(5) dowód niezmienniczości pojęcia topologicznej zupełności przestrzeni metrycznych ośrodkowych przy przekształceniach otwartych ([283, 1930]).

Ten ostatni wynik został później uogólniony przez Hausdorffa na dowolne przestrzenie metryczne.

Na uwagę zasługują także dwie późne, już powojenne, prace [493, 1945] i [494, 1945] dotyczące przestrzeni metrycznych uniwersalnych. W pierwszej z nich Sierpiński podał nowy dowód twierdzenia Bąnacha–Mazura o metrycznej uniwersalności przestrzeni funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1]$ w klasie przestrzeni metrycznych ośrodkowych, a w drugiej wykazał m. in., że z uogólnionej hipotezy continuum wynika istnienie dla każdej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ przestrzeni metrycznie uniwersalnej w klasie przestrzeni metrycznych mocy $\mathfrak{m}$.

Przeglądając topologiczną spuściznę Wacława Sierpińskiego natrafia się często na prace stanowiące rozwiązanie najrozmaitszych problemów — własnych albo cudzych. Wśród tych problemów są trudniejsze i łatwiejsze, ale wszystkie dadzą się prosto sformułować i są — żeby użyć nieprecyzyjnego, ale wygodnego i nie pozbawionego treści pojęcia — naturalne. Wydaje się, że ciekawość naukowa była jednym z głównych bodźców i jedną z głównych cech Wacława Sierpińskiego. Szła z nią w parze zachowana do późnego wieku świeżość i spontaniczność myślenia, które skłaniały go do zajęcia się każdym ciekawym pytaniem, które mu się nasunęło czy które mu zadano. Ot choćby takim: kiedy podzbiór linii prostej typu F_σ można przedstawić w postaci sumy przeliczalnie wielu rozłącznych zbiorów domkniętych? Okazuje się, że wtedy i tylko wtedy, kiedy wraz z każdym odcinkiem otwartym zawiera on jego końce. „Dowód tego twierdzenia jest trudniejszy niż można by oczekiwać" pisze Sierpiński i podaje trzystronicowe rozumowanie ([257, 1929]). Może tak właśnie powinno się uprawiać matematykę.

A. Schinzel (Warszawa)

Prace Wacława Sierpińskiego z teorii liczb

Teorią liczb zajmował się Sierpiński w pierwszym okresie swej twórczości, w latach 1904–1911; jego ówczesne prace dotyczyły analitycznej teorii liczb i teorii aproksymacji diofantycznych. Powrócił do teorii liczb w ostatnim okresie twórczości, w latach 1947–1969, i zajął się elementarną

teorią liczb. Poza tymi okresami opublikował tylko dwie prace z teorii liczb (między 1917 r. a 1920 r.), należące tematycznie po jednej do każdego okresu. Dokonamy krótkiego przeglądu prac z tych trzech dziedzin.

Prace z analitycznej teorii liczb powstały pod wpływem Woronoja, którego Sierpiński był uczniem. Pierwsza praca [*1*] dotyczy liczby punktów kratowych w kole. Niech $A(x)$ będzie liczbą tych punktów w kole $u^2+v^2 \leqslant x$. Stosując geometryczną metodę Woronoja Sierpiński dowiódł, że

$$R(x) = A(x) - \pi x = O(x^{1/3}),$$

co było pierwszym ulepszeniem klasycznego wyniku Gaussa $R(x) = O(x^{1/2})$. 7 lat później E. Landau [8] podał nowy dowód twierdzenia Sierpińskiego. Przedstawiając historię tego zagadnienia Landau napisał we wstępie do swej pracy słowa następujące: *W tym kierunku pan Sierpiński w 1906 r. bardzo rozszerzył granice wiedzy; w niniejszej pracy zamierzam dać nowy dowód twierdzenia Sierpińskiego, którego sformułowanie z pewnością znane jest niewielu matematykom i którego dowód liczący 40 stron, napisany po polsku, przeczytali na pewno tylko bardzo nieliczni. Tylko jednej własności koła chcę tutaj dowieść, tkwi ona jednak tak głęboko, że ponieważ, tak jak i pan Sierpiński, pozostaję na gruncie analizy rzeczywistej, czytelnik nie może oczekiwać krótkiego dowodu.*

