ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXVI (1984)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ROMAN MURAWSKI (Poznań)

Matematyczna niezupełność arytmetyki

W 1931 r. w czasopiśmie *Monatshefte für Mathematik und Physik* ukazała się, licząca niewiele ponad 20 stron, praca 26-letniego wówczas matematyka i logika wiedeńskiego Kurta Gödla pod niezbyt zachęcającym tytułem *Über formal unentscheidbare Sätze der 'Principia Mathematica' und verwandter Systeme I*. Miała ona okazać się jedną z najbardziej przełomowych i ważkich prac w logice matematycznej i podstawach matematyki. Gödel udowodnił w niej mianowicie, że arytmetyka liczb naturalnych i wszystkie bogatsze od niej systemy dedukcyjne (czyli systemy, w których jest ona zawarta), jeżeli tylko są niesprzeczne, to są w sposób istotny niezupełne. Oznacza to, że istnieją zdania nierozstrzygalne na gruncie tych teorii, czyli takie zdania φ, że ani φ, ani $\neg\varphi$ nie są twierdzeniami teorii. Co więcej, zdania te są takie, że wiadomo, które ze zdań pary φ, $\neg\varphi$ jest prawdziwe w podstawowym modelu teorii, tj. w strukturze, dla opisania której dana teoria została zbudowana. Ta niezupełność teorii jest istotna, tzn. nie można jej usunąć przez dodawanie do teorii zdań nierozstrzygalnych jako nowych aksjomatów — wtedy bowiem pojawiają się nowe zdania nierozstrzygalne na gruncie tej nowej, bogatszej już, teorii. Wynik ten, zwany I twierdzeniem Gödla, wskazuje na ograniczoność poznawczą metody dedukcyjnej. Pokazuje, że nie można całej matematyki zawrzeć w niesprzecznym systemie sformalizowanym opartym na zwykłej logice predykatów I rzędu. Więcej, nie można w żadnym takim systemie zawrzeć całości prawdy nawet o liczbach naturalnych, zawsze bowiem istnieć będą zdania nierozstrzygalne postaci „dla każdego x, $\varphi(x)$" takie, że wszystkie konkretne podstawienia formuły φ, tzn. zdania kształtu $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ... są twierdzeniami teorii.

Wynik ten godzi w sposób istotny w program formalizmu, jednego ze współczesnych kierunków w filozofii matematyki stworzonego przez wybitnego matematyka niemieckiego Dawida Hilberta w latach 1917–1931. Formalizm bowiem, próbując znaleźć finitystyczny dowód niesprzeczności matematyki klasycznej, proponował, by teorie matematycz-

ne reprezentować w postaci systemów sformalizowanych. Cała matematyka miała być zaksjomatyzowana, a teorie matematyczne traktowane jako niezinterpretowane systemy dedukcyjne. Każdy taki system wymagał dowodu niesprzeczności, i to dowodu przeprowadzonego metodami finitystycznymi. Twierdzenie Gödla pokazało jednak, że nie da się zbudować niesprzecznego i zarazem zupełnego systemu matematyki, a w szczególności, że żaden system sformalizowany arytmetyki liczb naturalnych nie jest adekwatny w stosunku do zbioru prawd arytmetycznych (o ile tylko jest niesprzeczny), tzn. nie da się z niego wywieść wszystkich zdań prawdziwych o liczbach naturalnych. Jakkolwiek bowiem bogata byłaby aksjomatyka takiej arytmetyki sformalizowanej, zawsze znajdą się zdania arytmetyczne, których nie potrafimy w niej rozstrzygnąć (przy założeniu oczywiście, że nasza teoria jest niesprzeczna i że jej aksjomaty tworzą zbiór rekurencyjny, czyli taki, że potrafimy w skończonej ilości prostych mechanicznych kroków rozpoznać, co jest aksjomatem, a co nie). Systemy sformalizowane zatem i środki dowodzenia w nich dostępne nie są (i nie mogą być) w pełni adekwatne w stosunku do zwykłej działalności matematycznej; innymi słowy, dowodliwość w systemie sformalizowanym i prawdziwość to nie jest w pełni to samo; każde twierdzenie arytmetyki sformalizowanej jest prawdziwe, ale istnieją zdania prawdziwe nie będące twierdzeniami, czyli zdania nierozstrzygalne.

Wyniki Gödla mówiły jeszcze więcej. Tzw. II twierdzenie Gödla, zaanonsowane tylko w wyżej wymienionej pracy z 1931 r.(1), a mówiące, że dowód niesprzeczności teorii sformalizowanej zawierającej arytmetykę liczb naturalnych nie może być przeprowadzony za pomocą środków samej tej teorii — pokazuje niewykonalność również drugiego punktu programu Hilberta, stwierdza bowiem wręcz niemożliwość podania finitystycznego dowodu niesprzeczności teorii.

