatrix}^{1,1,1}.$$

Jak już wspomniałam, Sierpiński pokazał, że negacja powyższej własności jest równoważna hipotezie continuum. Twierdzenie to zostało wzmocnione przez Kuratowskiego i Sikorskiego [11], [15] na przypadek

hipotezy $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$ — rozważali oni odpowiednio dobrane własności podziałowe.

Przejdźmy następnie do teorii porządków. Tu za najważniejszą zasługę Sierpińskiego z dzisiejszego punktu widzenia trzeba uznać wykład teorii zbiorów η_ξ metodą ciągów uporządkowanych leksykograficznie [*17*], [*18*]. (Porządek η_ξ jest uogólnieniem η_0, czyli porządku liczb wymiernych.) Teoria ta ma najbardziej istotne zastosowanie w teorii modeli w odniesieniu do modeli nasyconych. Inne ważne twierdzenie Sierpińskiego z teorii porządków jest następujące: $\mu\alpha = \mu\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ dla typów α, μ, β [*19*].

Spośród prac, które nie dadzą się zaliczyć do żadnego z działów rozpatrzonych powyżej, omówienia wymaga praca napisana wspólnie z Tarskim w 1930 r. [*20*]. Wprowadza się w niej i charakteryzuje pojęcie tzw. *liczby mocno nieosiągalnej* w odróżnieniu od *liczby słabo nieosiągalnej*, zdefiniowanej przez Hausdorffa. Zagadnienie istnienia liczb nieosiągalnych zajmuje we współczesnej teorii mnogości szczególne miejsce. Z twierdzeń Gödla (1933) [7] wynika, że w powszechnie rozważanej teorii mnogości ZF nie da się dowieść istnienia liczby nieosiągalnej, co zapisujemy symbolicznie ZF $\nvdash$ I. Także nie da się dowieść, iż z niesprzeczności teorii ZF wynika niesprzeczność tej teorii wraz z założeniem istnienia liczby nieosiągalnej, symbolicznie: $\nvdash \mathrm{Con ZF} \Rightarrow \mathrm{Con(ZF + I)}$. Nie da się więc dowieść nie tylko istnienia liczb nieosiągalnych, ale także niesprzeczności ich istnienia. Rozstrzygnięcie, czy mogą istnieć liczby nieosiągalne lub inne tzw. duże liczby, jest obecnie największym problemem otwartym teorii mnogości. A priori jest możliwe, że da się udowodnić ich nieistnienie.

W związku z tym warto wymienić jeszcze jedno twierdzenie Sierpińskiego; mimo że należy raczej do teorii miary, odegrało ostatnio w teorii mnogości istotną rolę. Sierpiński pokazał, że ultrafiltr na ω, traktowany jako zbiór liczb rzeczywistych (przy identyfikacji $\mathscr{P}(\omega)$ ze zbiorem liczb rzeczywistych) jest zbiorem niemierzalnym, [*21*].

W roku 1970 Solovay dowiódł [16], że jeśli istnienie liczby nieosiągalnej jest niesprzeczne, to niesprzeczna jest mierzalność wszystkich zbiorów i niesprzeczne jest posiadanie przez nie własności Baire'a (można dodatkowo przyjąć tzw. *zasadę wyborów zależnych*) — pewnik wyboru odrzucamy.

Wielu matematyków pracowało nad wyeliminowaniem założenia o niesprzeczności istnienia liczb nieosiągalnych, gdyż jego prawdziwość jest problematyczna. Shelah pokazał [17], że wyeliminowanie tego założenia jest niemożliwe w przypadku miary, możliwe zaś w przypadku własności Baire'a.

Dowód Shelaha i inny dowód Raisonniera stosują ideę Sierpińskiego z pracy o niemierzalności ultrafiltru (na N) z 1938 r. [*21*]. Raisonnier pokazał, że jeśli $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$, to istnieje tzw. *filtr szybki*, a wtedy jest on nie-

mierzalny. Jeśli więc wszystkie zbiory są mierzalne, to $\aleph_1 \not\leqslant 2^{\aleph_0}$, a stąd $\aleph_1$ jest nieosiągalny w uniwersum zbiorów konstruowalnych. Istnienie liczby nieosiągalnej jest więc niesprzeczne.

Na zakończenie pragnę podkreślić, że niniejszy artykuł jest bardzo skrótowym omówieniem wkładu Sierpińskiego do teorii mnogości. Ogranicza się ono tylko do twórczości Sierpińskiego w zakresie podstaw nowo powstałych teorii i dlatego nie wykracza poza fakty dość elementarne i nieskomplikowane. Teorie, które wymieniam, rozwinęły się dziś bardzo. Korzysta się w nich z twierdzeń i metod Sierpińskiego nie tylko w zagadnieniach podstawowych, ale i w dowodach szczegółowych twierdzeń. Nie omawiałam tych twierdzeń, gdyż wydawały mi się zbyt specjalne, aby mogły zainteresować czytelników nie zajmujących się daną dziedziną.

Literatura cytowana

[1] J. Addison, *Some consequences of the axiom of constructibility*, Fund. Math. 46 (1959), 123–135.

