ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVI (1984)

wmptm 1897

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ANDRZEJ PELC (Warszawa)

Teoria miary z punktu widzenia teorii mnogości

0. Wstęp. Omawiana w artykule problematyka nie stanowi wyodrębnionej dyscypliny matematycznej i próżno jej szukać pod osobnym numerem w klasyfikacji AMS. Jest to raczej pewna grupa zagadnień należących do teorii miary, topologii metrycznej i teorii mnogości, zebranych i rozpatrywanych z punktu widzenia podstaw matematyki. Nie może być przy tym mowy o ścisłości kryteriów klasyfikujących omawiane problemy; w ich doborze dużą rolę odegrały osobiste zainteresowania autora.

Wśród rozważanych zagadnień można wyróżnić dwa rodzaje. Pierwszy z nich to problemy niezależne od aksjomatyki teorii mnogości. Bez względu na to, z jakiej dyscypliny matematycznej pochodzą, automatycznie niejako wchodzą w zakres kompetencji podstaw matematyki. Jest to spowodowane między innymi tym, że dla dowodu niezależności jakiegoś zdania trzeba zwykle zbudować dwa modele teorii mnogości, jeden spełniający dane zdanie, a drugi spełniający jego zaprzeczenie. Na ogół konstrukcja takich modeli wymaga stosowania techniki forcingu, stosunkowo mało znanej ogółowi matematyków. Jako przykład pytania niezależnego od teorii mnogości, a pochodzącego z teorii miary i topologii prostej rzeczywistej, służyć może zagadnienie addytywności miary Lebesgue'a i kategorii Baire'a omawiane w trzecim rozdziale.

Drugi rodzaj rozważanych przez nas problemów pochodzi z samej teorii mnogości. Swe szczególne miejsce w tym dziale matematyki zawdzięczają one temu, iż zostały bezpośrednio zainspirowane przez pytania płynące z teorii miary. Klasycznym przykładem jest tu tzw. ogólny problem miary, któremu poświęcony został rozdział pierwszy.

Rolę, jaką odgrywa w teorii miary rozważana przez nas problematyka, określić można obejmując ją umownie terminem „podstawy teorii miary". Słowo „podstawy" jest tu rozumiane w takim sensie, w jakim używano go dawniej mówiąc o podstawach matematyki, które z założenia miały wyjaśniać budowę teorii matematycznych i badać od strony logicznej występujące w nich pojęcia. W ostatnich latach dyscyplina ta oderwała

się w dużym stopniu od reszty matematyki, tworząc i rozwiązując swoje własne problemy.

Co się zaś tyczy podstaw teorii miary, to chcielibyśmy przekonać Czytelnika, że istotnie wyjaśniają one pewne zagadnienia i badają pojęcia tworzone lub inspirowane przez teorię miary, lecz pozostawiane przez nią zwykle na uboczu. Jest tu na przykład miejsce na dokładną analizę obiektów patologicznych z punktu widzenia teorii miary, takich jak zbiory silnej miary zero, czy zbiory, na których istnieją miary uniwersalne (tj. zdefiniowane na wszystkich ich podzbiorach).

Łatwo podać przykłady problemów, o których nie sposób orzec, czy należą do samej teorii miary czy też do jej podstaw. Często jeden fragment rozwiązania danego zagadnienia ma charakter typowo analityczny, inny zaś wyraźnie wkracza w dziedzinę teorii mnogości. Dobrym przykładem jest tu twierdzenie Kakutaniego i Oxtoby'ego o nieośrodkowym rozszerzeniu miary Lebesgue'a, które omawiamy w drugim rozdziale.

Na koniec tych wstępnych uwag refleksja historyczna. Nie jest niczym dziwnym, że z punktu widzenia teorii mnogości ciekawe są właśnie pewne problemy z teorii miary, teorii funkcji rzeczywistych czy topologii prostej. Przeglądając prace wybitnych matematyków okresu międzywojennego, zwłaszcza zaś twórców tzw. szkoły polskiej: Banacha, Kuratowskiego, Marczewskiego, Sierpińskiego i Ulama, można stwierdzić, że fragmenty wyżej wymienionych dyscyplin stanowiły wówczas wraz z deskryptywną teorią mnogości jedną całość. Problemy dotyczące miar czy zbiorów osobliwych na prostej inspirowały pytania z abstrakcyjnej i opisowej teorii mnogości i na odwrót. Później te działy matematyki rozdzieliły się, ale, jak zobaczymy, nawet obecnie nietrudno znaleźć wspólne dla nich problemy. Nowe środki dowodowe, zupełnie nieznane kilkadziesiąt lat temu, pozwalają dziś rozwiązywać zagadnienia stawiane wówczas przez Sierpińskiego czy Banacha. Niektóre z tych starych pytań ciągle pozostają otwarte, inne, o podobnym nieraz charakterze, wyłaniają się dopiero teraz. One właśnie sprawiają, że problematyka podstaw teorii miary stanowi tak interesujące pole badawcze.

1. Ogólny problem miary. Wkrótce po pojawieniu się w matematyce pojęcia miary Lebesgue'a, skonstruowano przykłady zbiorów niemierzalnych. Najbardziej znane to zbiór Vitaliego (selektor zbioru warstw $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Q}$) i zbiór Bernsteina (przecinający każdy zbiór doskonały i nie zawierający żadnego z nich). Przyczyny, dla których zbiory te nie są mierzalne w sensie Lebesgue'a, tkwią w dwóch podstawowych własnościach tej miary: przesuwalności w przypadku zbioru Vitaliego i regularności w przypadku zbioru Bernsteina. Zaczęto się więc zastanawiać, jak należałoby zmienić, a właściwie uogólnić definicję miary, by mogła ona być określona na wszystkich podzbiorach prostej. Omawiane przykłady zbiorów niemie-

rzalnych w sensie Lebesgue'a wskazują, że trzeba oderwać miarę zarówno od struktury grupowej, jak i topologicznej zbioru liczb rzeczywistych. Musi być ona rozpatrywana po prostu jako funkcja na zbiorze bez żadnej struktury. W związku z tym naturalna wydaje się następująca definicja:

Miarą na zbiorze X nazywamy funkcję $\mathfrak{m}$ określoną na pewnym σ-ciele $\mathfrak{M}$ podzbiorów X, o wartościach w rozszerzonej półprostej nieujemnej (tj. dopuszczamy wartość $+\infty$), spełniającą następujące własności:

$$\mathfrak{m}(\{x\}) = 0 \quad \text{dla każdego } x \in X,$$

$$\mathfrak{m}(X) \neq 0,$$

$$\mathfrak{m}\Big(\bigcup_{n\in N} A_n\Big) = \sum_{n\in N} \mathfrak{m}(A_n) \quad \text{dla każdej parami rozłącznej rodziny zbiorów } \{A_n : n \in N\} \subset \mathfrak{M}.$$

Definicja ta wymaga komentarza. Założenie znikania miary na zbiorach jednoelementowych wprowadzone jest po to, by wyeliminować trywialny przypadek miar skupionych w jednym punkcie. Żądanie niezerowości miary jest oczywiste, a warunek trzeci, to σ-addytywność, najbardziej może charakterystyczna cecha miar, którą oczywiście chcemy zachować (o miarach skończenie addytywnych, zwanych w tym artykule quasi-miarami, powiemy jeszcze w dalszym ciągu).

Tak więc interesujące nas zagadnienie sprowadza się do poszukiwania na danym zbiorze X, w szczególności na zbiorze $\boldsymbol{R}$ liczb rzeczywistych, miary określonej na wszystkich jego podzbiorach, czyli tzw. *miary uniwersalnej*. Przy tak ogólnej definicji łatwo jednak o przykład trywialny: miara przyjmująca wartość 0 na zbiorach przeliczalnych i wartość ∞ na nieprzeliczalnych. Przykład ten eliminujemy przez ograniczenie się do miar, dla których zbiory o mierze nieskończonej „składają się" z niewielu zbiorów o mierze skończonej. Powiemy mianowicie, że miara jest *σ-skończona*, jeśli cała przestrzeń stanowi sumę przeliczalnej rodziny zbiorów o mierze skończonej (taka jest właśnie miara Lebesgue'a). Nietrudno zauważyć, że istnienie na zbiorze X uniwersalnej miary σ-skończonej jest równoważne istnieniu na nim uniwersalnej miary probabilistycznej (tzn. takiej, że $\mathfrak{m}(X) = 1$).

Po tym retuszu ogólny problem miary brzmi następująco: *czy na jakimkolwiek zbiorze X istnieje uniwersalna miara probabilistyczna?*

Zauważmy, że odpowiedź na to pytanie zależy wyłącznie od mocy zbioru X, ma ono zatem charakter teoriomnogościowy i może być sformułowane następująco: *czy na jakiejś liczbie kardynalnej istnieje uniwersalna miara probabilistyczna?*

Pierwszy wynik zmierzający do rozwiązania tego problemu pochodzi od Banacha i Kuratowskiego [2]. Wykazali oni, że przy założeniu hipotezy continuum nie istnieje uniwersalna miara probabilistyczna na liczbie 2^{ω} (a więc na prostej rzeczywistej).

Duży wkład w rozwiązanie ogólnego problemu miary miał Ulam [41]. Zauważył on najpierw, że jeśli $\varkappa$ jest najmniejszą liczbą kardynalną, na której istnieje uniwersalna miara probabilistyczna, to na $\varkappa$ istnieje uniwersalna probabilistyczna miara *$\varkappa$-addytywna*, tzn. taka, że suma $< \varkappa$ zbiorów miary zero jest zbiorem miary zero. Liczby, na których istnieją miary o tej własności, nazywamy *rzeczywiście mierzalnymi*. Otóż Ulam wykazał, że każda liczba $\varkappa$ rzeczywiście mierzalna jest słabo nieosiągalna (tzn. spełnia jednocześnie dwa warunki: suma rodziny mocy $< \varkappa$ zbiorów mocy $< \varkappa$ na moc $< \varkappa$ oraz nie istnieje największa liczba kardynalna mniejsza od $\varkappa$). Istnienia takich liczb nie można wykazać korzystając ze zwykłej aksjomatyki teorii mnogości z pewnikiem wyboru (ZFC).

Z rezultatu Ulama wynika, że ogólny problem miary nie może mieć na gruncie teorii mnogości pozytywnego rozwiązania. Nie jest natomiast wykluczone (choć przeważająca część specjalistów w zakresie teorii mnogości uważa to obecnie za mało prawdopodobne) twierdzenie orzekające, że liczby rzeczywiście mierzalne nie istnieją. Taki rezultat byłby z pewnością jednym z najdonioślejszych w historii teorii mnogości.

Powracając do wyników Ulama związanych z ogólnym problemem miary należy wspomnieć o jego twierdzeniu mówiącym, że *jeśli na danej liczbie $\varkappa$ istnieje uniwersalna miara probabilistyczna, to albo $\varkappa \leqslant 2^{\omega}$, albo na $\varkappa$ istnieje miara uniwersalna przyjmująca tylko wartości* 0 *lub* 1. Takie miary nazywamy *dwuwartościowymi*. Znów można wykazać, że na najmniejszej liczbie $\varkappa$, na której istnieje uniwersalna miara dwuwartościowa, istnieje uniwersalna dwuwartościowa miara $\varkappa$-addytywna. Liczby, na których istnieją takie miary, nazywają się *mierzalne*. Są one mocno nieosiągalne. (Suma $< \varkappa$ zbiorów mocy $< \varkappa$ ma moc $< \varkappa$ oraz każdy zbiór mocy $< \varkappa$ ma $< \varkappa$ podzbiorów.) Podobnie jak dla liczb słabo nieosiągalnych, istnienia tych liczb nie można udowodnić w teorii mnogości.