I i II twierdzenia Gödla otrzymane zostały za pomocą przemyślnej i bardzo oryginalnej metody. Otóż Gödel zauważył, że można ustalić jedno-jednoznaczną odpowiedniość między formułami języka danej teorii sformalizowanej (które są skończonymi ciągami symboli podstawowych) a liczbami naturalnymi. A zatem formule φ języka arytmetyki liczb naturalnych odpowiada liczba naturalna, którą oznaczymy symbolem $\ulcorner\varphi\urcorner$. Co więcej, przyporządkowanie to może być dokonane w taki sposób, że naturalnym relacjom syntaktycznym między formułami φ, ψ itd. (np. być podformułą, być konsekwencją itp.) odpowiadają pewne naturalne relacje arytmetyczne między liczbami $\ulcorner\varphi\urcorner$, $\ulcorner\psi\urcorner$ itd. Zamiast więc o formułach, można mówić o liczbach. W ten sposób, jeżeli język rozważanej teorii zawiera język arytmetyki, to można w nim mówić o nim samym!

(1) Gödel sformułował w niej tylko twierdzenie, zapowiadając podanie dokładnego dowodu w części II artykułu, która to część nigdy nie została napisana.

Tę metodę reprezentacji składni za pomocą liczb naturalnych i relacji między nimi nazywa się arytmetyzacją składni lub gödelizacją.

Zastosowanie metody arytmetyzacji w połączeniu z pewnymi ideami leżącymi u podstaw znanych już w starożytności paradoksów typu „self-referential" (np. paradoksu kłamcy) pozwoliło Gödlowi zbudować zdanie, o którym mógł dowieść, że jest prawdziwe w zwykłym standardowym modelu arytmetyki (tzn. w modelu złożonym z liczb 0, 1, 2, ... ze zwykłymi działaniami następnika, dodawania i mnożenia) i jest nierozstrzygalne na gruncie rozważanego przez niego systemu sformalizowanego arytmetyki liczb naturalnych. Zdanie to, aczkolwiek mówiło właściwie o liczbach naturalnych, to jednak w istocie miało treść metamatematyczną. Treść jego sprowadzała się bowiem do stwierdzenia „ja nie jestem twierdzeniem". Orzekało ono zatem swą własną niedowodliwość(2).

Zdanie Gödla miało więc treść nie matematyczną, a metamatematyczną. Z tego też powodu, aczkolwiek interesujące dla logików i badaczy podstaw matematyki, nie było ono zbyt ciekawe dla matematyków nie zajmujących się logiką i podstawami matematyki. To w pewnym sensie pomniejszało jakby wartość samego twierdzenia Gödla. Wiadomo było bowiem co prawda, że arytmetyka liczb naturalnych i inne ciekawsze teorie są niezupełne (i to w sposób istotny), jednakże wszystkie znane przykłady zdań nierozstrzygalnych (których w ramach uogólniania i wzmacniania wyników Gödla znaleziono wiele, np. zdania Rossera, Kreisla–Levy'ego, Kenta, Mostowskiego, Shepherdsona, por. [12]) były sztuczne z matematycznego punktu widzenia. Powstał więc problem (interesujący także z punktu widzenia filozofii matematyki), czy można podać przykłady zdań nierozstrzygalnych o treści matematycznej, w szczególności, czy można podać przykłady zdań o treści teorioloiczbwej (czyli mówiące o liczbach naturalnych i relacjach między nimi) niezależne od arytmetyki liczb naturalnych. Pytanie to było tym ciekawsze, że po wynikach Gödla można było przecież jeszcze żywić nadzeije, iż wszystkie zdania sensowne i interesujące z matematycznego punktu widzenia są jednak rozstrzygalne na gruncie arytmetyki Peano i że w zakresie takich zdań jest ona zupełna.

Z drugiej strony z zagadnieniem niezupełności artymetyki wiązał się pewien problem natury metodologicznej. Otóż od dawna stawiano pytanie, czy nie można by udowodnić istnienia zdań nierozstrzygalnych na gruncie arytmetyki nie używając w tym celu metody arytmetyzacji, a wskazując po prostu pewne zdanie φ oraz dwa modele arytmetyki takie, że w jednym z nich spełnione jest zdanie φ, a w drugim zdanie $\neg\varphi$ (np.

(2) Czytelnika zainteresowanego szczegółami dowodu Gödla odsyłamy do przystępnie napisanego artykułu A. Mostowskiego [4], do pracy C. Smoryńskiego [11] oraz do popularnej książki [6].

A. Mostowski w [5], str. 28, tak formułował jedno z zadań, jakie stoją przed badaczami podstaw matematyki: *Wykazać niezupełność aksjomatycznej arytmetyki bez użycia metody arytmetyzacji, lecz podając odpowiednie modele wykazujące niesprzeczność i niezależność odpowiednio dobranego twierdzenia teorii liczb.*). Zauważmy, że metodę taką z powodzeniem zastosowano w badaniach nad teorią mnogości (por. dowód Gödla — z 1938 r. — niesprzeczności aksjomatu wyboru i uogólnionej hipotezy continuum z teorią mnogości Zermelo–Fraenkla oraz dowód Cohena — z 1964 r. — ich niezależności).