[2] S. Banach, K. Kuratowski, *Ensembles projectifs et ensembles singuliers*, ibidem 35 (1948), 131–140.

[3] P. J. Cohen, *Set theory and continuum hypothesis*, New York 1966.

[4] W. B. Easton, *Powers of regular cardinals*, Princeton University Dissertation 1964, Ann. of Math. Logic 1 (1970), 139–179.

[5] A. Fraenkel, *Über den Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms*, Sitz. d. Preuss. Akad. d. Wiss. (1922), 253–257

[6] K. Gödel, *The consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, 4th printing, Princeton 1958.

[7] —, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, I, Monatsch. Math. u. Phys. 38 (1931), 173–198.

[8] T. Jech, *The axiom of choice*, Amsterdam, North-Holland Publ. Co. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 45.

[9] I. Juhas, *Cardinal functions in topology*, Amsterdam 1971, Math. Centrum 8°.

[10] R.B. Jensen, R.M. Solovay, *Some applications of almost disjoint sets*, Mathematical Logic and Foundations of Set Theory (I. Bar-Hillel ed.), 84–104, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1970.

[11] K. Kuratowski, *Sur une caractérisation des alephs*, Fund. Math. 38 (1951), 14–17.

[12] D. Martin, R. Solovay, *Internal Cohen extensions*, Ann. of Math. Logic 2 (1970), 143–178.

[13] A. Mostowski, *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, Fund. Math. 32 (1939), 201–252.

[14] H. Rubin, J. Rubin, *Equivalents of the Axiom of Choice*, Studies in Logic and Foundations of Math., North-Holland Publ. Co., 1963.

[15] R. Sikorski, *A characterization of alephs*, Fund. Math. 38 (1951), 18–22.

[16] R.M. Solovay, *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann. of Math. 92 (1970), 1–56.

[17] S. Shelah, *Can you take Solovay's inaccessible away*, nieopublikowane.

Cytowane prace W. Sierpińskiego

[1] *Les exemples effectifs et l'axiome du choix*, Fund. Math. 2(1921), 112–118.
[2] *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse*, Biul. PAU (1918), 97–152.
[3] *Cardinal and ordinal numbers*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1965, PWN.
[4] *Démonstration de l'égalité* $2^{\mathfrak{m}}-\mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{m}}$ *pour les nombres cardinaux transfinis*, Fund. Math. 34 (1947), 113–118.
[5] *Sur la différence de deux nombres cardinaux*, ibidem 34 (1947), 119–126.
[6] *Sur l'égalité* $2\mathfrak{m} = 2\mathfrak{n}$ *pour les nombres cardinaux*, ibidem 3 (1922), 1–6.
[7] *Sur l'implication* $(2\mathfrak{m} \leqslant 2\mathfrak{n}) \rightarrow (\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n})$ *pour les nombres cardinaux*, ibidem 34 (1947), 148–154.
[8] *L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix*, ibidem 34 (1947), 1–5.
[9] *Sur un théorème équivalent à l'hypothèse du continu* ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), Biul. PAU (1919), 1–3.
[10] *Sur quelques propositions concernant la puissance du continu*, Fund. Math. 38 (1951), 1–13.
[11] *Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles*, ibidem 20 (1933), 214–220.
[12] *Sur les suites transfinies finalement disjointes*, ibidem 28 (1937), 115–119.
[13] *Sur un problème concernant les sousensembles croissant du continu*, ibidem 3 (1922), 109–112.
[14] *Sur les ensembles presque contenus les uns dans les autres*, ibidem 35 (1948), 141–150.
[15] *Sur une suite transfinie d'ensembles de nombres naturels*, ibidem 33 (1945), 9–11.
[16] *Sur un problème de la théorie des relations*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, II seria, 2 (1933), 285–287.
[17] *Généralisation d'un théorème de Cantor concernant les ensembles ordonnés dénombrables*, Fund. Math. 18 (1932), 280–284.
[18] *Sur une propriété des ensembles ordonnés*, ibidem 36 (1949), 56–67.
[19] (wspólna z A. Tarskim) *Sur la division des types ordinaux*, ibidem 35 (1948), 1–12.
[20] *Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles*, ibidem 15 (1930), 292–300.
[21] *Fonctions additives non complètement additives et fonctions non mesurables*, ibidem 30 (1938), 96–99.

Ryszard Engelking (Warszawa)

O pracach Wacława Sierpińskiego z topologii

Topologia — ze względu na bogactwo przykładów i wyraźną treść geometryczną zagadnień — należała do dziedzin, które Wacława Sierpińskiego szczególnie interesowały. Zajmował się nią od roku 1910, kiedy to ogłosił pracę *Nowy sposób dowodzenia twierdzenia Bolzano–Weierstrassa**,

* Praca [30] w bibliografii otwierającej *Oeuvres choisies* Sierpińskiego, PWN, Warszawa 1974; w dalszym ciągu liczby w nawiasach kwadratowych odsyłają do tej bibliografii, po numerze pracy podajemy rok jej publikacji: [30, 1910].