wmptm 1897

**Cytowane prace W. Sierpińskiego**

[1] *Les exemples effectifs et l'axiome du choix*, Fund. Math. 2(1921), 112–118.
[2] *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse*, Biul. PAU (1918), 97–152.
[3] *Cardinal and ordinal numbers*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1965, PWN.
[4] *Démonstration de l'égalité* $2^{\mathfrak{m}}-\mathfrak{m}=2^{\mathfrak{m}}$ *pour les nombres cardinaux transfinis*, Fund. Math. 34 (1947), 113–118.
[5] *Sur la différence de deux nombres cardinaux*, ibidem 34 (1947), 119–126.
[6] *Sur l'égalité* $2\mathfrak{m}=2\mathfrak{n}$ *pour les nombres cardinaux*, ibidem 3 (1922), 1–6.
[7] *Sur l'implication* $(2\mathfrak{m}\leqslant 2\mathfrak{n})\rightarrow(\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n})$ *pour les nombres cardinaux*, ibidem 34 (1947), 148–154.
[8] *L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix*, ibidem 34 (1947), 1–5.
[9] *Sur un théorème équivalent à l'hypothèse du continu* ($2^{\aleph_0}=\aleph_1$), Biul. PAU (1919), 1–3.
[10] *Sur quelques propositions concernant la puissance du continu*, Fund. Math. 38 (1951), 1–13.
[11] *Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles*, ibidem 20 (1933), 214–220.
[12] *Sur les suites transfinies finalement disjointes*, ibidem 28 (1937), 115–119.
[13] *Sur un problème concernant les sousensembles croissant du continu*, ibidem 3 (1922), 109–112.
[14] *Sur les ensembles presque contenus les uns dans les autres*, ibidem 35 (1948), 141–150.
[15] *Sur une suite transfinie d'ensembles de nombres naturels*, ibidem 33 (1945), 9–11.
[16] *Sur un problème de la théorie des relations*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, II seria, 2 (1933), 285–287.
[17] *Généralisation d'un théorème de Cantor concernant les ensembles ordonnés dénombrables*, Fund. Math. 18 (1932), 280–284.
[18] *Sur une propriété des ensembles ordonnés*, ibidem 36 (1949), 56–67.
[19] (wspólna z A. Tarskim) *Sur la division des types ordinaux*, ibidem 35 (1948), 1–12.
[20] *Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles*, ibidem 15 (1930), 292–300.
[21] *Fonctions additives non complètement additives et fonctions non mesurables*, ibidem 30 (1938), 96–99.

RYSZARD ENGELKING (Warszawa)

## O pracach Wacława Sierpińskiego z topologii

Topologia — ze względu na bogactwo przykładów i wyraźną treść geometryczną zagadnień — należała do dziedzin, które Wacława Sierpińskiego szczególnie interesowały. Zajmował się nią od roku 1910, kiedy to ogłosił pracę *Nowy sposób dowodzenia twierdzenia Bolzano–Weierstrassa**,

* Praca [30] w bibliografii otwierającej *Oeuvres choisies* Sierpińskiego, PWN, Warszawa 1974; w dalszym ciągu liczby w nawiasach kwadratowych odsyłają do tej bibliografii, po numerze pracy podajemy rok jej publikacji: [30, 1910].

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

aż do połowy lat pięćdziesiątych. Wyniki najważniejsze, te które można dziś bez wahania nazwać klasycznymi, uzyskał w pięcioleciu 1916–1920; dotyczą one wszystkie krzywych i continuów. Mniej więcej w tym samym czasie Sierpiński przeprowadził porównanie rozmaitych pojęć „wysokiego stopnia niespójności" zbiorów, uzyskując rezultaty, które zaliczamy obecnie do teorii wymiaru. Nieco później — aż do początku lat trzydziestych — zajmował się sporadycznie ogólniejszymi własnościami topologicznymi, takimi jak zwartość, własność Lindelöfa, ośrodkowość, własność Baire'a i topologiczna zupełność.

Zawsze interesowało go zagadnienie stopnia efektywności dowodów, w szczególności możliwość wyeliminowania z prowadzonych rozumowań i konstrukcji pewnika wyboru i liczb porządkowych: stąd duża liczba prac, również i topologicznych, zawierających nowe dowody dawniejszych — cudzych i własnych — rezultatów. Z topologią związane są także liczne twierdzenia i przykłady Sierpińskiego, które formalnie wypada zaliczyć do innych dziedzin: teorii funkcji rzeczywistych, deskryptywnej teorii mnogości, albo teorii miary. Ścisłe rozgraniczenie i klasyfikacja wyników nie są możliwe w przypadku umysłu tak uniwersalnego i tak niezależnego jak Sierpiński, który, odpowiadając na ciekawe dla siebie pytanie dotyczące prostej czy przestrzeni euklidesowej, jak sądzę, nie zastanawiał się nigdy, jaki dział matematyki właśnie uprawia.