Dla uściślenia wyżej sformułowanego pytania i całych dalszych rozważań, przez arytmetykę liczb naturalnych rozumieć będziemy odtąd arytmetykę Peano, oznaczaną przez PA i nazywaną tak od nazwiska matematyka włoskiego Giuseppe Peano, który w roku 1889 podał jej aksjomatykę. Jest to wzorcowy system używany w badaniach nad podstawami arytmetyki. Oparty jest on na rachunku predykatów I rzędu, a jego język zawiera następujące symbole pozalogiczne: 0 (zero), S (następnik), $+$ (dodawanie), $\cdot$ (mnożenie). Aksjomaty pozalogiczne systemu PA są następujące:

$$\begin{aligned} Sx = Sy &\to x = y, \\ Sx &\neq 0, \\ x+0 &= x, \\ x+Sy &= S(x+y), \\ x\cdot 0 &= 0, \\ x\cdot Sy &= x\cdot y + x, \\ \varphi(0)\ \&\ (\forall x)(\varphi(x) \to \varphi(Sx)) &\to (\forall x)\varphi(x). \end{aligned}$$

φ jest tutaj dowolną formułą języka arytmetyki PA. Aksjomat ostatni jest więc schematem nieskończenie wielu aksjomatów (nazywa się go schematem indukcji).

Sformułowany powyżej problem udało się rozwiązać dopiero w roku 1977, a więc w 46 lat po wyniku Gödla! Dokonał tego J. Paris z Uniwersytetu w Manchesterze. Otóż przy okazji badań nad modelami niestandardowymi(3) arytmetyki liczb naturalnych wynalazł on nową metodę konstrukcji zdań niezależnych, lecz prawdziwych w modelu standardowym.

---

(3) Jedną z konsekwencji twierdzenia o zwartości jest fakt istnienia modeli arytmetyki liczb naturalnych innych (w technicznym języku teorii modeli mówi się tu o nieizomorficzności) niż wyjściowy model złożony z liczb 0, 1, 2, 3, ... i zwykłych operacji następnika, dodawania i mnożenia. Ten model wyjściowy nazywa się *modelem standardowym*, modele nieizomorficzne z nim — *modelami niestandardowymi*. Można je krótko scharakteryzować jako modele zawierające tzw. niestandardowe liczby naturalne, tj. obiekty zachowujące się tak, jak zwykłe liczby naturalne (czyli spełniające wszystkie aksjomaty arytmetyki liczb naturalnych), ale większe od nich wszystkich. Chodzi tu zatem o obiekty a takie, że $a > 0$, $a > 1$, $a > 2$,...

Uzyskane za pomocą tej metody zdanie niezależne uprościł L. Harrington (podając zarazem trochę inny dowód). W ten sposób otrzymano eleganckie zdanie niezależne od arytmetyki PA mające treść kombinatoryczną. Dalej historia potoczyła się znanymi w matematyce torami. Zapoznawszy się z wynikami Parisa i Harringtona, matematycy zaczęli je uogólniać i wzmacniać znajdując w ten sposób nowe zdania niezależne (ciągle o treści kombinatorycznej), wspomnijmy tu tylko prace McAloona, Clote'a, Pudlaka, Friedmana, Millsa, Murawskiego, Ratajczyka, Kirby'ego, Simpsona, Tverskiego. Nie było to jednak ciągle jeszcze rozwiązanie zadowalające, nie było bowiem zdania niezależnego o treści teorioliczbowej. Dopiero w 1982 roku J. Paris i L. Kirby znaleźli takie zdanie (ciekawe, że konstrukcja tego zdania odwołuje się do pewnych idei zawartych w jednej z prac R. L. Goodsteina — chodzi tu o pracę [2] — opublikowaną w roku 1944). Tak więc w 51 lat od słynnego twierdzenia Gödla, które wstrząsnęło umysłami logików i matematyków burząc nadzieje ugruntowania całości matematyki na bazie sformalizowanych systemów dedukcyjnych i pokazując niewykonalność programu formalizmu Hilberta, udało się znaleźć konkretne eleganckie zdanie o treści arytmetycznej dowodzące (swym istnieniem) niezupełności arytmetyki liczb naturalnych.