Dziś twierdzenia Sierpińskiego dowodzi się krótko za pomocą funkcji Bessela (por. Landau [9]), lecz kres dolny ϑ wykładników ν takich, że $R(x) = O(x^\nu)$ wciąż nie jest znany. J. G. van der Corput pierwszy dowiódł w 1923 r., że $\vartheta < \frac{1}{3}$. Ostrzejsze oszacowania otrzymali kolejno A. Walfisz, L. W. Nieland, E. C. Titchmarsh, L. K. Hua i J. R. Chen [2]. Ten ostatni dowiódł, że $\vartheta \leqslant \frac{12}{37}$. Nowa technika wprowadzona przez Kolesnika [7] rokuje nadzieje na $\vartheta \leqslant 35/108$. *Dodane w korekcie*: Nadzieje się spełniły (A. Ivić, Tagungsbericht 41/1982, Math. Forschungsistitut Oberwolfach, str. 10).

Praca Sierpińskiego o punktach kratowych w kole wiąże się tematycznie z jego dysertacją kandydacką. Ta ostatnia, wykonana pod kierunkiem Woronoja i nagrodzona przez Uniwersytet Warszawski złotym medalem, dotyczyła sumy

$$\sum_{n^2+m^2 \leqslant x} f(n^2+m^2),$$

gdzie f jest dowolną funkcją arytmetyczną. Liczbę $A(x)$ punktów kratowych w kole otrzymuje się przyjmując $f(k) = 1$. Sierpiński [*2*] badał wskazaną sumę używając znalezionej przez siebie tożsamości

$$\sum_{n^2+m^2 \leqslant x} f(n^2+m^2) = 4 \sum_{\nu=0}^{(x-1)/2} (-1)^\nu \sum_{\mu > 0}^{\mu \leqslant x/(2\nu+1)} f\big((2\nu+1)\mu\big).$$

Tożsamość ta stanowi uogólnienie znanej tożsamości Liouville'a(1)

$$\mathrm{E}\sqrt{x}+\mathrm{E}\sqrt{x-1^2}+\mathrm{E}\sqrt{x-2^2}+\ldots=\mathrm{E}\frac{x}{1}-\mathrm{E}\frac{x}{3}+\mathrm{E}\frac{x}{5}-\ldots$$

Prace Sierpińskiego z aproksymacji diofantycznych pochodzą z lat 1909–1910. Jedna z nich dotyczy klasycznego twierdzenia Dirichleta. Zgodnie z tym twierdzeniem dla każdej liczby rzeczywistej x i liczby naturalnej n istnieje taki ułamek p/q, że

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{nq} \qquad \text{oraz} \qquad 1\leqslant q\leqslant n.$$

Sierpiński dowiódł [3], że dla danych x i n istnieją co najwyżej dwa takie ułamki.

Inne prace [4], [6] dotyczące aproksymacji liniowych jednorodnych zawierają dowód wzoru

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(kx-\mathrm{E}kx)\begin{cases}<\frac{1}{2} & \text{dla } x \text{ wymiernych},\\ =\frac{1}{2} & \text{dla } x \text{ niewymiernych}.\end{cases}$$

Naturalnym uogólnieniem tego wzoru jest wzór słuszny dla wszystkich x niewymiernych

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(kx+y-\mathrm{E}(kx+y)\big)=\tfrac{1}{2} \qquad (y \text{ dowolne}). \tag{1}$$

Udowodniwszy ten wzór w [5] Sierpiński wyprowadza zeń równomierne rozmieszczenie ciągu $kx \bmod 1$. Przytoczmy to proste rozumowanie. Niech a i b będą dwiema liczbami rzeczywistymi takimi, że $0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$. Łatwo widać, że wyrażenie

$$\mathrm{E}(kx-a)-\mathrm{E}(kx-b)$$

równe jest 1 lub 0 zależnie od tego, czy $r_k=kx-\mathrm{E}kx$ spełnia warunki

$$0\leqslant r_k<b \tag{2}$$

czy też nie. A zatem suma

$$l_n(a,b)=\sum_{k=1}^{n}\{\mathrm{E}(kx-a)-\mathrm{E}(kx-b)\}$$

(1) Tu i dalej $\mathrm{E}x$ oznacza część całkowitą liczby x.

przedstawia liczbę liczb r_k spełniających warunek (2). Otóż zgodnie z wzorem (1)

$$\lim_{n=\infty} \frac{l_n(a, b)}{n} = b - a,$$

co wyraża równomierne rozmieszczenie ciągu $kx \bmod 1$.