W świetle rezultatów Ulama interesujące było pytanie następujące. Chociaż na gruncie zwykłej teorii mnogości nie można wykazać istnienia uniwersalnej miary probabilistycznej na prostej, być może można tego dokonać przyjmując dodatkowe założenie np. istnienia liczby mierzalnej? (wierząc przy tym, rzecz jasna, że założenie takie jest niesprzeczne z aksjomatyką teorii mnogości). Nadzieje na takie połowiczne rozwiązanie pozytywne obaliło następujące twierdzenie Levy'ego i Solovaya [20]: *jeśli istnienie liczby mierzalnej jest niesprzeczne z teorią mnogości, to niesprzeczne jest z nią również istnienie liczby mierzalnej wraz z hipotezą continuum*. Jak zaś wiemy, z hipotezy continuum wynika nieistnienie uniwersalnej miary probabilistycznej na prostej.

Z drugiej jednak strony prawdziwe jest następujące twierdzenie pochodzące od Solovaya [37]: *istnienie liczby mierzalnej jest niesprzeczne z teorią mnogości wtedy i tylko wtedy, gdy niesprzeczne z teorią mnogości jest, iż liczba 2^{ω} jest rzeczywiście mierzalna*. Z twierdzenia tego i z przyto-

czonych powyżej rezultatów Ulama wynika, że poszukiwanie uniwersalnej miary probabilistycznej na prostej jest w tym samym stopniu zagrożone sprzecznością, co próba znalezienia jej na jakimkolwiek zbiorze. Pokazuje to związek ogólnego problemu miary z pierwotnie inspirującym go przypadkiem ograniczonym do zbioru liczb rzeczywistych.

Z omówionymi powyżej zagadnieniami ściśle powiązany jest pewien fragment teorii mnogości dotyczący nasycenia ideałów. Przed zreferowaniem tej problematyki wprowadzimy kilka niezbędnych definicji.

Ideałem na zbiorze X nazywamy rodzinę podzbiorów X zawierającą wszystkie zbiory jednoelementowe, nie zawierającą zbioru X oraz zamkniętą na operacje sumy i brania podzbioru. Jeśli $\varkappa$ jest liczbą kardynalną, to ideał nazywamy *$\varkappa$-zupełnym*, gdy sumy $< \varkappa$ zbiorów z ideału należą do niego, a *$\varkappa$-nasyconym*, gdy dla każdej rodziny mocy $\varkappa$ zbiorów spoza ideału, przecięcie pewnych dwóch elementów tej rodziny leży poza ideałem.

Nietrudno zauważyć, że rodzina zbiorów miary zero jest ω_1-zupełnym i ω_1-nasyconym ideałem na X, dla każdej uniwersalnej probabilistycznej miary na X. Okazuje się, że argument Ulama, iż nie można wykazać istnienia liczby rzeczywiście mierzalnej, pozwala również stwierdzić niemożność udowodnienia istnienia liczby, na której jest ideał ω_1-zupełny i ω_1-nasycony. Tak więc badanie ideałów nasyconych jest w gruncie rzeczy naturalną konsekwencją rozpatrywania miar uniwersalnych. Sytuacja jest tu w dużym stopniu wyjaśniona. Jak wykazał Solovay (por. Jech [15]), istnienie liczby $\varkappa$, na której jest ideał $\varkappa$-zupełny i λ-nasycony, gdzie $\omega_1 \leqslant \leqslant \lambda \leqslant \varkappa^+$, nie prowadzi do sprzeczności z teorią mnogości wtedy i tylko wtedy, gdy liczba mierzalna jest z tą teorią niesprzeczna. Z drugiej zaś strony, Prikry [33] udowodnił, że z istnienia liczby z tak nasyconym ideałem nie wynika nawet istnienie liczby rzeczywiście mierzalnej. Rozpatrując więc kolejno hipotezy: „istnieje liczba mierzalna", „istnieje liczba rzeczywiście mierzalna", „istnieje liczba, na której jest ideał ω_1-zupełny i ω_1-nasycony", stwierdzamy, że są to zdania coraz słabsze, których sprzeczność z teorią mnogości jest jednak „równie prawdopodobna".

Przedstawione powyżej wyniki, choć nie doprowadziły do pełnego rozwiązania ogólnego problemu miary, dały nań w każdym razie odpowiedź negatywną dla małych liczb kardynalnych. Ponieważ liczby $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\omega_5}, \ldots, \omega_{\omega_\omega}, \ldots$ itd. są mniejsze od pierwszej liczby nieosiągalnej (o ile ta istnieje), w świetle wyników Ulama mamy pewność, że na nich nie znajdziemy ani uniwersalnej miary probabilistycznej, ani nawet ideału ω_1-zupełnego i ω_1-nasyconego. Jeśli gdziekolwiek, to obiektów tych należy szukać na liczbach bardzo wielkich. Inna rzecz, że — jak wspominaliśmy — nie wiadomo, czy liczba 2^ω jest dostatecznie wielka do tego celu.

Z ogólnym problemem miary łączy się również inne zagadnienie postawione przez Ulama [42]. Skoro wiadomo, że dla małych liczb kardynal-

nych jedna miara nie wystarcza do „zmierzenia" wszystkich podzbiorów, można pytać o najmniejszą liczbę miar do tego niezbędnych. Problem Ulama brzmi następująco: niech $\varkappa$ będzie mniejsza od pierwszej liczby rzeczywiście mierzalnej (odp. mierzalnej). Jaka jest najmniejsza liczba λ, dla której istnieje rodzina miar (odp. miar dwuwartościowych) $\{\mu_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$ o tej własności, że każdy podzbiór liczby $\varkappa$ jest mierzalny względem którejś z nich? O takiej rodzinie miar będziemy skrótowo mówić, że *pokrywają liczbę* $\varkappa$.

Sam Ulam zauważył, że liczba λ nie może być skończona. Przypadek $\lambda = \omega$ został częściowo rozwiązany przez Erdösa i Alaoglu [5]. Udowodnili oni, że jeśli na $\varkappa$ nie ma ideału ω_1-zupełnego i ω_1-nasyconego, to przeliczalna ilość miar dwuwartościowych nie wystarcza do pokrycia liczby $\varkappa$. Grzegorek [8] i Prikry [34] uogólnili powyższe twierdzenie na miary probabilistyczne. Prikry [34] pokazał również, że nie można udowodnić, iż jakaś rodzina ω_1 miar probabilistycznych pokrywa liczbę ω_1. Jedyny nietrywialny wynik pozytywny na temat tego problemu pochodzi od Magidora [22] i głosi, że przy założeniu tzw. *liczby olbrzymiej* można bez sprzeczności przyjąć, iż liczbę ω_3 pokrywa pewna rodzina mocy ω miar dwuwartościowych. Pomijamy oczywiście banalną uwagę, że liczbę $\varkappa$ można pokryć za pomocą $2^\varkappa$ miar probabilistycznych.