Opiszemy teraz dokładniej zdania Parisa–Harringtona i Goodsteina–Kirby'ego–Parisa. Najpierw musimy wprowadzić pewne oznaczenia. Jeżeli X jest zbiorem liczb naturalnych, to przez $[X]^n$ oznaczać będziemy rodzinę wszystkich n-elementowych podzbiorów zbioru X. Funkcję $C\colon [X]^n \to c$, gdzie c jest liczbą naturalną (utożsamianą ze zbiorem jej poprzedników, tzn. $c = \{0, 1, 2, \ldots, c-1\}$), nazywamy *funkcją kolorującą*. Można ją interpretować jako kolorowanie n-elementowych podzbiorów zbioru X kolorami $0, 1, 2, \ldots, c-1$. Otóż w 1929 roku matematyk angielski F. P. Ramsey udowodnił, że jeżeli C jest funkcją kolorującą $[X]^n$ oraz X jest dostatecznie duży w stosunku do c oraz n, to istnieje duży podzbiór Y zbioru X taki, że wszystkie jego n-elementowe podzbiory są malowane przez funkcję C na jeden kolor. Taki zbiór Y nazywamy *jednorodnym* względem C. Mówiąc precyzyjniej, Ramsey udowodnił następujące dwa twierdzenia:

Nieskończone twierdzenie Ramseya. *Niech n oraz c będą dodatnimi liczbami naturalnymi. Dla dowolnej funkcji kolorującej $C\colon [\boldsymbol{N}]^n \to c$ istnieje zbiór nieskończony $Y \subseteq \boldsymbol{N}$ taki, że Y jest jednorodny względem C, tzn. funkcja C ograniczona do $[Y]^n$ jest stała.*

Skończone twierdzenie Ramseya. *Niech s, n oraz c będą dodatnimi liczbami naturalnymi takimi, że $s \geqslant n+1$. Wtedy istnieje liczba $R(s, n, c)$ taka, że dla każdego $r \geqslant R(s, n, c)$, każdego zbioru X o r elementach i dowolnej funkcji kolorującej $C\colon [X]^n \to c$ istnieje zbiór jednorodny względem C mający s elementów.*

Twierdzenia te nie są intuicyjnie oczywiste i wymagają oczywiście ścisłych dowodów. Najlepiej traktować je jako uogólnienia na większą ilość wymiarów zasady szufladkowej Dirichleta. Dla $n = 1$ nieskończone twierdzenie Ramseya mówi, że jeżeli podzielić zbiór nieskończony na skończoną ilość rozłącznych części, to jedna z tych części musi być nieskończona. Skończone twierdzenie Ramseya dla $n = 1$, $s = 2$ oraz $R(2, 1, c) = c+1$ jest dokładnie zasadą Dirichleta: jeżeli podzielić zbiór złożony z $c+1$ (lub więcej elementów) na c części, to jedna z nich musi zawierać co najmniej 2 elementy.

Okazuje się, że skończone twierdzenie Ramseya daje się udowodnić w arytmetyce liczb naturalnych PA([4]). Harrington zauważył jednak, że modyfikując je nieznacznie otrzymamy zdanie niedowodliwe w PA. Nazwijmy mianowicie zbiór X liczb naturalnych *relatywnie dużym* wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{moc}(X) \geqslant \min(X)$. Na przykład zbiór $\{2, 3, 89, 92\}$ jest relatywnie duży (bo $\mathrm{moc}(X) = 4 \geqslant 2 = \min(X)$) natomiast zbiór $\{10, 13, 64, 89\}$ nie jest relatywnie duży. Zdanie Parisa–Harringtona φ_0 brzmi teraz:

Dla dowolnych liczb naturalnych s, n, c istnieje liczba naturalna $H(s, n, c)$ taka, że dla wszystkich $h \geqslant H(s, n, c)$, dowolnego zbioru X mocy h i dowolnej funkcji kolorującej C: $[X]^n \to c$ istnieje zbiór Y jednorodny względem C taki, że Y ma co najmniej s elementów i jest relatywnie duży.

Można udowodnić, że zdanie to jest prawdziwe w modelu standardowym $\mathcal{N}_0$ arytmetyki PA([5]) (jest ono konsekwencją nieskończonego twierdzenia Ramseya), ale nie jest twierdzeniem systemu sformalizowanego PA. Jest więc zdaniem (o treści kombinatorycznej) nierozstrzygalnym na gruncie arytmetyki PA.

Opiszemy teraz z kolei zdanie niezależne o treści teorioliczbowej, tzn. zdanie Goodsteina–Kirby'ego–Parisa. Niech mianowicie m i n będą dwiema liczbami naturalnymi. Zdefiniujemy reprezentację liczby m przy zasadzie n. Przedstawiamy najpierw liczbę m jako sumę potęg liczby n (np. jeżeli $m = 266$, $n = 2$, to mamy $266 = 2^8+2^3+2^1$). Następnie to samo robimy ze wszystkimi wykładnikami potęg tak długo, jak tylko jest to możliwe (w naszym przykładzie mamy: $266 = 2^{2^3}+2^{2+1}+2^1$, $266 = 2^{2^{2+1}}+2^{2+1}+2^1$). Określamy teraz liczbę $G_n(m)$ jak następuje: jeżeli $m = 0$, to $G_n(m) = 0$, gdy $m \neq 0$, to $G_n(m)$ jest liczbą otrzymaną przez

---

([4]) Zauważmy, że w arytmetyce Peano możemy mówić o skończonych zbiorach liczb naturalnych. Możemy je bowiem kodować za pomocą pojedynczych liczb. Jeśli $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$, gdzie $a_1 < \ldots < a_n$, to zbiór X można w sposób jednoznaczny zakodować za pomocą liczby $p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, gdzie p_i jest i-tą liczbą pierwszą.