Parę miesięcy przed Sierpińskim twierdzenie o równomiernym rozmieszczeniu ciągu kx udowodnił matematyk łotewski P. Bohl, zaś parę miesięcy później ponownie Weyl. W 1916 r. Weyl ogłosił swoją wielką rozprawę o równomiernym rozmieszczeniu i ta przyćmiła wszystkie prace wcześniejsze (patrz Koksma [6], rozdział VIII).

Do teorii aproksymacji diofantycznych należy praca [8] z 1917 r. poświęcona liczbom absolutnie normalnym. Liczba rzeczywista nazywa się *normalną* przy zasadzie q, jeżeli w jej rozwinięciu przy zasadzie q wszystkie cyfry występują z jednakową częstością.

Liczba normalna przy wszystkich zasadach $q \geqslant 2$ nazywa się *absolutnie normalną*. Pojęcie to zostało wprowadzone przez E. Borela, który dowiódł, że prawie wszystkie liczby rzeczywiste są absolutnie normalne. Borel [1] napisał, że we współczesnym stanie wiedzy efektywne określenie liczby absolutnie normalnej wydaje się jednym z najtrudniejszych zagadnień. We wzmiankowanej pracy [8] Sierpiński zdefiniował pewną liczbę absolutnie normalną jako kres dolny pewnego dobrze określonego zbioru liczb.

Z pracami z teorii aproksymacji diofantycznych wiążą się prace o algorytmach służących do rozwijania liczb rzeczywistych w ciągi i iloczyny nieskończone. W szczególności w pracy [7] ogłoszonej w 1911 r. Sierpiński udowodnił istnienie i jednoznaczność rozwinięcia dowolnej liczby niewymiernej dodatniej w szereg postaci

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k},$$

gdzie liczby naturalne $a_1, a_2, \dots$ tworzą ciąg niemalejący. Szeregi takie były następnie badane przez wielu autorów, którzy nazywali je szeregami Engela ze względu na pracę Engela [3] na ich temat, która powstała jednak w dwa lata później. Wprawdzie szeregi podobnego typu były jeszcze w XVIII wieku rozpatrywane przez Lamberta, ale żądał on tylko, aby liczby a_i były całkowite i $|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \dots$, tak więc rozważane szeregi słusznie należałoby wiązać z nazwiskiem Sierpińskiego.

Pozostały do omówienia prace z elementarnej teorii liczb. Dotyczyły one podzielności, kongruencji, równań diofantycznych, funkcji arytmetycznych, liczb pierwszych i pewnych zagadnień addytywnej teorii liczb.

Prace o funkcjach arytmetycznych dotyczyły z reguły funkcji specjalnie ważnych, takich jak funkcja Eulera φ lub suma dzielników, nie zaś ogólnej teorii. Praca [*11*] zawiera na przykład dowód, że równanie $\varphi(x+k) = \varphi(x)$ ma przy każdym naturalnym k co najmniej jedno rozwiązanie; do dziś nie wiadomo, czy ma co najmniej dwa. Inny nierozwiązany problem dotyczący funkcji φ postawiony przez Sierpińskiego to pytanie, czy każda dostatecznie duża liczba naturalna daje się przedstawić w postaci $n-\varphi(n)$. Bardziej analityczny charakter ma praca [*10*], w której udowodniono, że

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\min\{\varphi(n-1), \varphi(n+1)\}}{\varphi(n)} = \infty,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\max\{\varphi(n-1), \varphi(n+1)\}}{\varphi(n)} = 0.$$

Temat stosunku wartości przyjmowanych przez funkcję arytmetyczną w punktach sąsiednich został podjęty przez innych autorów, m. in. przez Erdösa [4].

Liczne prace Sierpińskiego dotyczyły liczb pierwszych. Badał między innymi postać rozwinięcia dziesiętnego liczby pierwszej i dowiódł w [*14*], że dla każdego ciągu $k+l$ cyfr $b_1, \ldots, b_{k+l}$, gdzie $b_1 \neq 0$ i $(b_{k+l}, 10) = 1$, istnieje liczba pierwsza, której rozwinięcie dziesiętne rozpoczyna się od $b_1, \ldots, b_k$ i kończy na $b_{k+1}, \ldots, b_{k+l}$. Rozważał również sumę cyfr n-tej liczby pierwszej i oznaczając ją przez S_n postawił w [*16*] pytanie, czy dla nieskończenie wielu n, $S_n > S_{n+1}$, co zostało pozytywnie rozstrzygnięte przez Erdösa [5].