Powyższe rezultaty nie rozwiązują problemu Ulama dla $\varkappa = 2^\omega$ nawet w przypadku $\lambda = \omega$. Ponieważ nie można wykluczyć istnienia ideału ω_1-zupełnego i ω_1-nasyconego na liczbie 2^ω, twierdzenie Erdösa i Alaoglu nie dostarcza pełnej odpowiedzi na pytanie o pokrycie prostej (czy też liczby 2^ω) przeliczalną rodziną miar. W pracy Pelca [29] pokazano, że przeliczalna rodzina probabilistycznych miar 2^ω-addytywnych nie pokrywa prostej. Wynik ten został następnie wzmocniony przez Taylora [40]. Miara na zbiorze X nazywa się *jednostajna*, jeśli każdy podzbiór mocy $< |X|$ ma miarę zero. Oczywiście miara $\varkappa$-addytywna na $\varkappa$ jest jednostajna. Taylor wykazał, że przeliczalna rodzina miar probabilistycznych jednostajnych nie pokrywa prostej. Nie wiadomo, czy założenie jednostajności można wyeliminować. Z drugiej strony, w pracy Krawczyka i Pelca [18] pokazano, korzystając z aksjomatu Martina, iż prostej nie można pokryć za pomocą $< 2^\omega$ miar dwuwartościowych jednostajnych.

Omawianie zagadnień związanych z ogólnym problemem miary zamkniemy uwagą, że jeśli w definicji miary osłabić warunek przeliczalnej addytywności zastępując go założeniem skończonej addytywności i przechodząc w ten sposób od miar do quasi-miar, to rozważany przez nas problem ma łatwe rozwiązanie pozytywne. Można bowiem bez trudu wykazać, że każda quasi-miara na zbiorze nieskończonym rozszerza się do quasi-miary uniwersalnej.

Na zakończenie niniejszego rozdziału wspomnimy jeszcze krótko o zagadnieniu rozszerzania miar. Jest ono wprawdzie luźno tylko związ-

zane z ogólnym problemem miary, jednakże zreferujemy je w tym miejscu, by w rozdziale drugim móc ukazać różnicę między sytuacją, gdy miara jest niezmiennicza, a obecną, gdy rzecz dotyczy miar na zbiorach bez żadnej struktury.

Klasyczny wynik Łosia i Marczewskiego [21] orzeka, iż jeśli na σ-ciele $\mathfrak{M}$ podzbiorów X określona jest pewna miara $\mathfrak{m}$, a zbiór $A \subset X$ nie należy do $\mathfrak{M}$, to miarę $\mathfrak{m}$ można rozszerzyć na σ-ciało generowane przez $\mathfrak{M} \cup \{A\}$. Twierdzenie to zostało poważnie wzmocnione przez Webera [43], który w szczególności wykazał, że jeśli zamiast zbioru $\{A\}$ rozważyć dowolną rodzinę $\mathscr{A}$ dobrze uporządkowaną przez inkluzję, to miarę $\mathfrak{m}$ można rozszerzyć na σ-ciało generowane przez $\mathfrak{M} \cup \mathscr{A}$. Dodajmy, iż założenia o dobrym uporządkowaniu nie można osłabić, łatwo bowiem skonstruować miarę na pewnym σ-ciele $\mathfrak{M}$ i przeliczalny łańcuch zbiorów spoza $\mathfrak{M}$, na który miary tej nie można rozszerzyć.

2. Miary niezmiennicze. W rozdziale niniejszym rozpatrywać będziemy miary na zbiorze X, z wyróżnioną grupą G bijekcji na X. Powiemy, że miara $\mathfrak{m}$ określona na σ-ciele $\mathfrak{M}$ jest *G-niezmiennicza*, jeśli $g(A) \in \mathfrak{M}$ i $\mathfrak{m}(g(A)) = \mathfrak{m}(A)$ dla $A \in \mathfrak{M}$ i $g \in G$. W przypadku, gdy X jest grupą, a G jest grupą lewych przesunięć w X, miarę G-niezmienniczą na X nazywamy po prostu niezmienniczą.

Zaczniemy od rozważenia niezmienniczej wersji ogólnego problemu miary. Dla grup działających na siebie lewymi przesunięciami ma on rozwiązanie negatywne. Harazišvili [10], a później niezależnie Erdös i Mauldin [6] udowodnili, że na żadnej grupie nie istnieje uniwersalna σ-skończona miara niezmiennicza. W związku z tym powstał problem, jaką rolę gra w tym twierdzeniu założenie o σ-skończoności. Zupełnie wyeliminować go nie można, wspomniana już bowiem miara znikająca na zbiorach przeliczalnych i przyjmująca wartość ∞ na nieprzeliczalnych jest oczywiście przesuwalna. Należy się więc ograniczyć do miar, dla których zbiory miary nieskończonej „składają się" (z bardzo wielu być może) zbiorów miary skończonej dodatniej. Trafna z tego punktu widzenia wydaje się następująca definicja: miara jest *semiregularna*, jeśli każdy zbiór miary dodatniej zawiera podzbiór miary skończonej dodatniej.

Kannan i Raju [17] postawili problem: czy istnieje uniwersalna semiregularna miara niezmiennicza na jakiejkolwiek grupie. Zagadnienie to zostało rozwiązane w pracy Pelca [30] w sposób następujący: miara taka może istnieć jedynie na grupie mocy nie mniejszej niż pierwsza liczba rzeczywiście mierzalna i istnieje na każdej grupie abelowej takiej mocy.