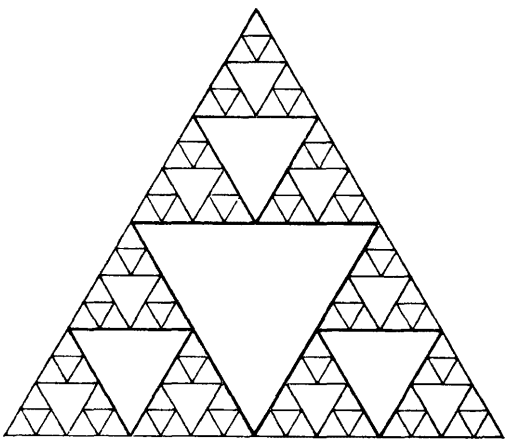
Ograniczając się do tematów tradycyjnie zaliczanych do topologii, omówimy teraz zwięźle najważniejsze osiągnięcia Wacława Sierpińskiego w tej dziedzinie.

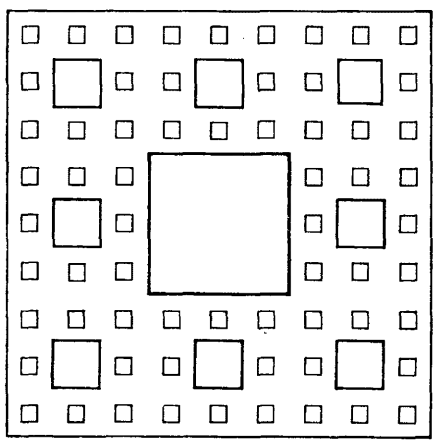
## I. Teoria krzywych i continuów

Kiedy Sierpiński rozpoczynał pracę naukową, krzywe płaskie definiowano dwojako i nierównoważnie: *krzywą cantorowską* nazywano continuum płaskie mające puste wnętrze, a *krzywą jordanowską* — continuum płaskie będące ciągłym obrazem odcinka $[0, 1]$. Obie te definicje, początkowo uznane za trafne, zostały z czasem zakwestionowane jako niezgodne z intuicją: do krzywych jordanowskich niespodziewanie przyszło zaliczyć kwadrat (Peano 1890, inna konstrukcja w pracy Sierpińskiego [51, 1912]), a wśród krzywych cantorowskich znaleziono krzywą nie zawierającą łuków, tzn. zbiorów homeomorficznych z odcinkiem $[0, 1]$ (Janiszewski, 1912).

Dwie podstawowe prace Sierpińskiego dotyczące krzywych ([90, 1916] (anons [76, 1915]) i [84, 1916] (anons [81, 1916])) stanowiły w intencji autora dalszy ciąg ataku na definicję krzywej. Sierpiński chciał wykazać, że również krzywe, które są jednocześnie cantorowskie i jordanowskie, mają paradoksalne własności, i podał w tym celu dwa sławne przykłady:

przykład krzywej cantorowskiej i jordanowskiej, której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia, tzn. punktem, z którego wychodzą trzy łuki mające jedynie wspólny początek, oraz przykład uniwersalnej krzywej cantorowskiej, tj. krzywej cantorowskiej (i jordanowskiej), która zawiera topologiczną kopię każdej krzywej cantorowskiej. Rysunki tych krzywych, czy raczej ich przybliżeń, znane są chyba każdemu:





Żeby wierzchołki trójkąta były także punktami rozgałęzienia, Sierpiński skleił sześć egzemplarzy swojej krzywej, umieszczonych w sześcioboku foremnym.

Dalszy rozwój topologii dowiódł, że krzywej płaskiej nie można zdefiniować trafniej niż przez połączenie warunków Cantora i Jordana (we współczesnej terminologii są to krzywe lokalnie spójne). Zjawiska, które Sierpińskiemu i jego współczesnym wydawały się paradoksalne, poddane dalszym badaniom zaowocowały szeregiem twierdzeń dotyczących rzędu punktów krzywej i rozmaitych przestrzeni uniwersalnych. Dodajmy jeszcze dla ścisłości historycznej, że krzywa uniwersalna Sierpińskiego była badana w roku 1915 przez Mazurkiewicza, który wykazał, że wszystkie jej punkty są punktami nieskończonego rozgałęzienia.