Interesował się ciągiem d_n różnic między kolejnymi liczbami pierwszymi i dowiódł [*9*], że $\limsup_{n\to\infty} \min\{d_n, d_{n+1}\} = \infty$. Ten wynik był wielokrotnie wzmacniany i uogólniany, aż do najnowszej wybitnej pracy H. Maiera [11]. Przypuszczenie Sierpińskiego sformułowane w [*13*], że każdy wiersz tablicy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n^2-n+1 & & \ldots & n^2 \end{bmatrix}$$

przy dowolnym naturalnym $n > 1$ zawiera liczbę pierwszą, stanowi daleko idące uogólnienie tzw. postulatu Bertranda.

Sierpiński interesował się również przedstawialnością liczb pierwszych przez wielomiany i dowiódł [*17*], że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna a, że x^2+a przedstawia więcej niż n liczb pierwszych. Rozważał również rozmieszczenie liczb pierwszych w ciągach o wzroście

wykładniczym i dowiódł istnienia nieskończenie wielu takich liczb naturalnych k, że wszystkie wyrazy ciągu $k\cdot 2^n+1$ są złożone. Dowód ten podany w [*15*] jest efektywny, ale liczby k zeń otrzymane są rzędu setek tysięcy. Dotychczas nie wiadomo, jaka jest najmniejsza liczba k o wymienionej własności.

Do addytywnej teorii liczb można zaliczyć pracę [*12*] o przedstawieniach liczb wymiernych przez sumy odwrotności liczb naturalnych. Odwrotności takie nazwał Sierpiński ułamkami prostymi. Według przypuszczenia Erdösa i Strausa ułamek $4/n$ jest dla $n>1$ sumą trzech ułamków prostych. Sierpiński wypowiedział analogiczne przypuszczenie dla ułamków $5/n$, a B. M. Stewart [12] sprawdził je dla wszystkich $n<10^9$. Rozkładom liczb wymiernych na ułamki proste (można by to nazwać problemem Waringa dla wykładnika -1) poświęcona jest książeczka [*VI*].

Inne małe monografie Sierpińskiego dotyczą trójkątów pitagorejskich [*III*], równań diofantycznych [*V*], liczb pierwszych [*X*] i liczb trójkątnych [*XI*]. Doczekały się one wielu przekładów na języki obce.

Trzy większe dzieła Sierpińskiego [*I*], [*VIII*] i [*XIII*] zajmują w obszernej literaturze przedmiotu miejsce odrębne. Traktowane jako podręczniki zawierają stosunkowo ubogi zakres materiału, mianowicie elementy teorii liczb oraz najbardziej przystępne części jej bardziej zaawansowanych działów (nierówności Czebyszewa w teorii rozmieszczenia liczb pierwszych, arytmetyka ciał kwadratowych, podstawy teorii form kwadratowych dwójkowych). Natomiast, w przyjętych przez autora ramach, dzieła te mają charakter encyklopedyczny, wiele rezultatów specjalnych przytoczonych jest bez dowodów. Jak pisze W. J. LeVeque [10] w recenzji książki [*XIII*]: *To jest właśnie źródło, do którego należy sięgać, aby dowiedzieć się, co wiadomo na temat godnej uwagi rozmaitości zagadnień w elementarnej teorii liczb, które przyciągały uwagę przez lata. Styl jest żywy i autor jest mistrzem w swym przedmiocie.*

Cytowane prace Sierpińskiego

[*1*] *O pewnym zagadnieniu z rachunku funkcyj asymptotycznych*, Prace Mat.-Fiz. 17 (1966), 77–118.

[*2*] *O sumowaniu szeregu* $\Sigma\tau(n)f(n)$, *gdzie* $\tau(n)$ *oznacza liczbę rozkładów liczby* n *na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych*, ibidem 18 (1908), 1–59.

[*3*] *O pewnym twierdzeniu z teorii przybliżeń wymiernych*, Sprawozd. Tow. Nauk. Warsz. Wydz. III. 2 (1909), 331–334.

[*4*] *Pewne twierdzenie o liczbach niewymiernych*, Rozprawy Wydz. Mat. Przyr. Akad. Um. 49 (1909), 433–444.

[*5*] *O wartości asymptotycznej pewnej sumy*, ibidem 50 (1910), 1–10.

[*6*] *O pewnej własności charakterystycznej liczb wymiernych*, Prace Mat.-Fiz. 21 (1910), 1–6.

[*7*] *O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi*, Sprawozd. Tow. Nauk. Warsz. Wydz. III. 4 (1911), 56–77.