W związku z nieistnieniem uniwersalnych niezmienniczych miar σ-skończonych interesujące wydaje się pytanie o możliwość niezmienniczego rozszerzania takich miar. Harazišvili [11] pokazał, że na grupie addytywnej zbioru liczb rzeczywistych każdą σ-skończoną miarę nie-

zmienniczą można nietrywialnie rozszerzyć w sposób niezmienniczy. Wynik ten został następnie uogólniony w pracy Pelca [31] na przypadek dowolnych grup abelowych.

W tym kontekście należy wspomnieć o pewnym problemie Sierpińskiego, który zainspirował powyższe wyniki. Brzmi on następująco: czy w przestrzeni euklidesowej E^n istnieje maksymalne rozszerzenie miary Lebesgue'a, niezmiennicze względem grupy wszystkich izometrii E^n? W cytowanej już pracy Haražišvili podał negatywne rozwiązanie tego problemu w przypadku prostej. Przy założeniu, że 2^ω jest mniejsze od pierwszej liczby rzeczywiście mierzalnej odpowiedź negatywną dla dowolnej przestrzeni euklidesowej uzyskał najpierw Phakadze [32a], a następnie niezależnie Hulanicki [14]. W pełnej ogólności i bez dodatkowych założeń problem Sierpińskiego został ostatnio rozwiązany przez K. Ciesielskiego i A. Pelca [4a]. Odpowiedź jest negatywna.

Rozważając rozszerzenia miar niezmienniczych na grupach warto wspomnieć o zdumiewającym wyniku Haražišviliego [12]. Wykazał on mianowicie, że każda grupa abelowa G zawiera podzbiór niemierzalny względem każdej σ-skończonej niezmienniczej miary na G. Twierdzenie to uwydatnia kontrast między miarami dowolnymi a niezmienniczymi. W szczególności nawet odpowiednik twierdzenia Łosia i Marczewskiego nie jest prawdziwy w przypadku niezmienniczym.

Choć, jak wspominaliśmy, nie istnieje maksymalne rozszerzenie miary Lebesgue'a na prostej, niezmiennicze ze względu na przesunięcia, istnieją jej rozszerzenia niezmiennicze bardzo duże z pewnego punktu widzenia. Wielkość przestrzeni miary jest dobrze określona przez tzw. *charakter Maharam* tej przestrzeni, czyli maksymalną moc rodziny zbiorów stochastycznie niezależnych. Dla miary Lebesgue'a liczba ta jest oczywiście równa ω. Już w pracy Marczewskiego [39] stawiane było pytanie, czy istnieją niezmiennicze rozszerzenia liniowej miary Lebesgue'a o nieprzeliczalnym charakterze Maharam. Pełne rozwiązanie tego zagadnienia przyniosła praca Kakutaniego i Oxtoby'ego [16]: istnieje niezmiennicze rozszerzenie miary Lebesgue'a o charakterze Maharam 2^{2^ω}. Nie wiadomo natomiast, czy tak wielkie rozszerzenie istnieje dla dowolnej miary niezmienniczej na prostej.

Niezmiennicza wersja ogólnego problemu miary ma w wielu przypadkach rozwiązanie pozytywne, jeśli miary zastąpić przez quasi-miary. Jak wynika z twierdzeń Banacha [1] i Dixmiera (por. Greenleaf [7]), na dowolnej nieskończonej grupie rozwiązalnej istnieje probabilistyczna quasi-miara niezmiennicza. Z drugiej strony, nietrudno pokazać, że na grupie wolnej o co najmniej dwóch generatorach taka quasi-miara nie istnieje. Z tego, co zostało powiedziane na końcu rozdziału pierwszego, łatwo wywnioskować, że pewne miary nie rozszerzają się do miary uniwersalnej, nawet przy założeniu istnienia tej ostatniej. Inaczej jest w przy-

padku quasi-miar. Nie tylko — o czym już wspominaliśmy — każda quasi-miara probabilistyczna rozszerza się do quasi-miary uniwersalnej; jak wykazał von Neumann, jeśli na danej grupie istnieje jakaś uniwersalna probabilistyczna quasi-miara niezmiennicza, to każda probabilistyczna quasi-miara niezmiennicza rozszerza się do takiej quasi-miary uniwersalnej.

Na zakończenie niniejszego rozdziału rozważmy problem nasycenia ideałów niezmienniczych w porównaniu z ogólnym zagadnieniem istnienia ideałów nasyconych. Ideał I na grupie G nazywa się *niezmienniczy*, jeśli $gA \in I$ dla $g \in G$, $A \in I$. Łatwo pokazać, że na żadnej grupie G nie istnieją niezmiennicze ideały pierwsze (a więc 2-nasycone). W pracy Pelca [32] pokazano, że na żadnej grupie abelowej G mocy $\varkappa$ nie istnieją ω_1-zupełne i $\varkappa$-nasycone ideały niezmiennicze, jeśli zaś na $\varkappa$ istnieje ideał $\varkappa$-zupełny i $\varkappa^+$-nasycony, to na G istnieje $\varkappa$-zupełny i $\varkappa^+$-nasycony ideał niezmienniczy. Jak wynika z informacji zawartych w rozdziale pierwszym, fakty te stają się nietrywialne dopiero przy założeniu istnienia dużych liczb kardynalnych.

3. Miara Lebesgue'a na prostej rzeczywistej. Zagadnienia, które omówimy w niniejszym rozdziale, są w większości niezależne od aksjomatyki teorii mnogości, przeważająca zaś większość wyników jest nowa, często tylko kilkuletnia. Zaczniemy od problemu dualności pojęć: miary Lebesgue'a zero i pierwszej kategorii Baire'a. Analogiczne w wielu przypadkach własności tych dwóch najbardziej może naturalnych ideałów na prostej od dawna skłaniały matematyków do ich porównywania. Wykryto wiele par dualnych twierdzeń, takich jak np. twierdzenia Fubiniego dla miary i Kuratowskiego–Ulama dla kategorii (por. Oxtoby [28]). W niektórych sytuacjach omawiane ideały okazały się izomorficzne. Erdös i Sierpiński (por. Oxtoby [28]) udowodnili mianowicie, że przy założeniu hipotezy continuum istnieje bijekcja prostej na siebie, przeprowadzająca zbiory miary zero na zbiory pierwszej kategorii i na odwrót. Fakt ten pozostaje prawdziwy przy ogólniejszym założeniu 2^ω-zupełności obu ideałów (implikowanej również przez aksjomat Martina).