Kontynuując badanie krzywych Sierpiński podał w pracy [94, 1917] (wersja polska [91, 1916]) charakteryzację łuku jako continuum $X$ o tej własności, że dla każdego punktu $x \in X$, różnego od dwu ustalonych punktów $a, b \in X$, przestrzeń $X$ można przedstawić w postaci sumy zbiorów domkniętych $A$ i $B$, zawierających odpowiednio punkty $a$ i $b$ i spełniających warunek $A \cap B = \{x\}$. Podobną charakteryzację łuków płaskich podał Lennes w roku 1911, na dowolne łuki uogólnili ją, poza Sierpińskim, Straszewicz (1918) i Moore (1920).

Główne wyniki Sierpińskiego w teorii continuów — to dwa znakomite twierdzenia dowodzone obecnie we wszystkich niemal podręcznikach topologii, a mianowicie charakteryzacja obrazów ciągłych odcinka $[0, 1]$, tzn. continuów lokalnie spójnych, jako tych continuów, które przy każdym $\varepsilon > 0$ można przedstawić w postaci sumy skończenie wielu continuów o średnicy mniejszej niż $\varepsilon$ (zob. [129, 1920]), oraz twierdzenie o nierozkładalności continuów na przeliczalnie wiele parami rozłącznych niepustych zbiorów domkniętych (zob. [115, 1918]).

## II. Zbiory „niespójne w wysokim stopniu". Teoria wymiaru

Zainteresowanie Sierpińskiego zbiorami „bardzo niespójnymi" obudził, jak można sądzić, podany w roku 1913 przez Mazurkiewicza rozkład płaszczyzny na dwa zbiory *punktokształtne* (tj. nie zawierające nietrywialnych continuów; pojęcie to pochodzi od Janiszewskiego). Podobnym rozkładom poświęcił Sierpiński prace [63, 1913], [125, 1920] i [163, 1922]. W pierwszej z nich podał prostą konstrukcję takiego rozkładu, a w drugiej wykazał, że dopełnienie płaskiego zbioru punktokształtnego jest spójne (w [145, 1921] wynik ten uogólnił na zbiory leżące w dowolnych przestrzeniach euklidesowych) oraz — w notce — pokazał, w jaki sposób za pomocą pewnika wyboru można rozłożyć płaszczyznę na dwa zbiory, z których żaden nie zawiera zbioru doskonałego, a więc tym bardziej continuum. W ten sposób w rozważaniach topologicznych pojawiły się po raz pierwszy *zbiory Bernsteina* (Bernstein określił w roku 1908 podobny rozkład prostej), używane do dzisiaj w bardzo wielu konstrukcjach.

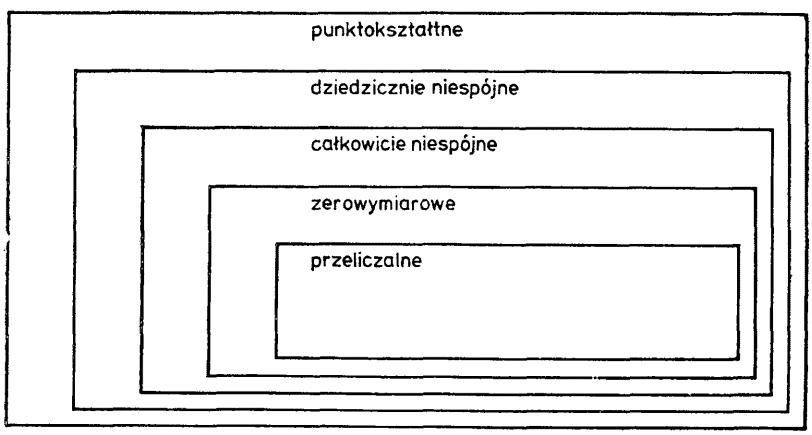
Dla Sierpińskiego podobnie brutalne rozwiązanie zagadnienia było tylko ciekawostką. Interesowały go rozkłady efektywne i to na zbiory możliwie niskiej klasy borelowskiej. Takim właśnie rozkładom poświęcona jest wspólna z Kuratowskim praca [163, 1922], w której podano rozkład płaszczyzny na dwa zbiory punktokształtne, z których jeden jest iloczynem zbioru $F_\sigma$ i zbioru $G_\delta$ a drugi sumą $F_\sigma$ i $G_\delta$, oraz udowodniono, że z punktu widzenia teorii zbiorów borelowskich jest to najprostszy z możliwych przykładów. Ostatnia praca zasługuje jednak na uwagę przede wszystkim ze względu na zastosowaną w niej metodę. Chyba właśnie w tej pracy użyto po raz pierwszy wykresów funkcji do konstrukcji osobliwych przestrzeni topologicznych; chwyt ten stosowano później niejednokrotnie.