([5]) Ilekroć mówimy o dowodliwości pewnych faktów o treści semantycznej (a więc np. faktów stwierdzających prawdziwość pewnych zdań w pewnych modelach), zawsze mamy na myśli dowodliwość w metasystemie, którym jest teoria mnogości Zermelo–Fraenkla z aksjomatem wyboru.

zastąpienie w reprezentacji liczby m przy zasadzie n liczby n przez liczbę $n+1$ i odjęcie 1 (w naszym przykładzie mamy więc $G_2(266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1}+2 \approx 10^{38}$). Teraz możemy już zdefiniować tzw. ciąg Goodsteina dla liczby m. Kładziemy mianowicie $m_0 = m$, $m_1 = G_2(m_0)$, $m_2 = G_3(m_1)$,... W naszym przykładzie mamy zatem:

$$m_0 = 266_0 = 266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2,$$
$$m_1 = 266_1 = G_2(m_0) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2 \approx 10^{38},$$
$$m_2 = 266_2 = G_3(m_1) = 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1 \approx 10^{616},$$
$$m_3 = 266_3 = G_4(m_2) = 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} \approx 10^{10000},$$

itd.

Zauważmy, że całą tę procedurę konstrukcji ciągu m_k można opisać w języku arytmetyki Peano. Rozważmy teraz zdanie: $\forall m \exists k\ (m_k = 0)$ (jest to oczywiście zdanie języka arytmetyki PA). Otóż można udowodnić (patrz [9]), że zdanie to jest prawdziwe w modelu standardowym arytmetyki liczb naturalnych PA, ale nie da się go udowodnić w tej arytmetyce. Jest więc zdaniem nierozstrzygalnym w arytmetyce PA. Niedowodliwość tego zdania ma swe źródło w tym, że ciąg m_k przyjmuje wartość zero dopiero dla bardzo wielkich k (np. ciąg Goodsteina dla $m = 4$ zeruje się dopiero przy $k = 3 \cdot 2^{402653211} - 3 \approx 10^{121000000}$).

Jak wspomnieliśmy już wyżej, uogólniając wyniki Parisa i Harringtona znaleziono również inne zdania o treści matematycznej niezależne od arytmetyki Peano PA. Szukano też takich zdań niezależnych od fragmentów arytmetyki PA czy od pewnych teorii ją rozszerzających. Nie będziemy tu wchodzili w (skomplikowane na ogół) szczegóły techniczne. Wspomnijmy tylko o wyniku A. A. Tverskego. Otóż w pracy [13] przyporządkowuje on funkcji rekurencyjnej f pewną formułę języka arytmetyki Peano PA, którą oznacza przez KTP(f) (poniżej wyjaśniamy jej sens) i dowodzi, że istnieje ciąg funkcji rekurencyjnych $f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots$ takich, że dla dowolnego $n \geqslant 0$;

(1) $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{KTP}(f_{n-1}) \rightarrow$ „f_n jest funkcją określoną dla wszystkich liczb naturalnych”,

(2) $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{KTP}(f_n) \rightarrow \mathrm{KTP}(f_{n-1})$,

(3) $\mathrm{PA\ non} \vdash \mathrm{KTP}(f_{n-1}) \rightarrow \mathrm{KTP}(f_n)$.

Mamy więc ciąg coraz silniejszych zdań KTP(f_n) takich, że KTP(f_n) jest niezależne od arytmetyki PA wzbogaconej o zdanie KTP(f_{n-1}). Co więcej, na mocy (2), KTP(f_n) jest niezależne od arytmetyki PA wzbogaconej o wszystkie zdania KTP(f_k) dla $k < n$. Funkcję f_{-1} można dobrać tak, że zdanie KTP(f_{-1}) jest równoważne zdaniu Parisa–Harringtona φ_0.

Popularny charakter artykułu nie pozwala na wchodzenie w szczegóły dowodów rozważanych twierdzeń, ich przedstawienie bowiem wyma-

gałoby przytoczenia wielu wyników z podstaw arytmetyki, a to z kolei jest niemożliwe bez wprowadzenia całego skomplikowanego aparatu pojęciowego teorii modeli arytmetyki. Niemniej jednak chcielibyśmy zwrócić uwagę na pewne interesujące sprawy dające się wyrazić bez używania technicznego języka teorii modeli.

Ogólnie rzecz biorąc, dowody omawianych twierdzeń o zdaniach niezależnych można podzielić na dwie grupy: syntaktyczne i semantyczne. Dowody *semantyczne* (taki był np. pierwszy dowód J. Parisa z 1977 r.) opierają się na tzw. teorii informatorów (*indicator theory*) stworzonej przez J. Parisa i L. Kirby'ego przy okazji badań nad odcinkami początkowymi przeliczalnych modeli niestandardowych arytmetyki Peano. Aby wyjaśnić to pojęcie, rozważmy model przeliczalny arytmetyki PA; oznaczmy go przez M. Interesują nas odcinki początkowe I modelu M mające pewną ustaloną własność Q (np. Q może być własnością bycia modelem arytmetyki Peano). Otóż informator (dla własności Q) jest to funkcja (definiowalna w języku arytmetyki PA) informująca nas, czy między dwoma danymi elementami a, b modelu M istnieje odcinek początkowy I mający własność Q czy nie.