Zaczęto się więc zastanawiać nad wzajemnymi zależnościami pomiędzy różnymi współczynnikami charakterystycznymi dla miary i kategorii. Pewne fakty były znane już dawniej. Przed dalszym referowaniem sytuacji wprowadzimy następujące pomocnicze oznaczenia:

$A(m)$ — ideał miary jest 2^ω-zupełny,
$A(c)$ — ideał kategorii jest 2^ω-zupełny,
$B(m)$ — prosta nie jest sumą $< 2^\omega$ zbiorów miary zero,
$B(c)$ — prosta nie jest sumą $< 2^\omega$ zbiorów I kategorii,
$U(m)$ — zbiory mocy $< 2^\omega$ są miary zero,
$U(c)$ — zbiory mocy $< 2^\omega$ są I kategorii.

Z definicji wynikają implikacje:

$$A(m) \to B(m) \ \& \ U(m) \quad \text{oraz} \quad A(c) \to B(c) \ \& \ U(c).$$

Stare twierdzenie Rothbergera (por. Miller [24]) orzeka, iż

$$B(m) \to U(c) \quad \text{oraz} \quad B(c) \to U(m).$$

T. Bartoszyński [3] wykazał, że $A(m) \to A(c)$.

Otwarte pozostaje pytanie, czy niesprzeczna z teorią mnogości jest prawdziwość zdania $U(c)$ przy fałszywości pozostałych pięciu. Wszystkie inne natomiast układy — nie wykluczone przez wypisane powyżej implikacje — okazały się niesprzeczne. W szczególności $A(c) \leftrightarrow A(m)$, co wobec wyniku Bartoszyńskiego pokazuje, iż bez dodatkowych założeń dualność miary i kategorii załamuje się w sposób bardzo spektakularny. Dokładniejsze informacje o dowodach niesprzeczności poszczególnych układów można znaleźć w pracy Millera [24].

Innym zagadnieniem, również głęboko sięgającym podstaw teorii mnogości, jest mierzalność w sensie Lebesgue'a zbiorów rzutowych. Hierarchia rzutowa stanowi rozszerzenie hierarchii borelowskiej i — podobnie, jak ta ostatnia — klasyfikuje zbiory pod względem regularności ich budowy. Zbiorami rzutowymi nazywamy elementy tzw. *klas rzutowych*, czyli rodzin zdefiniowanych przez indukcję w sposób następujący: Σ^1_1 to rodzina ciągłych obrazów zbiorów borelowskich, Π^1_n to rodzina uzupełnień zbiorów z klasy Σ^1_n, a Σ^1_{n+1} to rodzina ciągłych obrazów zbiorów z klasy Π^1_n. W terminologii tradycyjnej zbiory z klasy Σ^1_1 to zbiory analityczne, z klasy Π^1_1 — koanalityczne (lub CA), z klasy Σ^1_2 to zbiory PCA itd.

Klasyczne twierdzenie Łuzina i Sierpińskiego [21a] orzeka, że zbiory z klas Σ^1_1 i Π^1_1 są mierzalne w sensie Lebesgue'a. Następujące wyniki uzyskane przy użyciu dodatkowych hipotez pochodzą od Martina i Solovaya [23]. Aksjomat Martina wraz z zaprzeczeniem hipotezy continuum implikuje, że wszystkie zbiory z klasy Σ^1_2 (a więc i Π^1_2) są mierzalne. Ten sam fakt wynika z istnienia liczby mierzalnej. Połączenie zaś założeń: aksjomatu Martina, $2^\omega > \omega_2$ i istnienia liczby mierzalnej implikuje, że wszystkie zbiory z klasy Σ^1_3 (a więc i Π^1_3) są mierzalne. Solovay [38] udowodnił również, że jeśli istnieje liczba mocno nieosiągalna, to mierzalność wszystkich zbiorów rzutowych jest niesprzeczna z aksjomatyką teorii mnogości. Jak wykazał Shelah [35], założenia o liczbie nieosiągalnej nie można tu wyeliminować. Co ciekawe, udowodnił on także, iż niesprzeczność analogicznego zdania o przysługiwaniu własności Baire'a wszystkim zbiorom rzutowym nie wymaga istnienia liczby nieosiągalnej. Oto następna różnica między pojęciami miary a kategorii.

Podobnie jak w rozdziałach poprzednich, zatrzymamy się przez chwilę przy zagadnieniu rozszerzania miar. Tym razem chodzi o miarę Lebesgue'a na prostej. O pewnych dotyczących jej faktach mówiliśmy

już przy okazji miar niezmienniczych. Obecnie wspomnimy jeszcze o dwóch rezultatach.

Łatwo pokazać, że jeśli na prostej istnieje jakakolwiek σ-skończona miara uniwersalna, to istnieje taka miara rozszerzająca miarę Lebesgue'a. Nie wiadomo jednak, czy rozszerzenia takiego można dokonać w sposób regularny, tzn. tak, by każdy podzbiór prostej różnił się od pewnego zbioru borelowskiego o zbiór miary zero.

Jak wspominaliśmy w rozdziale pierwszym, istnieje miara, której nie można rozszerzyć na pewną przeliczalną rodzinę zbiorów. Miller wykazał, że ten fakt dla miary Lebesgue'a jest niezależny od aksjomatyki teorii mnogości.

Rozdział niniejszy zakończymy uwagami o obiektach luźno wprawdzie związanych z miarą Lebesgue'a, ale powstałych pod wpływem inspiracji problemami miary na prostej. Chodzi o tzw. zbiory osobliwe. Mianem tym określano w okresie międzywojennym pewien typ podzbiorów prostej o paradoksalnych własnościach. My omówimy dwa rodzaje takich zbiorów, których osobliwość polega na tym, iż choć „jakościowo" (z punktu widzenia teorii miary) są one bardzo małe, to pod względem mocy mogą być całkiem spore.