Do zbiorów „bardzo niespójnych" zaliczają się oczywiście zbiory przeliczalne. Tym ostatnim Sierpiński poświęcił dwie ważne prace. W [126, 1920] (anons w [80, 1915]) wykazał, że każda przeliczalna przestrzeń w sobie gęsta jest homeomorficzna ze zbiorem liczb wymiernych,

a w [127, 1920], wspólnie z Mazurkiewiczem, przeprowadził pełną klasyfikację przeliczalnych przestrzeni zwartych, które scharakteryzował topologicznie jako pewne zbiory liczb porządkowych przeliczalnych.

W pracy [145, 1921] Sierpiński przeprowadził klasyfikację przestrzeni leżących pomiędzy zbiorami przeliczalnymi a zbiorami punktokształtnymi. Rozpatrzył zdefiniowane w roku 1914 przez Hausdorffa przestrzenie *dziedzicznie niespójne* (tj. nie zawierające nietrywialnych podzbiorów spójnych) i wprowadził dwie dalsze klasy przestrzeni „bardzo niespójnych", a mianowicie przestrzenie *całkowicie niespójne* (tj. takie, w których każdą parę punktów można oddzielić zbiorami domknięto-otwartymi) i przestrzenie *zerowymiarowe* (tj. takie, w których punkty można oddzielać od zbiorów domkniętych zbiorami domknięto-otwartymi). Wprowadzone przez siebie pojęcia nazywał oczywiście inaczej, w roku 1920 topologiczne pojęcie wymiaru jeszcze nie było znane.

Sierpiński wykazał, że wszystkie rozpatrywane przez niego klasy są różne. Podał mianowicie przykład przestrzeni całkowicie niespójnej, która nie jest zerowymiarowa, oraz przykład przestrzeni dziedzicznie niespójnej, która nie jest całkowicie niespójna (ta ostatnia jest zarazem pierwszym przykładem przestrzeni słabo jednowymiarowej); istnienie przestrzeni punktokształtnych, które nie są dziedzicznie niespójne, jest konsekwencją wspomnianego już twierdzenia o spójności dopełnień płaskich zbiorów punktokształtnych.




Teorię wymiaru wyprzedził Sierpiński również w pracy [154, 1922], gdzie wykazał, że każdy podzbiór brzegowy przestrzeni euklidesowej $R^n$ jest homeomorficzny z pewnym zbiorem nigdziegęstym leżącym w $R^n$. Z dowodu wynika, że domknięcie owego zbioru nigdziegęstego może się składać wyłącznie z punktów mających co najwyżej $n-1$ współrzędnych wymiernych. A zatem Sierpiński w istocie scharakteryzował podzbiory

$n$-wymiarowe przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$ jako zbiory o niepustym wnętrzu. Urysohn i Menger otrzymali tę nietrywialną charakteryzację nieco później.

Innym ważnym wynikiem Sierpińskiego należącym do teorii wymiaru jest twierdzenie z pracy [232, 1928], głoszące, że każdy niepusty podzbiór domknięty przestrzeni zerowymiarowej jest jej retraktem. Ten nietrudny, ale ładny wynik okazał się bardzo pożyteczny.

Do teorii wymiaru wypada także zaliczyć cykl pięciu prac [197, 1926], [251, 1929], [254, 1929], [256, 1929] i [305, 1932] poświęconych pojęciu homoi. To wprowadzone w roku 1910 przez Fréchet pojęcie umarło już, całkowicie zresztą zasłużenie, śmiercią naturalną i o pracach mu poświęconych nie warto by było zapewne wspominać, gdyby nie wynikała z nich pocieszająca nauka, że przykłady odnoszące się nawet do niecieka-wego pojęcia mogą być interesujące i płodne. W pierwszej ze wspomnianych prac, wspólnej z Kuratowskim, podano właśnie taki interesujący przykład, w którym zbiory Bernsteina pojawiły się po raz pierwszy w głównym tekście pracy — a nie jak przedtem w notce — i już bez żadnych zastrzeżeń.