[8] *Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre*, Bull. Soc. Math. France 45 (1917), 125–132.

[9] *Remarque sur la répartition des nombres premiers*, Colloq. Math. 1 (1948), 193–194.

[10] (z A. Schinzlem), *Sur quelques propriétés des fonctions numériques $\varphi(n)$ et $\sigma(n)$*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 2 (1954), 463–466.

[11] *Sur une propriété de la fonction $\varphi(n)$*, Publ. Math. Debrecen 4 (1956), 184–185.

[12] *Sur les décompositions de nombres rationnels en fractions primaires*, Mathesis 65 (1956), 16–32.

[13] (z A. Schinzlem), *Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers*, Acta Arith. 4 (1958), 185–208, *Remarque*, ibidem 5, 253.

[14] *Sur les nombres premiers ayant des chiffres initiaux et finals donnés*, Acta Arith. 5 (1959), 265–266.

[15] *Sur un problème concernant les nombres $k2^n + 1$*, Elem. Math. 15 (1960), *Correction*, ibidem 17 (1962), 85.

[16] *Sur la somme des chiffres des nombres premiers*, Rend. Circ. Math. Palermo (2) 10 (1961), 229–232.

[17] *Les binômes $x^2 + n$ et les nombres premiers*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 33 (1964), 259–260.

Książki Sierpińskiego z teorii liczb (wykaz kompletny)

[I] *Teoria liczb*, 1 wyd., Warszawa 1914, str. XIV + 412; 2 wyd. Warszawa 1925, str. XII + 410: 3 wyd. Warszawa–Wrocław 1950, str. VI + 544.

[II] *Wstęp do teorii liczb*, 1 wyd. Lwów–Warszawa 1933, str. 72; 2 wyd. Warszawa 1965, str. 108.

[III] *Trójkąty pitagorejskie*, Warszawa 1954, str. 94.

[IV] (przy współudziale J. Łosia), *Arytmetyka teoretyczna*, 1 wyd. Warszawa 1955, str. 258; 2–5 wyd. Warszawa 1959–1969, str 273.

[V] *O rozwiązywaniu równań w liczbach całkowitych*, Warszawa 1956, str. 109.

[VI] *O rozkładach liczb wymiernych na ułamki proste*, Warszawa 1957, str. 110.

[VII] *Czym się zajmuje teoria liczb*, Warszawa 1957, str. 138.

[VIII] *Teoria liczb*, Część II, Warszawa 1959, str. 482.

[IX] *O stu prostych ale trudnych zagadnieniach arytmetyki. Z pogranicza geometrii i arytmetyki*, Warszawa 1959, str. 80.

[X] *Co wiemy a czego nie wiemy o liczbach pierwszych*, Warszawa 1961.

[XI] *Liczby trójkątne*, Warszawa 1962, str. 67.

[XII] *200 zadań z elementarnej teorii liczb*, Warszawa 1964, str. 140, przekład angielski rozszerzony, *250 problems in elementary number theory*, Warszawa–New York 1970, str. VII + 125.

[XIII] *Elementary theory of numbers*, Warszawa 1964, str. 480.

Cytowane prace innych autorów

[1] E. Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rend. Circ. Mat. Palermo 27 (1909), 247–271.

[2] J.R. Chen, *The lattice points in a circle*, Sci. Sinica 12 (1963), 633–649.

[3] F. Engel, *Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen*, Verhandl. 52. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Marburg vom 29. September bis 3. Oktober 1913, Leipzig 1914, 190–191.

[4] P. Erdös and A. Schinzel, *Distribution of the values of a class of arithmetical functions*, Acta Arith. 6 (1961), 393–413.
[5] — , *On a problem of Sierpiński*, ibidem 11 (1965), 189–192.
[6] J.F. Koksma, *Diophantische Approximationen*, Berlin 1935.
[7] G. Kolesnik, *On the order of* $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ *and* $\Delta(R)$, Pacific J. Math. 98 (1982), 107–122.
[8] E. Landau, *Über die Zerlegung der Zahlen in zwei Quadrate*, Ann. Math. Pura Appl. (3) 20 (1913), 1–28.
[9] — , *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. II, Leipzig 1927.
[10] W. J. LeVeque, *Review of* [*XIII*], Mathematical Reviews 31, No. 116 (1966).
[11] H. Maier, *Chains of large gaps between consecutive primes*, Adv. Math. 39 (1981), 257–269.
[12] B. M. Stewart, *Theory of numbers*, New York–London 1964.