Zbiór A nazywamy zbiorem *silnej miary zero*, jeśli dla dowolnego ciągu $(a_n\colon n \in \mathbf{N})$ liczb dodatnich istnieje ciąg przedziałów $(I_n\colon n \in \mathbf{N})$ o długościach a_n, takich że $A \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n$. Zbiór A nazywamy zbiorem *uniwersalnie miary zero*, jeśli ma on miarę zero względem uzupełnienia każdej σ-skończonej miary borelowskiej.

Oczywiście każdy zbiór o powyższych własnościach ma miarę Lebesgue'a zero. Ponadto każdy zbiór silnej miary zero jest uniwersalnie miary zero. Jak wykazał Grzegorek [9], stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Przykłady zbiorów uniwersalnie miary zero, które nie są silnej miary zero, podawali wcześniej Sierpiński [36] i Laver [19] korzystając z dodatkowych hipotez teorii mnogości. Łatwo pokazać, że np. zbiór Cantora nie jest uniwersalnie miary zero, zatem między ideałami zbiorów silnej miary zero, uniwersalnie miary zero a miary Lebesgue'a zero zachodzą kolejno ostre inkluzje.

Przejdziemy teraz do omówienia mocy wyżej zdefiniowanych zbiorów.

Hausdorff [13] wykazał, że istnieje nieprzeliczalny zbiór uniwersalnie miary zero. Istnienie takiego zbioru mocy 2^ω wynika z aksjomatu Martina, ale jest niezależne od samej aksjomatyki teorii mnogości. Co się zaś tyczy mocy zbiorów silnej miary zero, to Borel [4] postawił w roku 1919 słynną hipotezę, że są one wszystkie przeliczalne. Od dawna było wiadomo, że hipoteza ta jest sprzeczna z hipotezą continuum, jak również z aksjomatem Martina. Ten ostatni implikuje bowiem łatwo istnienie zbioru silnej miary zero mocy 2^ω. Korzystając z aksjomatu Martina można

też wykazać, że każdy zbiór mocy $< 2^{\omega}$ jest silnej miary zero. Długo jednak nie było wiadomo, czy hipotezy Borela nie da się po prostu obalić na gruncie teorii mnogości. Niesprzeczność hipotezy Borela z aksjomatyką teorii mnogości wzbogaconą o zdanie $2^{\omega} = \omega_2$ udowodnił Laver [19] dopiero w roku 1976. Problem Borela pozostawał więc otwarty niemal tak długo, jak hipoteza continuum. W dalszym ciągu nie wiadomo, czy hipoteza Borela jest niesprzeczna z nierównością $2^{\omega} > \omega_2$.

Na zakończenie tych rozważań podamy twierdzenie charakteryzujące zbiory silnej miary zero, które pokazuje, że są one bardzo małe nie tylko z punktu widzenia miary, lecz również od strony własności topologiczno-grupowych. Galvin udowodnił mianowicie, że zbiór jest silnej miary zero wtedy i tylko wtedy, gdy każdy zbiór rezydualny zawiera pewne jego przesunięcie. Tak więc, choć w teorii mnogości nie można rozstrzygnąć problemu mocy zbiorów silnej miary zero, „jakościowo" są one małe w bardzo wielu aspektach.

4. Teoria miary bez pewnika wyboru. Wszystkie dotychczasowe rozważania prowadziliśmy na gruncie powszechnie stosowanej aksjomatyki teorii mnogości z pewnikiem wyboru. Artykuł ten zakończymy wzmianką o tym, jak wyglądają niektóre z przedstawionych zagadnień, jeśli odrzucić aksjomat wyboru zastępując go ewentualnie innymi hipotezami.

Zacząć należy chyba od informacji o klasycznym już obecnie twierdzeniu Solovaya [38], że przy założeniu istnienia liczby mocno nieosiągalnej nie można udowodnić w teorii mnogości bez pewnika wyboru istnienia zbioru niemierzalnego w sensie Lebesgue'a. Tak więc bez aksjomatu wyboru ogólny problem miary (nawet w wersji niezmienniczej) może mieć eleganckie rozwiązanie pozytywne. Wspomnijmy jeszcze, że w skonstruowanym przez Solovaya modelu każdy zbiór liczb rzeczywistych ma również własność Baire'a.

Mówiąc o teorii miary bez pewnika wyboru warto wspomnieć o tzw. aksjomacie determinacji. Został on wprowadzony przez Mycielskiego i Steinhausa [25]. Dwóch graczy A i B rozgrywa następującą grę. Ustalają najpierw pewnien zbiór X nieskończonych ciągów o wyrazach naturalnych. Następnie wybierają kolejno na przemian liczby naturalne tworząc wspólnie ciąg nieskończony. Jeśli wpada on do zbioru X, wygrywa gracz A, w przeciwnym razie wygrywa B. Zbiór X nazywa się *zdeterminowany* wtedy i tylko wtedy, gdy któryś z graczy ma strategię zapewniającą mu zwycięstwo niezależnie od ruchów przeciwnika.

Korzystając z aksjomatu wyboru łatwo wykazać istnienie zbioru niezdeterminowanego. Nie wiadomo jednak, czy aksjomat determinacji orzekający, że każdy zbiór ciągów jest zdeterminowany, prowadzi do sprzeczności z aksjomatyką teorii mnogości bez pewnika wyboru. Badania nad aksjomatem determinacji jako alternatywą dla pewnika wyboru

stanowią obecnie żywo rozwijający się fragment teorii mnogości i założenie to jest coraz częściej stosowane jako hipoteza dodatkowa.

My wspomnimy tylko o dwóch konsekwencjach aksjomatu determinacji w teorii miary. Pierwszy wynik, pochodzący od Mycielskiego i Świerczkowskiego [26], orzeka, że przy założeniu aksjomatu determinacji każdy zbiór liczb rzeczywistych jest mierzalny w sensie Lebesgue'a. Drugie twierdzenie udowodnił Solovay (por. Jech [15]): z aksjomatu determinacji wynika, że liczba ω_1 jest mierzalna. Porównanie obu tych faktów z informacjami zawartymi w poprzednich rozdziałach pokazuje ogromny wpływ, jaki ma pewnik wyboru na omawiane przez nas zagadnienia. Odrzucenie tego aksjomatu i ewentualne przyjęcie sprzecznego z nim założenia burzy wszystkie nieomal intuicje i diametralnie zmienia oblicze teorii miary.