## III. Ogólne własności topologiczne

Na początku naszego stulecia podano kilka nierównoważnych definicji „abstrakcyjnej przestrzeni". Obok pojęć bardzo udanych, jak pojęcie przestrzeni metrycznej (Fréchet 1906 r.), przestrzeni Hausdorffa (Hausdorff 1914 r.) i przestrzeni topologicznej (Kuratowski 1922 r.), pojawiły się wtedy pojęcia znacznie mniej interesujące, jak np. pochodzące także od Fréchet pojęcie $\mathscr{L}$-przestrzeni. To ostatnie, trudno dziś powiedzieć dlaczego, zainteresowało matematyków polskich, którzy poświęcili mu kilka prac. Sierpiński i Kuratowski scharakteryzowali w [147, 1921] zwartość i lindelöfowskość takich przestrzeni, a sam Sierpiński podał w [148, 1921] bardzo ładną charakteryzację ich dziedzicznej ośrodkowości i dziedzicznej lindelöfowskości w terminach wstępujących i zstępujących pozaskończonych ciągów zbiorów domkniętych.

Dalsze ważne ogólnotopologiczne wyniki Sierpińskiego to:

(1) charakteryzacja zwartości przez scentrowane rodziny zbiorów domkniętych ([108, 1918]), odkryta niezależnie od anonsu Riesza z 1908 r.

(2) podana wspólnie z Kuratowskim charakteryzacja zbioru lokalnie domkniętego jako różnicy dwóch zbiorów domkniętych ([150, 1921]);

(3) dowód niezmienniczości własności Baire'a w węższym sensie w zakresie przestrzeni zupełnych ([171, 1923]);

(4) charakteryzacja topologicznej zupełności przestrzeni metrycznych ośrodkowych ([187, 1924]);

(5) dowód niezmienniczości pojęcia topologicznej zupełności przestrzeni metrycznych ośrodkowych przy przekształceniach otwartych ([283, 1930]).

Ten ostatni wynik został później uogólniony przez Hausdorffa na dowolne przestrzenie metryczne.

Na uwagę zasługują także dwie późne, już powojenne, prace [493, 1945] i [494, 1945] dotyczące przestrzeni metrycznych uniwersalnych. W pierwszej z nich Sierpiński podał nowy dowód twierdzenia Bąnacha–Mazura o metrycznej uniwersalności przestrzeni funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1]$ w klasie przestrzeni metrycznych ośrodkowych, a w drugiej wykazał m. in., że z uogólnionej hipotezy continuum wynika istnienie dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ przestrzeni metrycznie uniwersalnej w klasie przestrzeni metrycznych mocy $\mathfrak{m}$.

---

Przeglądając topologiczną spuściznę Wacława Sierpińskiego natrafia się często na prace stanowiące rozwiązanie najrozmaitszych problemów — własnych albo cudzych. Wśród tych problemów są trudniejsze i łatwiejsze, ale wszystkie dadzą się prosto sformułować i są — żeby użyć nieprecyzyjnego, ale wygodnego i nie pozbawionego treści pojęcia — naturalne. Wydaje się, że ciekawość naukowa była jednym z głównych bodźców i jedną z głównych cech Wacława Sierpińskiego. Szła z nią w parze zachowana do późnego wieku świeżość i spontaniczność myślenia, które skłaniały go do zajęcia się każdym ciekawym pytaniem, które mu się nasunęło czy które mu zadano. Ot choćby takim: kiedy podzbiór linii prostej typu $F_\sigma$ można przedstawić w postaci sumy przeliczalnie wielu rozłącznych zbiorów domkniętych? Okazuje się, że wtedy i tylko wtedy, kiedy wraz z każdym odcinkiem otwartym zawiera on jego końce. „Dowód tego twierdzenia jest trudniejszy niż można by oczekiwać" pisze Sierpiński i podaje trzystronicowe rozumowanie ([257, 1929]). Może tak właśnie powinno się uprawiać matematykę.

---

A. Schinzel (Warszawa)

## Prace Wacława Sierpińskiego z teorii liczb

Teorią liczb zajmował się Sierpiński w pierwszym okresie swej twórczości, w latach 1904–1911; jego ówczesne prace dotyczyły analitycznej teorii liczb i teorii aproksymacji diofantycznych. Powrócił do teorii liczb w ostatnim okresie twórczości, w latach 1947–1969, i zajął się elementarną