Weźmy dowolny przeliczalny niestandardowy model M dla arytmetyki Peano PA i załóżmy, że istnieje informator dla rodziny tych odcinków początkowych I modelu M, które są modelami PA. Istnieje więc definiowalna funkcja $Y(x, y)$ informująca nas o tym, gdzie w modelu M znajdują się odcinki początkowe spełniające wszystkie aksjomaty Peano. Dowodzi się teraz, że istnieje odcinek początkowy I_0 modelu M taki, że jest on modelem PA, ale nie jest w nim spełnione następujące zdanie θ:

$$\forall z \forall x \exists y\, Y(x, y) \geqslant z.$$

Z drugiej strony pokazuje się, że zdanie to jest spełnione w modelu standardowym $\mathcal{N}_0$. Mamy zatem dwa modele teorii PA, mianowicie model niestandardowy I_0 oraz model standardowy $\mathcal{N}_0$ takie, że jeden z nich nie spełnia, a drugi spełnia zdanie θ. Zdanie θ jest więc nierozstrzygalne na gruncie arytmetyki PA.

Tak wygląda ogólny schemat znajdowania zdań nierozstrzygalnych. Cała sztuka sprowadza się teraz do znalezienia odpowiedniego (tzn. o treści matematycznej) informatora Y. Informator znaleziony przez Parisa i Harringtona i dający wyżej opisane zdanie niezależne φ_0 opiera się na twierdzeniu Ramseya.

Drugą metodę dowodzenia twierdzeń o zdaniach nierozstrzygalnych omawianych w tym artykule nazwaliśmy *syntaktyczną*. Nie odwołuje się ona do żadnych pojęć semantycznych, a więc na przykład do pojęcia modelu, lecz opiera się jedynie na pokazaniu dowodliwości pewnych zdań w systemie sformalizowanym arytmetyki liczb naturalnych. Taka właśnie metoda zastosowana jest w pracy Parisa i Harringtona [8]. Rozważa

się tam wyżej opisane zdanie φ_0 będące modyfikacją skończonego twierdzenia Ramseya. Następnie konstruuje się pewną teorię T (rozszerzającą arytmetykę PA) oraz dowodzi się, że

$$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}(T) \to \mathrm{Con}(\mathrm{PA}) \quad \text{oraz} \quad \mathrm{PA} \vdash \varphi_0 \to \mathrm{Con}(T),$$

gdzie Con(PA) oznacza zdanie języka arytmetyki Peano mówiące, że arytmetyka PA jest niesprzeczna, podobnie Con(T) (zdania takie można zbudować używając arytmetyzacji składni). To w połączeniu z II twierdzeniem Gödla prowadzi do wniosku, że zdanie φ_0 nie jest dowodliwe w PA (gdyby bowiem było, to arytmetyka PA dowodziłaby swej własnej niesprzeczności, co, jak pokazał Gödel, jest niemożliwe).

Przyjrzyjmy się na koniec rozważanym w tym artykule zdaniom niezależnym od arytmetyki liczb naturalnych w perspektywie filozoficznej. Otóż, co już wyżej podkreślaliśmy, sam fakt skonstruowania przykładów zdań niezależnych o treści matematycznej zasługuje na uwagę. Twierdzenie Gödla bowiem dawało przykłady zdań nierozstrzygalnych o treści w istocie metamatematycznej, a więc niejako spoza matematyki. Były to zdania jakby treściowo obce matematyce, co więcej, sztuczne. Mówiły one co prawda o liczbach naturalnych, ale wyrosły z pewnych rozważań metamatematycznych (o arytmetyce jako systemie sformalizowanym), a nie z rozważań nad liczbami naturalnymi, jakie prowadzi teoria liczb. Wyniki Parisa, Harringtona i innych podające przykłady zdań nierozstrzygalnych o treści kombinatorycznej czy teorioliczbowej zawierają znacznie więcej informacji o niezupełności arytmetyki niż zawierało twierdzenie Gödla. Mówią bowiem o zdaniach związanych z praktyką matematyczną. Dowodzą ograniczoności poznawczej systemów sformalizowanych, wskazując interesujące z matematycznego (a nie tylko metamatematycznego) punktu widzenia zdania nie mieszczące się w tych systemach, a jednocześnie opisujące pewne prawdziwe fakty.