Bibliografia

[1] S. Banach, *Sur le problème de la mesure*, Fund. Math. 4 (1923), 7–33.

[2] — , K. Kuratowski, *Sur une généralisation du problème de la mesure*, ibidem, 14 (1929), 127–131.

[3] T. Bartoszyński, *Additivity of measure implies additivity of category*, Trans. Amer. Math. Soc. 281 (1984), 209–213.

[4] E. Borel, *Sur la classification des ensembles de mesure nulle*, Bull. Soc. Math. France 47 (1919), 97–125.

[4a] K. Ciesielski, A. Pelc, *Extensions of invariant measures on Euclidean spaces*, Fund. Math., w druku.

[5] P. Erdös, *Some remarks on set theory*, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 127–141.

[6] — , R. D. Mauldin, *The nonexistence of certain invariant mesures*, Proc. Amer. Math. Soc. 59 (1976), 321–322.

[7] F. P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups*, Van Nostrand, Reinhold Company, New York–Toronto–London–Melbourne 1969.

[8] E. Grzegorek, *On saturated sets of Boolean rings and Ulam's problem on sets of measures*, Fund. Math. 110 (1980), 155–161.

[9] — , *On some results of Darst and Sierpiński concerning universal null and universally measurable sets*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. 29, № 1–2 (1981), 1–5.

[10] A. B. Harazišvili, *O niekotorych tipach invariantnych mier*, Doklady AN SSSR 222 (1975), № 3, 538–540.

[11] — , *K zadače Sierpinskogo o strogoj prodolžimosti invariantnoj miery*, ibidem 232 (1977), № 2, 288–291.

[12] — , *Niekotoryje voprosy teorii množestv i teorii miery*, Izdatel'stvo Tbilisskogo Universiteta, Tbilisi 1978.

[13] F. Hausdorff, *Summen von $\aleph_1$ Mengen*, Fund. Math. 26 (1934), 241–255.

[14] A. Hulanicki, *Invariant extensions of the Lebesgue measure*, ibidem 51 (1962), 111–115.

[15] Th. Jech, *Set theory*, Academic Press, New York 1978.

[16] S. Kakutani, J. Oxtoby, *Construction of a non-separable invariant extension of the Lebesgue measure space*, Ann. of Math. 52 (1950), 580–590.

[17] V. Kannan, S. R. Raju, *The nonexistence of invariant universal measures on semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1980), 482–484.

[18] A. Krawczyk, A. Pelc, *On families of σ-complete ideals*, Fund. Math. 109 (1980), 155–161.
[19] R. Laver, *On the consistency of Borel's conjecture*, Acta Math. 137 (1976), 151–169.
[20] A. Lévy, R. Solovay, *Measurable cardinals and the continuum hypothesis*, Israel J. of Math. 5 (1967), 234–248.
[21] J. Łoś, E. Marczewski, *Extensions of measure*, Fund. Math. 36 (1949), 267–276.
[21a] N. Łuzin, W. Sierpiński, *Sur quelques propriétés des ensembles (A)*, Bull. Acad. Sci. de Cracovie (1918), 35–48.
[22] M. Magidor, *On the existence of non-regular ultrafilter and the cardinality of ultrapowers*, Math. Tech. Report 176 (1977).
[23] D. S. Martin, R. Solovay, *Internal Cohen extensions*, Ann. of Math. Logic 2 (1970), 143–178.
[24] A. Miller, *Some properties of measure and category*, Trans. Amer. Math. Soc. 266 (1981), 93–114.
[25] J. Mycielski, H. Steinhaus, *A mathematical axiom contradicting the axiom of choice*, Bull. Acad. Polon. Sci. 10 (1962), 1–3.
[26] J. Mycielski, S. Świerczkowski, *On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness*, Fund. Math. 54 (1964), 67–71.
[27] O. Nikodym, *Sur une propriété de l'opération A*, ibidem 7 (1925), 149–154.
[28] J. C. Oxtoby, *Measure and category*, second edition, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1980.
[29] A. Pelc, *Ideals on the real line and Ulam's problem*, Fund. Math. 112 (1981), 165–170.
[30] — , *Semiregular invariant measures on abelian groups*, Proc. Amer. Math. Soc., 86 (1982), 423–426.
[31] — , *The nonexistence of maximal invariant measures on abelian groups*, preprint.
[32] — , *Universal invariant measures and invariant ideals on groups*, preprint.
[32a] S. S. Phakadze, *K tieorii lebegovskoj miery*, Trudy Tbilisskogo matematičeskogo instituta, Tbilisi 1958.
[33] K. Prikry, *Changing measurable into accessible cardinals* (rozprawa doktorska), University of California, Berkeley.
[34] — , *Kurepa's hypothesis and a problem of Ulam on families of measures*, Monatshefte für Math. 81 (1976), 41–57.
[35] S. Shelah, *Can you take Solovay's inaccessible away?*, preprint.
[36] W. Sierpiński, *Remarque sur le problème de l'invariance topologique de la propriété (C)*, Fund. Math. 30 (1938), 56–58.
[37] R. Solovay, *Real valued measurable cardinals*, *Axiomatic Set Theory*, Proc. Symp. Pure Math. 13 (1), ed. D. Scott, Providence 1971, 397–428.
[38] — , *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann. of Math. 92 (1970), 1–56.
[39] E. Szpilrajn, *Sur l'extension de la mesure lebesguienne*, Fund. Math. 25 (1935), 551–558.
[40] A. Taylor, *On the cardinality of reduced products and the Boolean algebra* $P(\varkappa)/I$, rękopis.
[41] S. Ulam, *Zur Massteorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math. 16 (1930), 140–150.
[42] — , *Problems in modern mathematics*, New York, Wiley 1964.
[43] H. Weber, *Ein Fortsetzungssatz für gruppenwertige Masse*, Arch. Math. (Basel) 34 (1980), 157–159.