Wyniki Parisa, Harringtona i innych stanowią więc w pewnym sensie wzmocnienie wyników Gödla zawartych w jego I i II twierdzeniu. Okazuje się jednak, że te nowe zdania nierozstrzygalne o treści matematycznej są silnie związane z pewnymi zdaniami metamatematycznymi w duchu Gödla. K. McAloon udowodnił mianowicie w [3], że zdanie Parisa–Harringtona (a to samo da się pokazać o prawie wszystkich pozostałych nowo znalezionych zdaniach niezależnych) jest równoważne (na gruncie arytmetyki Peano PA) tzw. *zasadzie refleksji* dla formuł klasy Σ_1. Zasada ta głosi co następuje:

Dla dowolnego zdania φ z języka arytmetyki PA, *którego wszystkie kwantyfikatory są egzystencjalne i występują na początku, jeśli φ jest dowodliwe, to φ jest prawdziwe.*

Używając techniki arytmetyzacji składni da się tę zasadę napisać

jako zdanie języka arytmetyki PA. Oznaczmy je symbolem $\mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{PA})$. Zatem twierdzenie McAloona można zapisać jako

$$\mathrm{PA} \vdash \varphi_0 \leftrightarrow \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{PA}),$$

gdzie φ_0 jest zdaniem Parisa–Harringtona.

Zasada refleksji jest zdaniem o treści wyraźnie metamatematycznej. Nowo skonstruowane zdania nierozstrzygalne o treści kombinatorycznej lub teorioliczbowej okazują się równoważne (i to dowodliwie równoważne) pewnemu zdaniu metamatematycznemu. Jest to fenomen niewątpliwie interesujący z filozoficznego punktu widzenia. Mimo bowiem zmienionej „szaty zewnętrznej" (treść zdań kombinatoryczna lub teorioliczbowa, a nie explicite metamatematyczna) wracamy w pewnym sensie do pierwotnych wyników Gödla, od których tak bardzo chcieliśmy uciec.

Nowe zdania nierozstrzygalne okazują się jednak silniejsze od zdania Gödla. Zdanie Gödla „ja nie jestem twierdzeniem" było mianowicie równoważne (na gruncie arytmetyki Peano PA) zdaniu Con(PA). W teorii PA+Con(PA) nie da się jednak udowodnić zasady refleksji $\mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{PA})$, a więc nie da się też dowieść na przykład zdania Parisa–Harringtona φ_0. Nie da się go też oczywiście obalić, jako że jest ono prawdziwe w modelu standardowym $\boldsymbol{N}_0$, który jest modelem teorii PA+Con(PA). A zatem zdanie φ_0 jest niezależne nie tylko od arytmetyki PA, ale i od teorii PA wzbogaconej o dodatkowy aksjomat głoszący jej niesprzeczność.

Zastanówmy się na koniec, czy fakt znalezienia zdań nierozstrzygalnych o treści matematycznej w pełni satysfakcjonuje nie tylko logików, ale też „normalnych" matematyków i czy możemy już uważać ten rozdział podstaw matematyki za zamknięty. Otóż odpowiedź na oba te pytania jest negatywna. Dotychczasowe wyniki nie są w pełni satysfakcjonujące z dwóch co najmniej powodów. Przede wszystkim dowody rozważanych twierdzeń o zdaniach nierozstrzygalnych używają m. in. modeli niestandardowych i sprowadzają się w istocie do pokazania, że istnieje pewien model niestandardowy I_0, w którym badane zdanie nie jest spełnione. Co więcej, czynią to w sposób niekonstruktywny, tzn. nie podają żadnych informacji na temat owego modelu I_0 (z taką sytuacją mamy do czynienia w przypadku wyżej opisanych dowodów semantycznych). Dla „normalnego" teorioliczbowca nie jest to przekonujące. To, że pewne zdanie nie jest spełnione w modelu niestandardowym, nie niesie dla niego zbyt wiele informacji. Liczby niestandardowe nie są bowiem obiektami, które bada teoria liczb.

Z drugiej strony, samo stwierdzenie, że pewnych zdań nie można ani udowodnić, ani obalić w ramach danego systemu sformalizowanego, również nie jest zbyt interesujące dla „normalnego" matematyka. Nie interesuje się on bowiem taką formalną dowodliwością, a jedynie prawdziwością danego zdania wśród badanych przez siebie obiektów (w przypadku teorii

liczb chodzi oczywiście o liczby naturalne, a więc o prawdziwość w modelu standardowym $\mathfrak{N}_0$). W swej praktyce badawczej nie pracuje on w ramach żadnego systemu sformalizowanego, lecz używa wszelkich poprawnych metod dochodzenia do prawdy. Oczywiście jest rzeczą niejasną, jakie to mogą być metody — jest to zresztą jeden z problemów rozważanych w filozofii matematyki (w praktyce sprawa wygląda znacznie prościej i wśród matematyków panuje na ogół zgoda co do tego, jakie metody są dopuszczalne i poprawne, a jakie nie). Dla uproszczenia możemy jednak założyć (a założenie to zdaje się akceptować większość matematyków), że wszystko, co czyni na przykład „normalny" teorioliczbowiec dowodząc twierdzeń, da się zrekonstruować w ramach odpowiedniej teorii mnogości, np. teorii mnogości Zermelo–Fraenkla z aksjomatem wyboru ZFC (6). Problem sprowadzałby się więc do znalezienia zdania o treści matematycznej, dokładniej — teorioliczbowej, którego nie da się rozstrzygnąć za pomocą żadnych poprawnych środków, tzn. zdania mówiącego o liczbach naturalnych i niezależnego od teorii ZFC, dokładniej od teorii $(\mathrm{ZFC})^{\mathrm{PA}}$ (tak oznacza się zbiór zdań o liczbach naturalnych dowodliwych w ZFC). Jak dotąd, zagadnienie to pozostaje otwarte. Znane są przykłady zdań niezależnych od $(\mathrm{ZFC})^{\mathrm{PA}}$, ale są to zdania o treści metamatematycznej, a więc zdania sztuczne z punktu widzenia „normalnych" matematyków. A może wielkie twierdzenie Fermata czy hipoteza Goldbacha są przykładami takich zdań?

Literatura cytowana

[1] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der 'Principia Mathematica' und verwandter Systeme I*, Monatshefte für Math. und Phys. 38 (1931), 173–198.

[2] R. L. Goodstein, *On the restricted ordinal theorem*, J. of Symb. Logic 9 (1944), 33–41.

[3] K. McAloon, *Formes combinatoires du théorème d'incomplétude* (d'après J. Paris et d'autres), Séminaire Bourbaki, vol. 1977/78, Exposés 507–524, Lecture Notes in Mathematics 710, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1979.

[4] A. Mostowski, *O zdaniach nierozstrzygalnych w sformalizowanych systemach matematyki*, Kwartalnik Filozoficzny 16 (1946), 223–278.

[5] —, *Współczesny stan badań nad podstawami matematyki*, Prace Mat. 1 (1955), 13–55.

[6] E. Nagel, J. R. Newman, *Twierdzenie Gödla*, Seria „Omega" t. 52, Warszawa 1966.

[7] J. Paris, *Some independence results for Peano arithmetic*, J. of Symb. Logic 43 (1978), 725–731.

[8] —, L. Harrington, *A mathematical incompleteness in Peano arithmetic*, w: J. Barwise, red., *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1977, 1133–1142.

(6) Założenie to jest naczelną tezą współczesnej postaci logicyzmu, jednego z głównych kierunków filozofii matematyki.

[9] J. Paris, L. Kirby, *Accessible independence results for Peano arithmetic*, maszynopis.
[10] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. (2) 30 (1929), 264–286.
[11] C. Smoryński, *The incompleteness theorems*, w: J. Barwise, red., *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1977, 821–865.
[12] —, *Fifty years of self-reference in arithmetic*, Notre Dame Journal of Formal Logic 22 (1981), 357–374.
[13] A. A. Tverskoj, *Posledovatelnost' kombinatornych sużdenij nezavisimych ot arifmetiki Peano*, Vestnik Mosk. Universiteta, ser. 1, Matematika, Mechanika 5 (1980), 7–13.

Roman Kossak (Warszawa)

Dodatek do artykułu R. Murawskiego

W *Dodatku* tym chcielibyśmy przedstawić zdanie niezależne od arytmetyki Peano PA znalezione przez P. Pudlaka (i opisane w nieopublikowanej pracy *Another combinatorial sentence independent of Peano's axioms*). Wybraliśmy to właśnie zdanie z dwu powodów: 1° ma ono jasną i zrozumiałą dla każdego matematyka treść, 2° można podać stosunkowo przejrzysty i dostępny nawet dla niespecjalisty szkic dowodu jego niezależności.

Zdanie Pudlaka i jego własności opiszemy opierając się na notatkach C. Smoryńskiego do jego wykładów w Utrechcie (C. Smoryński, *Nonstandard Models of Arithmetic*, University Utrecht, Preprint Nr 153, April 1980).

Definicja 1. Niech f będzie funkcją o dziedzinie i przeciwdziedzinie zawartych w zbiorze liczb naturalnych $\boldsymbol{N}$. Mówimy, że zbiór skończony $A \subseteq \boldsymbol{N}$, $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ jest *aproksymacją funkcji f*, jeśli dla każdego $i < n$ spełniony jest warunek

$$\forall x \leqslant a_i [x \in \mathrm{dom} f \to f(x) \leqslant a_{i+1} \cup f(x) > a_n],$$

gdzie dom$f$ oznacza dziedzinę funkcji f.

Na przykład zbiór $A = \{10, 12, 13, 14\}$ jest aproksymacją dowolnego skończonego obcięcia funkcji $f(x) = x^2$. Zauważmy, że zbiór dwuelementowy jest aproksymacją każdej funkcji.

Definicja 2. Jeśli X jest skończonym podzbiorem zbioru $\boldsymbol{N}$, to mówimy, że X jest 0-*gęsty*, jeżeli X ma co najmniej trzy elementy. Mówimy, że X jest $(n+1)$-*gęsty*, jeśli dla każdej funkcji f o dziedzinie i przeciw-